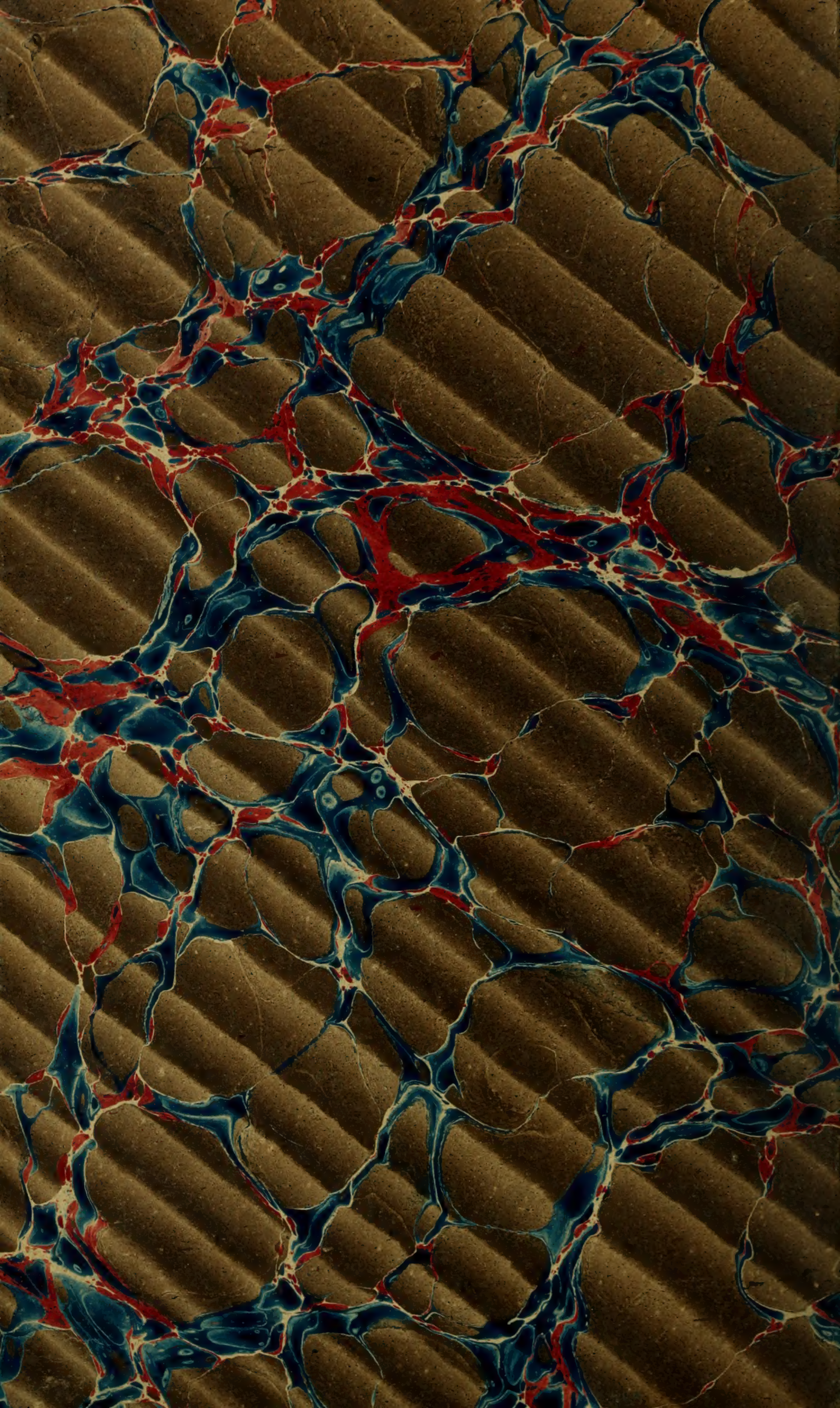
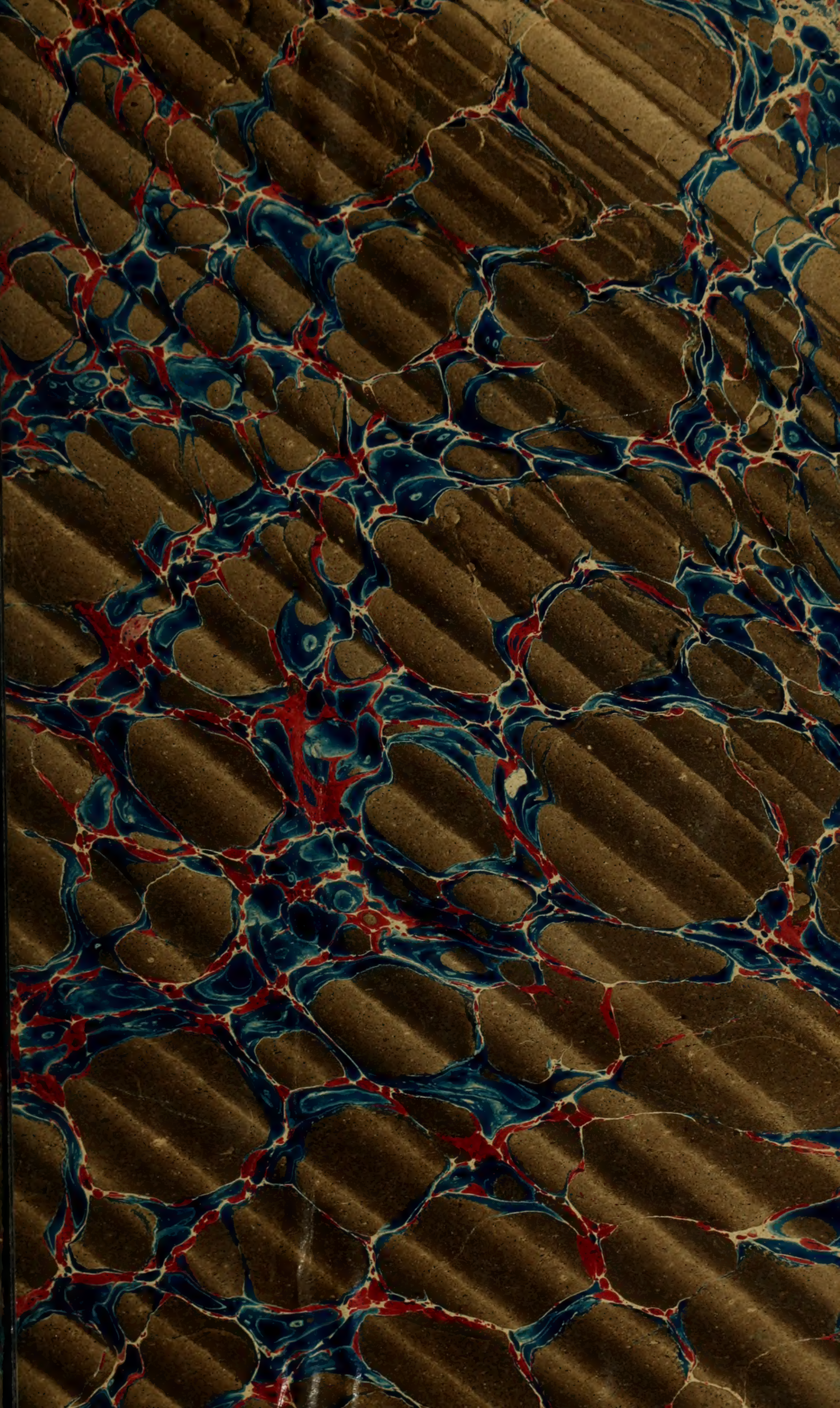

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY





Note. Many errors in binding
Elementaires and Speciales mixed

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur
de l'Académie de Clermont.

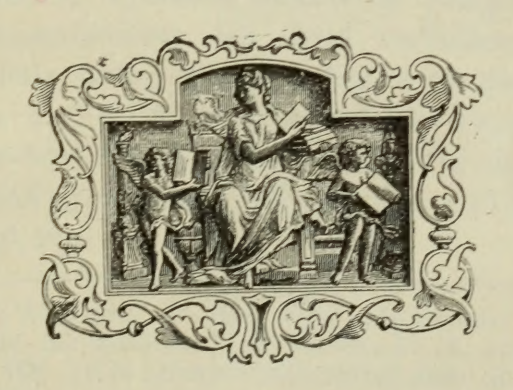
DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

Lucien LÉVY
Agrégé des sciences mathématiques,
Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

3[e] SÉRIE

TOME PREMIER

Année 1887.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1887

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES

SIMPLIFICATION DU CALCUL ALGÉBRIQUE (*)

Par M. **M. Philippof.**

1. — Tout polynôme homogène et rationnel, ordonné d'après deux variables, ou, si l'on préfère cette expression, toute *forme binaire* $ax^n + bx^{n-1}y + \ldots + kxy^{n-1} + ly^n$ peut être représenté par un *symbole*, composé des coefficients du polynôme donné. Ainsi le symbole $({}_xabcd_y)$ ou simplement $(abcd)$ représente complètement la forme $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ (**). Il suffit de remarquer, que la *position* des coefficients dans le symbole détermine complètement les puissances sous-entendues des deux variables. En posant $y = 1$, le symbole $({}_xabc_y) \equiv ax^2 + bxy + cy^2$ devient $({}_xabc_1) \equiv ax^2 + bx + c$. C'est un trinôme ordonné d'après les puissances décroissantes d'une seule variable. En posant $x = 1$, le symbole $({}_x35\bar{8}7_y)$ devient $({}_135\bar{8}7_y)$ et l'on a $(35\bar{8}7_y) \equiv 3 + 5y - 8y^2 + 7y^3$, etc.

(*) Les lecteurs du *Journ. de Math. élém.*, connaissent déjà les premiers principes de ma méthode (Voir l'article de M. de Longchamps; *Journal*, 1886, p. 182). Je la présente maintenant sous un point de vue un peu plus général.

C'est en 1885 que j'ai communiqué ma notation à l'Académie Française (Comptes rendus, 1885, n° 13).

(**) Depuis qu'a paru l'analyse rappelée dans la note ci-dessus j'ai eu l'occasion de lire un ouvrage qui ne m'était pas connu à la date où cette analyse fut écrite et qui renferme le principe d'écriture symbolique, en question. Le livre dont je veux parler est le *Synopsis of elementary results in pure Mathematics*, etc., by G. S. Carr; sa première édition date de mai 1880. On trouvera à la page 35, des exemples de multiplication

Pour abréger l'écriture, on peut employer la notation abc pour désigner indifféremment ${}_x abc_y$, ${}_x abc$ et abc_y. La nature du problème indique presque toujours le nombre des variables et l'ordre des puissances; mais, en cas d'ambiguïté, on devra recourir à une notation plus explicite, en ajoutant les variables de la manière indiquée. Pour expliciter les signes des coefficients, on met le signe — au-dessus du coefficient considéré.

Remarque. — Quand on a deux variables, la somme $(abcd) + (ABC) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + Ax^2 + Bxy + Cy^2$ est irréductible. Mais dans le cas d'une seule variable, on aurait $a + A$, $b + B$, $c + C$, d pour les symboles croissants et a, $b + A$, $c + B$, $C + d$ pour les symboles décroissants. Cette remarque montre que l'addition et la soustraction des symboles diffère dans les trois cas, mais les règles de la multiplication, comme on verra plus tard, sont toujours les mêmes.

2. Multiplication. — Je suppose que les symboles donnés contiennent les mêmes variables semblablement ordonnées.

Pour multiplier $(abcd)$ par (ABC) il faut appliquer la règle suivante. On écrit le multiplicande autant de fois qu'il y a de coefficients dans le multiplicateur.

On obtient :

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{matrix}$$

---

et de division effectués par un procédé que M. Carr nomme *Méthode des coefficients détachés;* ce qui est aussi l'idée première et, si je ne me trompe, fondamentale, de la méthode de calcul qu'expose ici M. Philippof.

Le présent mémoire de M. Philippof n'est pas élémentaire dans toutes ses parties; mais il intéressera certainement le plus grand nombre des lecteurs de ce Journal. Les symboles de M Philippof sont, naturellement, gênants pour ceux qui sont habitués aux notations plus explicites de l'algèbre et il ne serait pas bon, croyons-nous, de les introduire dans l'enseignement de cette science, devant des débutants. Cette écriture symbolique exige, en effet, une abstraction de l'esprit qu'on ne saurait, sans danger, exiger de ceux-ci; mais je crois qu'elle pourra rendre, dans les reherches mathématiques, à ceux qui se seront familiarisés avec elle, de réels services. G. L.

A ces trois lignes horizontales, on ajoute le multiplicateur rangé en quatre colonnes verticales telles que $\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$ et on obtient :

$$R = \left| \begin{matrix} aA & bA & cA & dA \\ aB & bB & cB & dB \\ aC & bC & cC & dC \end{matrix} \right|$$

Le symbole R est une *forme rectangulaire* à colonnes obliques : cela veut dire, que les coefficients des diverses puissances de x sont rangés en colonnes obliques. On voit donc que le symbole obtenu est égal à l'expression suivante

$$aAx^5 + (bA + aB)x^4y + (cA + bB + aC)x^3y^2$$
$$+ (dA + cB + bC)x^2y^3 + (dB + cC)xy^4 + dCy^5.$$

Problème. — *Multiplier :*

$$(a^2 - ab + b^2)x^2 + (a - 2b)xy + (a - 3b)y^2$$
$$\textit{par } (a - 4b)x + (a^2 - ab + b^2).y$$

Rép. — Pour représenter les polynômes donnés on peut employer les symboles $1\ \bar{1}\ 1'\ 1\ \bar{2}'\ 1\ \bar{3}$ et $1\ \bar{4}'\ 1\ \bar{1}\ 1$. Les apostrophes marquent les coefficients du symbole; ces coefficients sont eux-mêmes des symboles. On compose la forme rectangulaire en multipliant $1\ \bar{1}\ 1$ par $1\ \bar{4}$ etc. On obtient :

$$\left.\begin{matrix} 1\ \bar{1}\ 1 & 1\ \bar{2} & 1\ \bar{3} \\ \bar{4}\ 4\ \bar{4} & \bar{4}\ 8 & \bar{4}\ 12 \\ & & \\ 1\ \bar{1}\ 1 & 1\ \bar{2} & 1\ \bar{3} \\ \bar{1}\ 1\ \bar{1} & \bar{1}\ 2 & \bar{1}\ 3 \\ 1\ \bar{1}\ 1 & 1\ \bar{2} & 1\ \bar{3} \end{matrix}\right\}$$

Les coefficients du produit sont eux-mêmes des formes rectangulaires.

En réduisant par colonnes obliques les coefficients symboliques de ce symbole, on obtient :

$$1\ \bar{5}\ 5\ \bar{4}'\ 1\ \bar{2}\ 3\ \bar{2}\ 1 + 1\ \bar{6}\ 8'\ 1\ \bar{3}\ 3\ \bar{2} + 1\ \bar{7}\ 1\ 2'\ 1\ \bar{4}\ \bar{4}\ \bar{3}.$$

Dans ce cas, on ne peut pas réduire davantage. Si l'on veut revenir à la notation explicite, on observe que

$1\ \bar{2}\ 3\ \bar{2}\ 1 = a^4 - 2a^3b + 3a^2b^2 - 2ab^3 + b^4$; $\bar{1}\ 6\ 8 = a^2 - 6ab + 8b^2$, etc.

Mais, si l'on avait $b = 1$, il serait permis d'aller plus loin. En comparant les termes

$$\begin{matrix} 1 & \bar{1} & 1 \\ \bar{1} & 1 & \bar{1} \\ 1 & \bar{1} & 1 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} 1 & \bar{2} \\ \bar{4} & 8 \end{matrix}$$

on remarque qu'on peut ajouter $1 + 8$, $\bar{1} + \bar{1} + \bar{2} + \bar{4}$, etc., en procédant de gauche à droite d'après les colonnes obliques. On obtiendra finalement :

$$1\,\bar{5}\,5\,\bar{4}'\,1\,\bar{2}\,4\,\bar{8}\,9'\,1\,\bar{2}\,\bar{4}\,1\,0'\,1\,\bar{4}\,4\,\bar{3} =$$

$(a^3 - 5a^2 + 5a - 4)\,x^3 + (a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a + 9)x^2y$ + etc.

Si, au contraire, $a = 1$, il faut ajouter les coefficients dans l'ordre inverse.

(A suivre.)

SUR LA RACINE CUBIQUE D'UNE IRRATIONNELLE DE LA FORME $a + \sqrt{b}$ (*).

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Vire.

La transformation d'une expression de la forme $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ en une somme de radicaux simples, est traitée dans les cours élémentaires ; la transformation analogue pour une expression de la forme $\sqrt[4]{a + \sqrt{b}}$ a été examinée dans ce Journal (**). Nous nous proposons dans cette note une transformation analogue pour les expressions de la forme $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$.

Cherchons d'abord la forme de cette racine, et supposons que l'on puisse avoir :

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

(*) Cette question a été posée et résolue par Lacroix ; elle fait partie des exercices proposés dans l'algèbre de M. G. de Longchamps (*Algèbre*, leçon 14, ex. 12).

(**) Voyez *Journal* 1882, p. 63.

L'élévation au cube donne :

$$a + \sqrt{b} = x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x}.$$

Le second membre contenant deux radicaux différents ne pourra pas être identifié avec le premier; donc l'hypothèse faite est fausse. On voit toutefois que l'identification devient possible si l'un des radicaux du second membre disparaît, c'est-à-dire si x est un càrré parfait.

Posons donc :

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = x + \sqrt{y}$$

d'où $$a + \sqrt{b} = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + y\sqrt{y}.$$

Identifions les deux membres ; il vient pour déterminer x et y les deux relations :

$$a = x^3 + 3xy, \qquad (1)$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{y}(3x^2 + y).$$

Élevons au carré ces deux équations et retranchons-les.

$$a^2 = x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2$$

$$b = 9x^4y + 6x^2y^2 + y^3$$

$$a^2 - b = x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3 = (x^2 - y)^3$$

$$x^2 - y = \sqrt[3]{a^2 - b}.$$

Si $a^2 - b$ est un cube parfait, la transformation pourra être avantageuse, la condition est nécessaire ; elle n'est pas suffisante.

Pour abréger, posons : $c = \sqrt[3]{a^2 + b}$.

On a

$$y = x^2 - c.$$

Substituons dans (1) cette valeur de y, il vient pour déterminer x l'équation :

$$4x^3 - 3cx - a = 0.$$

Si la transformation est possible, cette équation aura une racine commensurable, qn'il est aisé de trouver. Si la racine est entière, elle se trouvera parmi les diviseurs du terme indépendant de x, ces diviseurs y compris a et 1 étant pris avec le signe + ou avec le signe — ; si elle est fractionnaire, son numérateur se trouvera ainsi qu'il vient d'être dit, et son dénominateur sera parmi les diviseurs du coefficient du terme en x^3. Ainsi, après quelques essais, on pourra trouver cette racine.

La première condition : $a^2 - b$, cube parfait, peut toujours être remplie, il suffit de mettre la racine cherchée sous la forme : $(x + \sqrt{y})\sqrt[3]{z}$, et de profiter de l'indétermination de z de manière à remplir cette condition.

Exemples : 1° Soit à transformer $\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}}$.

Posons

$$\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} = x + \sqrt{y}.$$

Ici $a^2 - b = 49 - 50 = -1$ dont la racine cubique est -1 ; donc $c = -1$, x est déterminé par l'équation :

$$4x^3 + 3x - 7 = 0$$

La transformation sera possible si cette équation admet une racine commensurable ; or, à simple inspection, on voit la racine $x = 1$; ensuite $y = x^2 - c = 2$. On a donc :

$$\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} = 1 + \sqrt{2} \ (*).$$

2° Soit à transformer $\sqrt[3]{52 + 30\sqrt{3}}$.

Posons :

$$\sqrt[3]{52 + 30\sqrt{3}} = (x + \sqrt{y})\sqrt[3]{z}.$$

Si on répète le calcul précédent, en tenant compte du facteur $\sqrt[3]{2}$, il vient :

$$x^2 - y = \sqrt[3]{\frac{a^2 - b}{z^2}} = \frac{1}{z}\sqrt[3]{(a^2 - b)z}.$$

Ici $a = 52$, $b = 2700$, $a^2 - b = 4$; donc :

$$x^2 - y = \frac{1}{z}\sqrt[3]{4z}.$$

(*) L'identité

$$\alpha + \sqrt{\beta} = \sqrt[3]{\alpha^3 + 3\alpha\beta + \sqrt{\beta(3\alpha^2 + \beta)^2}}$$

donne la *forme arithmétique* des nombres a et b qui se prêtent à une transformation avantageuse pour l'expression irrationnelle $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$. Par exemple, en faisant $\alpha = 1$, $\beta = 2$, on a l'expression numérique considérée ici.

De même, l'identité

$$\sqrt[3]{\gamma}(\alpha + \sqrt{\beta}) = \sqrt[3]{\alpha\gamma(\alpha^2 + 3\beta) + \sqrt{\beta(3\alpha^2 + \beta)^2\gamma^2}}$$

donne la forme arithmétique des nombres a, b auxquels s'applique la deuxième transformation. En donnant aux lettres α, β, γ des valeurs numériques quelconques, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, par exemple, on obtiendra une irrationnelle $\sqrt[3]{52 + 30\sqrt{3}}$, à laquelle s'applique, avec certitude, la transformation présente. G. L.

Pour que $x^2 - y$ soit rationnel, il suffit de faire $z = 2$, il vient alors $x^2 - y = 1$; et pour déterminer x l'équation :

$$4zx^3 - 3czx - a = 0$$

qui est ici $$8x^3 - 6x - 52 = 0.$$

Cette équation admet la racine commensurable $x = 2$ d'où $y = x^2 - c = 3$ et l'on a

$$\sqrt[3]{52 + 30\sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})\sqrt[3]{2}.$$

VARIÉTÉS

ESSAI
SUR LA
GÉOMETRIE DE LA RÈGLE ET DE L'EQUERRE (*)

Par M. G. de Longchamps.

(SECONDE PARTIE)

CHAPITRE Ier

LES PREMIÈRES APPLICATIONS ; LA FAUSSE ÉQUERRE ET LE CORDEAU

Il n'entre nullement dans notre plan de reproduire ici la description des instruments d'arpentage, non plus que leurs applications classiques. Nous insisterons seulement dans ce premier chapitre sur deux instruments moins connus, et qui sont pourtant, croyons-nous, d'une utilité pratique incontestable; nous voulons parler de la *fausse équerre* et du *cordeau*.

1. La fausse équerre et le cordeau. — En principe, la fausse équerre est composée d'un piquet vertical sur

---

(*) La première partie a été publiée, en partie, dans ce Journal et, en partie, dans le *Journal de Mathématiques spéciales*, pendant les années 1885 et 1886; cette seconde partie ne comporte que des développements très simples, elle paraîtra régulièrement dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*, jusqu'à son dernier chapitre.

lequel on peut fixer deux tiges horizontales, munies d'alidades, faisant entre elles un angle quelconque (*).

Le but de cet instrument est de reproduire, en différents points, un angle déjà observé.

Quant au cordeau, c'est l'instrument d'arpentage le plus simple qu'on puisse imaginer; un ruban d'acier divisé en parties égales, comme celui dont se servent les géomètres arpenteurs, ou même une simple ficelle terminée par deux petits piquets en bois, voilà tout l'instrument, Nous emploierons pourtant, dans quelques solutions, un cordeau un peu plus compliqué, portant certaines divisions ou, pour mieux dire, certains points de repaire et que nous nommerons le *cordeau divisé;* il peut, d'ailleurs, être obtenu sans difficulté avec une corde quelconque, comme nous l'expliquerons plus loin.

2. Réflexions générales. — L'utilité des développements dans lesquels nous allons entrer, et qui n'est peut-être pas suffisamment apparente, est surtout motivée par la simplicité extrême des instruments qui sont en jeu dans les solutions que nous allons exposer.

A ce propos, il est bon de noter ici, au moment où nous pénétrons dans l'exposition des applications pratiques de la géométrie de la règle et de l'équerre, qu'il n'est pas indiffé-

---

(*) On trouve, dans une ancienne géométrie, cette description de la fausse équerre « Il suffit de pratiquer sur la tête d'un gros piquet, deux entailles droites qui se coupent d'une manière quelconque, ou de fixer en croix, sur le bout d'un bâton, deux morceaux de bois qui fassent un angle quelconque et qui portent trois épingles plantées perpendiculairement, une au point de croisement, les deux autres vers les extrémités des côtés d'un des quatre angles formés. » (*Géometrie appliquée à l'industrie,* par Bergery, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur à l'École d'artillerie de Metz, ... Bachelier, 1835; p. 70).

Cette description de la fausse équerre la montre bien, croyons-nous, sous son jour véritable. Telle est, en effet, l'extrême simplicité de cet instrument qu'on peut, à un moment donné, réaliser celui-ci sur le lieu même de l'opération. On observera notamment la différence essentielle qui distingue la fausse équerre des différents graphomètres. Ceux-ci ont pour but de *mesurer* des angles; la fausse équerre se propose simplement de *relever* un angle donné pour le reproduire en un autre point du terrain, sans que la valeur de cet angle ait besoin d'être connue.

rent de savoir résoudre un problème d'arpentage par des procédés très divers. En effet, quand il s'agit d'obtenir sur le terrain certains résultats, les conditions matérielles qui sont imposées à une solution connue, bien que celle-ci soit irréprochable au point de vue théorique, peuvent la rendre absolument illusoire et vaine.

Cette observation, Servois, dans le livre que nous avons cité, l'a produite, à plusieurs reprises, y insistant avec raison; nous l'avons eue, nous-mêmes, l'estimant fort judicieuse, constamment présente à l'esprit dans la rédaction de la seconde partie de cet ouvrage. C'est précisément, pour répondre aux besoins si divers de la géométrie pratique, que nous nous sommes efforcé de multiplier et de varier autant que possible, sans toutefois sortir de la simplicité qui s'impose tout naturellement à cette géométrie, les solutions des problèmes fondamentaux de l'arpentage. Dans la géométrie théorique, on s'attache, et avec raison, à trouver la solution la plus élégante; il n'en est pas toujours ainsi dans la géométrie pratique et telle solution, bien qu'elle exige plus de tracés et plus de calculs, peut pourtant, dans certains cas, être celle qu'on doit préférer, du moins dans les conditions matérielles où le problème se présente.

Cette remarque générale étant faite ici, pour n'y plus revenir, nous abordons l'exposition des solutions de quelques problèmes d'arpentage, solutions obtenues par l'emploi de la fausse équerre et du cordeau.

3. — Problème I (*). *Prolonger une droite au delà d'un obstacle.*

Ce problème est l'un de ceux auxquels s'appliquent le mieux la fausse équerre et le cordeau.

La *fig. 120* montre suffisamment, sans qu'il soit besoin d'entrer dans des explications qui se présentent d'elles-

---

(*) Dans ce problème, et dans plusieurs de ceux qui sont traités dans ce chapitre, il est sous entendu que les solutions nécessitent seulement l'emploi de la fausse équerre et du cordeau. S'il ne doit être fait usage que de l'un ou de l'autre de ces instruments, l'énoncé fait alors mention de cette particularité.

mêmes à l'esprit, comment la repétition de l'angle θ permet

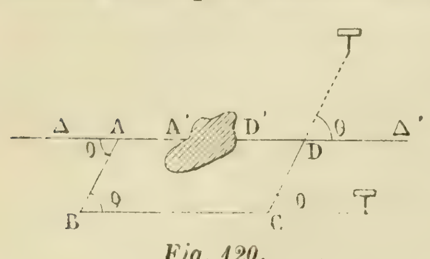


Fig. 120.

de résoudre cette question classique. On suppose bien entendu que, avec l'aide du cordeau, la longueur AB ait été reportée de C en D.

Mais il est bon d'observer, à propos de ce problème, que la fausse équerre permet de le résoudre dans des conditions

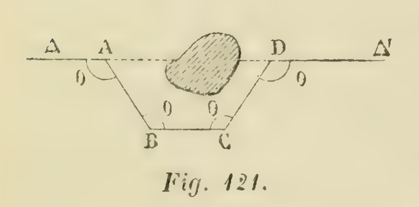


Fig. 121.

qui ne se prêteraient pas à l'usage de l'équerre ordinaire. On voit d'abord *(fig. 121)* comment on peut trouver le prolongement Δ' de Δ en faisant marquer à la fausse équerre un angle obtus; et même ce procédé est, dans la pratique; un peu plus simple parce qu'il exige seulement que des jalons soient plantés aux points A, B, C, D. Dans le cas de la *fig. 122*

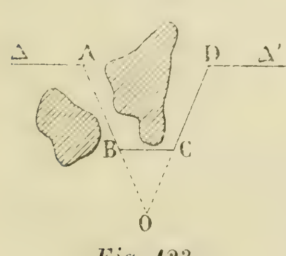


Fig. 123.

on a précisément appliqué cette seconde manière; on voit qu'en supposant, et cette hypothèse se présente fréquemment sur le terrain, l'obstacle considéré environné lui-même d'autres obstacles rendant les mouvements de l'équerre ordinaire inefficaces, la fausse équerre résout le problème posé avec la même facilité que dans le cas, plus simple, que nous avons examiné d'abord.

Nous reviendrons d'ailleurs sur ce problème dans le chapitre suivant, pour le résoudre par des procédés très variés.

4. — Remarque I. Si l'on veut évaluer la longueur de la droite $\Delta\Delta'$ qui est renfermée dans l'obstacle considéré, on observera *(fig. 120)* que l'on a

$$A'D' = BC - AA' - DD';$$

il suffira donc de mesurer avec le ruban divisé les longueurs BC, AA' et DD'; on appliquera ensuite la formule précédente.

Dans le cas où l'on opère comme l'indique la *fig. 122*, la

longueur AD se calcule par la formule

$$AD = BC.\frac{OA}{OB}.$$

Remarque II. Dans le cas que nous avons soulevé tout à l'heure et dans lequel nous avons supposé que l'obstacle considéré se trouvait dans le voisinage d'autres obstacles, on peut imaginer que ceux-ci soient tellement multipliés que les solutions données soient, l'une et l'autre, impraticables; les jalonnements nécessaires ne pouvant être réalisés.

Voici une solution qui pourrait alors être essayée.

Par le point A, traçons deux jalonnements, AB, AC, faisant avec AA′, des angles θ, θ' que l'on peut successivement relever avec la fausse équerre. En un point C, arbitrairement choisi sur AC, portons la fausse équerre dont les branches font l'angle θ et, dans la partie accessible, jalonnons les droites CD, CB telles que $BCD = \theta$. Transportons-nous ensuite au point B et, en partant de ce point, jalonnons la droite BD faisant avec BC l'angle θ. Le point D ainsi obtenu appartient au prolongement de AA′.

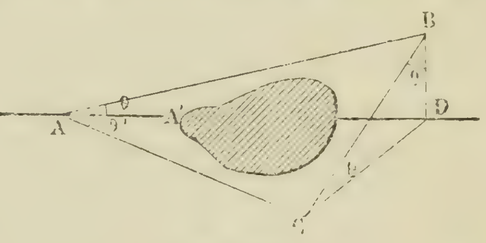


Fig. 123.

Si l'on observe que, dans cette solution, la position du point A, les angles θ et θ', la longueur AC et la direction de CB sont autant de quantités arbitraires, on reconnaîtra qu'elle offre, malgré sa complication évidente, pour certains cas difficiles, comme ceux que nous avons prévus tout à l'heure, de réelles ressources.

Quant à la longueur de AD, elle se calcule en appliquant au quadrilatère ABCD le théorème de Ptolémée, et l'on a

$$AD = \frac{AB.CD + AC.BD}{BC}.$$

5. — Problème II. *Élever une perpendiculaire en un point* O *pris sur une droite* Δ.

Avec le cordeau, prenons, à partir du point O deux points

A et B équidistants de O et, en ces points, fixons deux jalons.

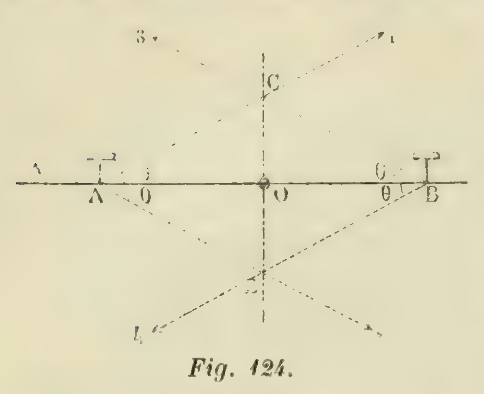


Fig. 124.

Ayant donné aux branches de la fausse équerre une inclinaison quelconque θ, transportons l'instrument au point A et dirigeons l'une des branches de façon à viser le jalon B; l'autre branche peut occuper par rapport à AB, et successivement, deux positions symétriques AC, AD que l'on fait jalonner. Ayant répété au point B la même opération, on détermine ainsi, facilement, deux points C et D. Finalement, en jalonnant CD on obtient une droite qui passe par le point O et qui tombe perpendiculairement sur AB.

Remarque. — La construction précédente résout aussi, évidemment, et par l'emploi de la fausse équerre seule, le problème qui a pour but *d'élever une perpendiculaire au milieu d'une droite donnée* AB.

6. — Problème III. *Avec la fausse équerre, d'un point donné* C, *abaisser une perpendiculaire sur une droite donnée* Δ.

La solution de ce problème s'inspire tout naturellement de la précédente.

Ayant choisi sur Δ un point arbitraire A, on prend avec la fausse équerre (en visant du point A : 1° le point C, 2° un jalon quelconque placé sur Δ), l'angle θ des droites AC et AB (*). On répète alors les constructions que nous avons

(*) Les bras de la fausse équerre sont ordinairement fixés, sur le pivot vertical qui les supporte, au moyen d'une vis de pression ; ce qui permet de faire tourner ceux-ci arbitrairement, autour de leur point d'attache.

La fausse équerre, réduite à sa plus simple expression, est constituée par deux tiges horizontales fixées à demeure sur le pivot; et alors l'angle donné par l'instrument est *invariable*. On voit comment, dans ce cas, on doit modifier la présente solution.

Le point A ne peut plus être arbitrairement choisi et l'on doit, par un certain tâtonnement, qui aboutit d'ailleurs rapidement, chercher le point Δ pour lequel l'angle correspondant à celui que nous avons désigné par θ, est justement égal à celui de l'instrument avec lequel on opère.

indiquées au paragraphe précédent, avec cette seule modification, que le point B se détermine sans faire usage du cordeau, en cherchant, par tâtonnement, le point de Δ duquel on voit les points connus A et C sous l'angle θ.

On peut d'ailleurs ramener le problème au précédent en menant d'abord, comme nous allons l'expliquer, par le point C une parallèle à Δ ; ou, inversement, on peut traiter le problème I, au moyen du problème II. Cette dernière remarque n'est pas absolument sans intérêt parce qu'elle prouve qu'on peut résoudre le problème I sans avoir recours au cordeau et par le seul usage de la fausse équerre.

7. — PROBLÈME IV. *Avec la fausse équerre, mener, par un point* C, *une parallèle à une droite donnée* Δ.

Plaçons-nous en un point A de Δ, point pour lequel l'angle CAB a une valeur θ, enregistrée par la fausse équerre. En plaçant cet instrument au point C et en dirigeant une des branches dans la direction CA, l'autre branche donne la direction qu'il faut faire jalonner pour obtenir la parallèle demandée Δ'.

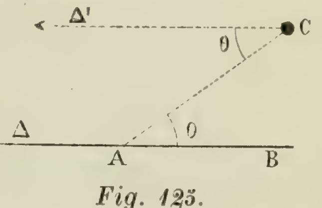


Fig. 125.

Pour résoudre le problème I, sans avoir recours au cordeau, voici la marche qu'il faudrait suivre.

Soit C le point par lequel on propose d'élever une perpendiculaire à la droite Δ' ; on trace d'abord, comme nous venons de l'expliquer, une droite Δ parallèle à Δ' et, du point C, on abaisse une perpendiculaire sur Δ. Le problème I se trouve ainsi résolu au moyen des problèmes II et III lesquels, comme on l'a remarqué, n'exigent que l'emploi de la fausse équerre.

8. — PROBLÈME V. *Étant donnée une inclinaison* θ *des branches de la fausse équerre, leur donner une inclinaison* 2θ, $\frac{\theta}{2}$, $90° \pm \theta$.

1° Prenons d'abord le cas où l'on veut faire l'angle 2θ.

D'un point A, arbitrairement choisi, on vise successivement

deux points dans la direction des tiges qui font entre elles l'angle proposé θ et, dans ces directions, on fait fixer deux jalons B et C. Sans quitter le point A, et l'une des tiges étant dirigée encore vers le jalon B, mais l'instrument ayant été retourné, on vise de nouveau le long de la deuxième tige et dans cette direction nouvelle on fixe un jalon D. Laissant alors cette tige immobile, on fait tourner la première de façon qu'elle soit dirigée vers le point C; dans cette disposition, les deux tiges font alors l'angle 2θ.

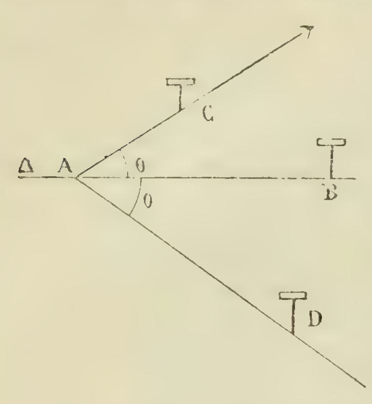


Fig. 126.

2° Cherchons maintenant à faire marquer à la fausse équerre un angle moitié de celui qu'elle donne.

Soit BAD l'angle θ observé par la fausse équerre; ayant fixé un jalon au point B, avec un cordeau on prend la longueur AB et on la porte, dans le prolongement de DA, de A en C. Si l'on transporte alors la fausse équerre au point C et si l'on vise avec ses deux branches les jalons D et B, celles-ci feront entre elles l'angle $\frac{\theta}{2}\cdot$ Ainsi l'on peut, à volonté, doubler l'angle des branches de la fausse équerre ou le réduire à sa moitié.

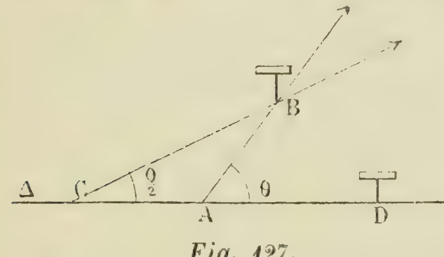


Fig. 127.

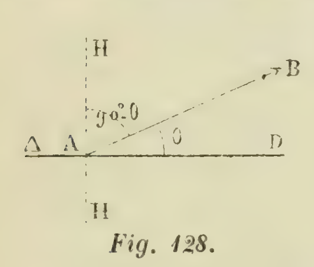


Fig. 128.

2° Enfin, si l'on veut former l'angle complémentaire $90° - \theta$, il suffira de jalonner la droite HH' perpendiculaire à Δ, au point A; l'angle HAB est égal à $90° - \theta$, On observera que si l'on veut obtenir l'angle $90° + \theta$, celui-ci est égal à l'angle BAH'.

9. — Remarque. Dans les problèmes I, II que nous avons résolus tout à l'heure, nous avons supposé que l'on pouvait

jalonner le terrain, de part et d'autre de la droite donnée Δ; nous avons admis encore que celle-ci pouvait être prolongée de part et d'autre du point considéré O. Dans la pratique, ces conditions ne sont pas toujours accordées; soit que AB représente le bord d'un fleuve, soit, dans d'autre cas, qu'un obstacle vienne se placer au point O et ne permette pas les opérations que nous avons décrites.

On peut résoudre ces cas particuliers par des procédés divers et faciles à imaginer; mais nous indiquerons tout à l'heure, pour ces singularités, des solutions tout à fait simples en utilisant l'instrument auquel nous avons fait allusion plus haut et que nous avons nommé, pour le distinguer du cordeau ordinaire, le cordeau divisé.

(A suivre).

CORRESPONDANCE

Monsieur le Directeur,

Vous avez publié, dans le numéro d'août 1886 de votre journal, un article de M. Casimir Rey sur ce qu'il appelle l'omniformule de cubature; dans cet article, note IV, M. Rey critique une phrase d'un autre article que j'ai publié moi-même, dans les *Nouvelles annales de mathématiques* en 1880, à la page 529.

Je m'adresse à votre impartialité, Monsieur le Directeur, pour faire connaître ma défense, vos lecteurs l'apprécieront.

I. — La phrase incriminée est la suivante :

« On retrouve ainsi pour expression de V dans ces hypothèses,

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + C_3),$$

formule due à Maclaurin (*Fluxions*, n° 848; 1742). »

M. Rey dit d'abord : que le n° 848 du *Traite des Fluxions* de Maclaurin ne s'occupe pas de cubatures : à ce point de vue il a raison ; mais il ne me paraît pas en résulter que

Maclaurin ne soit pas l'auteur d'une formule générale comprenant, sans aucun calcul nouveau, la forme $\frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3)$ comme valeur *exacte* de $\int_0^h F(x)\,dx$, pourvu que $F(x)$ soit une fonction entière et rationnelle d'x dont le degré ne surpasse pas 3.

Or toutes les personnes qui s'en occupent savent que l'intégrale de $F(x)$ sert indifféremment à trouver la quadrature de la courbe dont l'ordonnée est $F(x)$, à cuber le volume engendré par une aire plane, dont le plan se déplace à lui-même, et qui est exprimée par $F(x)$, et encore à beaucoup d'autres questions.

M. Rey, lui-même, paraît s'en douter un peu, car il déduit de l'omniformule de cubature, par une modification insignifiante, la quadrature de la parabole. (note III de son article.

Il me paraît que Maclaurin devait, lui, en être absolument certain, car il termine le n° 848 de son *Traité des Fluxions*, comme on le verra ci-après, en déduisant de sa formule, par la suppression de certains termes, deux théorèmes de Newton, et le Dr Richard Baltzer, dans son ouvrage intitulé : *Die Elemente der Mathematik*, 4me édition, Liepzig, t. II, p. 245, n° 10, dit que l'une de ces formules réduites, (qui n'est autre que l'omniformule de M. Rey), a été établie par Newton, comme méthode approchée, pour la cubature d'un segment solide par le moyen de plusieurs sections parallèles, ou la quadrature d'une aire plane par le moyen de plusieurs cordes parallèles.

Dans mon article de 1880, je n'ai point dit que Maclaurin eût appliqué la formule que je lui attribue, plutôt à une question qu'à une autre, je l'ai seulement cité à propos d'une recherche de volume, et dans la note finale je dis que les formules que je donne s'appliquent sans modification sensible à des quadratures que je définis.

II. — En second lieu, M. Rey entre dans l'analyse du n° 848 du *Traité des Fluxions* de Maclaurin; je ne puis le suivre sur ce terrain qu'après avoir examiné quelques défi-

nitions résultant de numéros précédents; j'emprunte mes citations à la traduction française du *Traité des Fluxions* de Maclaurin par le P. Pezenas, 1749.

J'y lis d'abord au nº 830, conservant la figure mentionnée par M. Rey :

« Supposant maintenant l'excès de af sur AF représenté par α. les excès respectifs de leur première, troisième, cinquième Fluxions, etc., par β, δ, ζ, etc., la fluxion de la base étant supposée $= 1$, » ce que j'interprète ainsi d'après notre langage actuel :

Supposant maintenant l'excès de af sur AF représenté par α, les différences des valeurs particulières que prennent les dérivés première, troisième, cinquième, etc., de l'ordonnée par rapport à l'abscisse, et correspondant aux mêmes valeurs de l'abscisse que les ordonnées af et AF, par β, δ, ζ, etc.

Cette interprétation est corroborée par ce que je lis au nº 833 :

« Car supposant $OP = x$, $PM = y$, soit FMf une parabole, ou une hyperbole, dont l'équation est $y = x^r$, $OA = m$, $Oa = n$, ... par conséquent $AF = m^r$, $af = n^r$, ... $af - AF = \alpha = n^r - m^r$; $\dot{y} = rx^{r-1}\dot{x}$ et supposant $\dot{x} = \ldots = 1$ la différence des Fluxions de af et AF est $rn^{r-1} - rm^{r-1} = \beta$; $\dddot{y} = r(r-1)(r-2)x^{r-3}\dot{x}$, et $\delta = r(r-1)(r-2)(n^{r-3} - m^{r-3}$. On calculera de même ζ, θ, etc. »

Ceci me paraît constituer une définition parfaitement claire des nombres que Maclaurin désigne par α, β, δ, ζ, θ. etc.

Je trouve encore dans le nº 833 un membre de phrase que je rapporte parce qu'il m'est utile pour établir ma proposition, le voici :

« .....; parce que lorsque $r = 1$ les fluxions de AF et af sont égales et $\beta = 0$, lorsque $r = 3$, $\delta = 0$, lorsque $r = 5$, $\zeta = 0$, etc. »

III. — Ceci posé je puis, de mon côté, entrer dans l'examen du nº 848, et j'y trouve en premier lieu :

« La base Aa étant divisée en un nombre de parties égales, représenté par n, soit l'aire $AFfa = Q$, la somme des ordonnées extrêmes $AF + af = A$, la somme de toutes les ordonnées $BE + CK +$ etc. $= B$, la base $Aa = R$, et que β, δ, ζ, etc., repré-

sentent les mêmes quantités que ci-devant; l'aire $AFfa = Q$
$= \left(\frac{A}{2n+2} + \frac{nB}{nn-1}\right)R - \frac{R^4\delta}{720nn} + \frac{R^6\zeta}{30240}\,\frac{nn+1}{n^4} - \text{etc.}$ »

Puis, plus bas, même numéro;

« Supposons $n = 2$, ou qu'il y a seulement trois ordonnées (auquel cas B marque celle du milieu) l'aire $AFfa =$
$\frac{A+4B}{6}R - \frac{R^4\delta}{4\times 720} + \frac{5\,R^6\zeta}{16\times 30240} - \text{etc.}$ Si on suppose $n = 3$, ou qu'il n'y a que quatre ordonnées, B représentera la somme de la seconde et de la troisième, l'aire $AFfa$
$= \frac{A+3B}{8}R - \frac{R^4\delta}{9\times 720} + \frac{R^6\zeta}{81\times 3024} - \text{etc.}$ En négligeant δ, ζ, θ, etc., on aura deux des théorèmes donnés par Newton et par d'autres, pour calculer l'aire par les ordonnées équidistantes, dont le dernier $\left(AFfa = \frac{A+3B}{8}R\right)$ est fort recommandé par M. Cotes. »

IV. — Comparant ceci avec ce que dit mon contradicteur je constate : 1° que la formule qu'il cite : $AFfa = \frac{A+4B}{6}R$
$- \frac{R^4\delta}{9\times 720} + \frac{R^6\zeta}{81\times 3024}$ etc., n'appartient pas à Maclaurin; mais est le résultat de la soudure que le critique a faite du premier terme de l'avant-dernière formule citée, et correspondant à $n = 2$, avec les termes suivant le premier dans la dernière correspondant à $n = 3$.

2° Que la définition qu'il donne des nombres δ, ζ, etc., à savoir : δ, ζ, *etc., sont ce que nous appelons actuellement les différences 3e, 5e de y par rapport à l'abscisse, pour* $y_1 = fa$, $y_0 = FA$ *(les abscisses sont comptées à partir du point* O), non seulement n'a pas la clarté de la définition donnée par Maclaurin et rapportée plus haut, mais n'a aucun rapport avec elle, et n'a aucun sens pour moi.

3° Que bien que Maclaurin n'ait pas fait spécialement l'application de sa formule au cas où y est une fonction entière et rationnelle d'x, dont le degré ne surpasse pas 3, son observation faite plus haut que si $r = 3$, $\delta = 0$, lui

permettait de conclure que dans ce cas et pour $n = 2$ sa formule se réduit à $AFfa = \frac{A + 4B}{6}R$, *exactement*, tandis que dans le cas général le théorème de Newton et autres qu'il reproduit en négligeant δ, ζ, etc., n'est qu'une formule d'approximation comme celle de Simpson aussi citée par M. Rey.

4° Qu'on peut aussi déduire de la formule de Maclaurin, pour le cas $n = 2$ et si l'ordonnée est une fonction rationnelle et entière du quatrième degré de l'abscisse, que l'aire $AFfa = \frac{A + 4B}{6}R - \frac{R^4\delta}{4 \times 720}$, *exactement* ($\zeta$, θ, étant nuls), et qu'en conséquence la formule que M. Rey propose de qualifier d'omniformule ne s'y applique pas, puisqu'elle diffère de la valeur vraie de $\frac{R^4\delta}{4 \times 720}$ qui n'est pas nulle en général, ce qui n'est peut-être pas propre à vulgariser la dénominaiion nouvelle.

V. — *Conclusion*. Je pense que du moment qu'une proposition particulière peut se déduire d'une proposition générale due à un auteur, par la substitution d'un système de nombres à un système d'un nombre égal de lettres représentant des nombres quelconques, dans certaines limites, cette proposition particulière peut être considérée comme due au même auteur.

Cette opinion peut m'être personnelle, mais elle me paraît au moins aussi fondée que la proposition de donner la dénomination d'omniformule à une formule qui ne s'applique qu'à un nombre limité de cas.

Recevez, je vous prie, Monsieur le Directeur, l'assurance de ma considération distinguée.

L. MALEYX.

Rien n'est plus difficile à résoudre, croyons-nous, que certaines questions de priorité il n'y a donc pas lieu d'être surpris qu'elles donnent naissance à des discussions. La paternité de la plus grande découverte mathématique (celle du calcul différentiel) a soulevé, comme l'on sait, entre Newton et Leibniz et leurs partisans réciproques, une querelle célèbre, à peine éteinte de nos jours. Cette difficulté inhé-

rente à la plupart des questions historiques ne constitue pas une raison suffisante pour les abandonner, bien au contraire, et l'intérêt qu'elles comportent veut qu'on s'efforce de jeter sur elles toute la lumière possible. Nous voulons même profiter de l'occasion présente pour dire à nos correspondants divers combien nous leur serons reconnaissant de toutes les indications bibliographiques, ou autres, qu'ils pourront nous communiquer sur une question soulevée dans ce journal.

A propos de l'article de M. C. Rey et de la lettre qu'on vient de lire, voici certains renseignements empruntés à une publication étrangère (*) et qu'on lira peut-être avec intérêt.

« C'est la formule (**), donnée par M. Baillairgé dans son *Traité de Géométrie* (Québec 1866), et propagée par lui avec un éclat et un succès qui lui ont attiré de grands éloges; on lui en a même attribué la paternité.

» Un peu avant cette époque, et depuis, M. Sergent, ingénieur français, était un ardent propagateur de cette formule; on la voit exposée dans son *Traité de Métrage*, dont nous avons sous les yeux la 4e édition. M. Édouard Lagôut, dans sa *Takimètrie*, ne pouvait manquer d'en tirer profit à son tour.

» Ce n'est que depuis peu que l'on trouve cette belle formule exposée dans les traités en vogue, et que l'on commence à se demander pourquoi il n'en est pas fait mention dans les programmes officiels de l'enseignement en France. On lui donne ordinairement le nom de *Formule prismoïdale;* l'auteur des articles publiés par le *Journal de Mathématiques Elémentaires* propose de la nommer *Omniformule des cubatures*.

» Quoi qu'il en soit, cette formule est déjà vieille : exposée et démontrée par Thomas Simpson en 1750, elle a été généralisée et améliorée par Charles Hutton en 1770, reprise et appliquée largement par Macneil en 1833, et par W.-H. Gillespie en 1847. Aujourd'hui on semble en comprendre mieux l'importance et la valeur; son admirable simplicité donne certainement lieu de désirer qu'elle soit adoptée même dans les programmes de l'enseignement élémentaire. » G. L.

(*) *Journal de l'Instruction publique*, Montréal (Canada); novembre 1886.

(**) Il s'agit de l'omniformule, bien entendu.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES (1886)

FACULTÉ DE DIJON

9 juillet. *Série unique.* — D'un point O, de l'arête d'un angle dièdre droit, pris pour centre, on décrit dans l'une des faces une circonférence de rayon r. Par un autre point de la même arête, situé à une distance d du point O, on mène dans la seconde face du dièdre une droite IA faisant avec l'arête un angle donné α.

Cela posé, on demande de trouver sur la circonférence O, le point M dont la distance à la droite IA est maxima.

8 novembre. *1re série.* — On ignore la valeur du paramètre K dont dépendent les coefficients de l'équation du second degré en x :

$$x^2 + (3K + 2)x + K^2 - 2K - 5 = 0,$$

mais on sait que l'une des racines de cette équation est le triple de l'autre; cela posé, on demande les valeurs de ces deux racines.

10 novembre. *2me série.* — Un cercle dont le plan est perpendiculaire sur la ligne de terre, étant donné par les projections de son centre et par la longueur de son rayon, on demande de construire les projections de ceux de ses points qui sont situés à une distance donnée d'un plan donné par ses traces.

12 novembre. *3me série.* — Calculer les trois côtés d'un triangle connaissant le rayon du cercle inscrit, un angle A et la hauteur issue du sommet de cet angle.

QUESTIONS PROPOSÉES

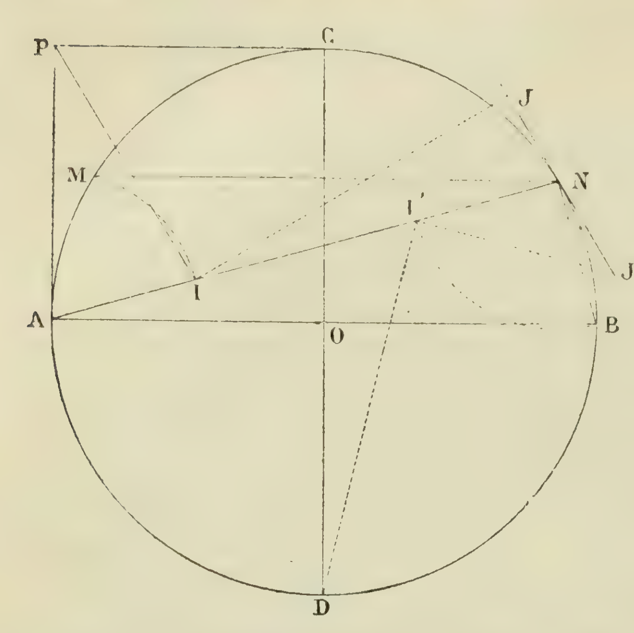
240. — La résultante de trois forces MA, MB, MC représentées par les distances d'un point quelconque M du plan d'un triangle aux trois sommets, est représentée par la droite qui joint M à son anticomplémentaire (*). *(J. Neuberg.)*

241. — Soient M et M′ deux points inverses par rapport au triangle ABC. La résultante de trois forces représentées par les perpendiculaires abaissées de M′ sur les côtés de ABC est perpendiculaire à la droite qui est harmoniquement associée à M. *(J. Neuberg.)*

(*) L'énoncé *seul* de cette question est nouveau. On peut faire une observation analogue pour le théorème qui suit.

Pour avoir l'anti-complémentaire de M, *il suffit de joindre* M *au centre de gravité de* ABC *et de prolonger cette droite d'une longueur double.*

242. — On considère un cercle O et deux diamètres rectangulaires AB, CD; les tangentes en C et A se coupent en P. Soit MN une corde quelconque parallèle à AB; on rabat AM en AI sur AN, et NB en NI′ sur NA; enfin, on joint IP et DI′. Démontrer que les perpendiculaires élevées: l'une à PI, au point I; l'autre à DI′, au point I′ rencontrent la tangente en N′ en deux points J et J′ symétriques par rapport à N. *(G. L.)*



N. B. On pourra résoudre cette question en observant que les points I, I′ décrivent des circonférences, quand MN se déplace parallèlement à AB et en appliquant le principe des transversales réciproques.

NOTE SUR LES QUESTIONS 131, 132 ET 238

On nous fait observer que ces deux questions proposées par M. E. Lemoine ont été traitées par lui dans ses « *Exercices divers de Mathématiques élémentaires* » (J. E. 1885. pp. 241-243. Exercice LII); nous les considérons donc comme résolue, et la note que nous avons placée à la fin du n° de décembre dernier ne les concerne pas.

Il ne sera pas inséré de solution pour la question 238. L'auteur de cette question nous annonce qu'elle a été déjà traitée; ainsi qu'il vient de l'apprendre.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 27204-6.

SIMPLIFICATION DU CALCUL ALGEBRIQUE

Par M. **M. Philippof.**

(*Suite*, voir p. 3).

3. Symboles cartésiens. — J'appelle symbole cartésien, un symbole composé des coefficients du polynôme (non homogène dans le cas général) à deux variables (ou *coordonnées*).

Exemples :

1)

	x		
y	A	B	C
	D	E	F
	G	H	I

Les lignes horizontales sont multipliées respectivement par y^2, y et 1 ; les colonnes verticales sont multipliées par x^2, x et 1.

2)

			u
	A	B	C
v	D	E	F

$= (A + Bu + Cu^2) + (D + Eu + Fu^2)v.$

3)

	x		u
y	A	B	C
	D	E	F
v	G	H	I

$=(Ax^2+Bxu+Cu^2)y^2+(Dx^2+Exu+Fu^2)yv$
$+(Gx^2+Hux+Iu^2)v^2$
(symbole homogène à quatre variables).

Je reprends l'exemple du paragraphe précédent et je me propose de multiplier

$$1 \quad \bar{1} \quad 1' \quad 1 \quad \bar{2}' \quad 1 \quad \bar{3} \qquad \text{par} \qquad 1 \quad \bar{4}' \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

en supposant que $1 \quad \bar{1} \quad 1 = a^2 - a + 1$, etc.

On verra aisément que le produit est une forme cartésienne :

				x
	$\bar{3}$	10	9	$\bar{4}$
	4	$\bar{4}$	$\bar{8}$	5
	$\bar{4}$	$\bar{2}$	4	$\bar{5}$
	1	1	$\bar{2}$	1
a	0	0	1	0

Remarque. — Les *colonnes obliques* d'une forme cartésienne sont des polynômes homogènes. Exemple :

$$\begin{array}{c|lll} & & & x \\ \hline & o & o & A \\ & o & B & \\ a & C & & \end{array} = Ax^2 + Bax + Ca^2.$$

4. Multiplication des symboles ayant les bases différentes. — Je me propose de multiplier $(abcd_x)$ par $(ABCD_y)$. Il est évident que le produit est égal à la forme cartésienne suivante :

$$\begin{array}{c|llll} & & & & x \\ \hline & aA & bA & cA & dA \\ & aB & bB & cB & dB \\ & aC & bC & cC & dC \\ y & aD & bD & cD & dD \end{array}$$

La loi de formation est la même que celle des formes rectangulaires, mais les colonnes obliques sont des polynômes homogènes irréductibles. Les formes rectangulaires ne sont que le cas particulier des formes cartésiennes. Il suffit de poser $y = x$ pour obtenir une forme rectangulaire.

5. Multiplication des formes cartésiennes. — S'il faut multiplier

$$\begin{array}{c|lll} & & & x \\ \hline & a & b & c \\ & d & e & f \\ y & g & h & i \end{array} \quad \text{par} \quad \begin{array}{c|ll} & & x \\ \hline & A & B \\ y & C & D \end{array}$$

j'écris $\begin{matrix} a & a \\ a & a \end{matrix}$ et j'ajoute les lettres $\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$. J'obtiens $\begin{matrix} aA & aB \\ aC & aD \end{matrix}$. J'écris de la même manière $\begin{matrix} bA & bB \\ bC & bD \end{matrix}$ et j'ajoute cette expression à la précédente en la plaçant à droite :

$$\begin{matrix} aA & aB & + & bA & bB \\ aC & aD & + & bC & bD \end{matrix}$$

J'écris $\begin{matrix} dA & dB \\ dC & dD \end{matrix}$ et j'ajoute cette expression à la forme $\begin{matrix} aA & aB \\ aC & aD \end{matrix}$ en la plaçant en bas $\begin{matrix} aC \\ + \\ dA \end{matrix}$ etc.

En procédant ainsi, j'obtiens finalement la forme suivante :

aA	aB bA	bB cA	cB
aC dA	aD bC dB eA	bD cC eB fA	cD fB
dC gA	dD eC gB hA	eD fC hB iA	fD iB
gC	gD hC	hD iC	iD

Cela veut dire que le produit de

$$a + bx + dy + cx^2 + exy + gy^2 + fx^2y + hxy^2 + ix^2y^2$$

par

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}y + \mathrm{D}xy$$

est égal à l'expression suivante :

$$a\mathrm{A} + (a\mathrm{B} + b\mathrm{A})x + (a\mathrm{C} + d\mathrm{A})y + (b\mathrm{B} + c\mathrm{A})x^2$$
$$+ (a\mathrm{D} + b\mathrm{C} + d\mathrm{B} + e\mathrm{A})xy + (d\mathrm{C} + g\mathrm{A})y^2 + \text{etc} \ldots + i\mathrm{D}x^3y^3.$$

6. Division. — Diviser

$$7x^3 + 23x^2y + 7xy^2 + 3y^3 \quad \text{par} \quad 7x^2 + 2xy + y^2.$$

Réponse :

$$\begin{array}{cccc|ccc}
7 & 23 & 7 & 3 & 7 & 2 & 1 \\
\cline{5-7}
 & \overline{2} & \overline{1} & & 1 & 3 & \\
\cline{1-4}
 & 21 & 6 & 3 & & & \\
 & & \overline{6} & \overline{3} & & & \\
\cline{1-4}
 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Résultat : $x + 3y$.

Remarque. — J'adopte la notation 0,1 pour $\frac{1}{x}$; 0,01 pour $\frac{1}{x^2}$, etc.

EXEMPLE : Diviser

$$2a^2 + 6a - 1 - \frac{5}{a} - \frac{3}{a^2} - \frac{6}{a^3} \quad \text{par} \quad a + 3 + \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2}.$$

Réponse : On divise

$$2 \ \ 6 \ \ \bar{1}, \quad \bar{5} \ \ \bar{3} \ \ \bar{6} \quad \text{par} \quad 1 \ \ 3, \quad 1 \ \ 2$$

ou

$$2 \ \ 6 \ \ \bar{1} \ \ \bar{5} \ \ \bar{3} \ \ \bar{6} \quad \text{par} \quad 1 \ \ 3 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 0$$

Résultat :

$$2 \ \ 0, \quad \bar{3} = 2a - \frac{3}{a}.$$

7. Division des symboles ayant les coefficients symboliques. — EXEMPLE : Diviser

$$(-3 + 4a - 4a^2 + a^3) + (10 - 4a - 2a^2 + a^3)x$$
$$+ (9 - 8a + 4a^2 - 2a^3 + a^4)x^2 + (-4 + 5a - 5a^2 + a^3)x^3$$

par

$$(-2 + a)x + (1 - a + a^2)x^2.$$

Réponse : On divise :

$$\begin{array}{l|l}
\bar{3}\ 4\ \bar{4}\ 1'\ 10\ \bar{4}\ \bar{2}\ 1'\ 9\ \bar{8}\ 4\ \bar{2}\ 1'\ \bar{4}\ 5\ \bar{5}\ 1 & \bar{3}\ 1'\ \bar{2}\ 1'\ 1\ \bar{1}\ 1 \\
\hline
3\ \bar{1} \qquad 2\ \bar{1} \qquad \bar{1}\ 1\ \bar{1} \qquad 4\ 4\ 4 & 1\ \bar{1}\ 1'\ 4\ 1 \\
\quad \bar{3}\ 1 \qquad \bar{2}\ 1 \qquad 1\ \bar{1}\ 1 \qquad \bar{1}\ 1\ \bar{1} & \\
\quad\quad 3\ \bar{1} \qquad 2\ \bar{1} \qquad \bar{1}\ 1\ \bar{1} \qquad\qquad 0 & \\
\quad\quad 0\ \ 12\ \bar{7}\ 1\ 0 \quad \bar{8}\ 4 & \\
\quad\quad \overline{12}\ 4 \qquad\quad 2\ \bar{1} & \\
\quad\quad\quad 3\ \bar{1} \qquad\quad\ \ 0 & \\
\quad\quad\quad\ \ 0 &
\end{array}$$

Résultat : $(1 - a + a^2) + (-4 + a)x$.

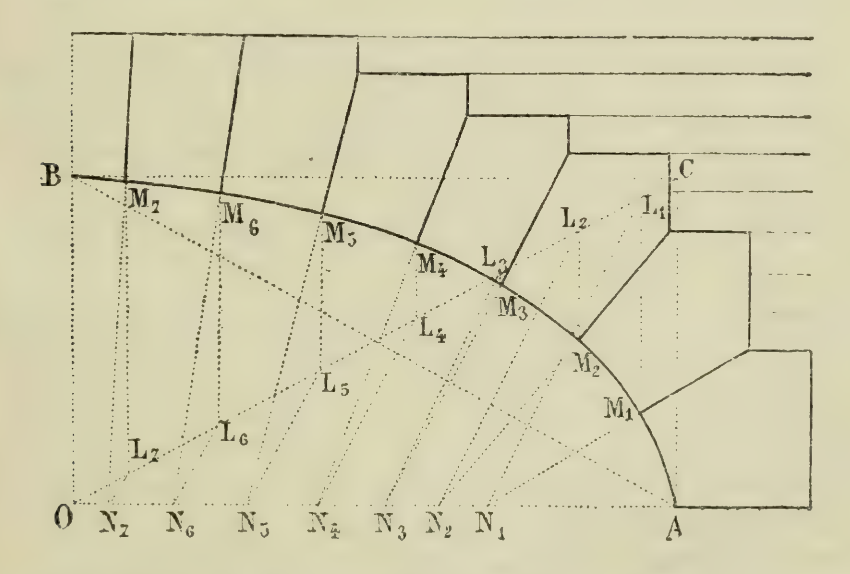
Le calcul est si simple que je crois inutile de l'expliquer. Il est préférable d'opérer avec des symboles croissants parce que dans ce cas toutes les réductions procèdent de gauche à droite.

(A suivre.)

MÉTHODE SIMPLE POUR LE TRACÉ DES JOINTS DANS LES VOUTES ELLIPTIQUES (*)

Par M. **Maurice d'Ocagne,** ingénieur des Ponts et Chaussées.

On ne peut se servir, pour le tracé des joints dans les voûtes elliptiques, surtout lorsqu'il s'agit des épures de grandes dimensions que les appareilleurs dressent sur les chantiers, d'une construction quelconque de la normale à l'ellipse. Une telle construction peut, pour ainsi dire, être variée à l'infini, mais elle doit remplir certaines conditions particulières pour avoir une *valeur pratique.* Elle doit d'abord être aussi simple que possible, ne comporter qu'une opération graphique réduite au minimum du travail nécessaire ;



elle doit ensuite tenir dans un espace aussi restreint que possible, exclure par son essence même les prolongements de tracé *au delà des limites de l'épure.* On reconnaîtra que le procédé suivant répond bien à ces caractères.

(*) La première partie de cette note est extraite des *Annales des ponts et chaussées* (septembre 1886, p. 403).

Soient M_1, M_2, M_3,... M_7 les points du quart d'ellipse AB par où il s'agit de tracer les joints, c'est-à-dire les normales à l'ellipse.

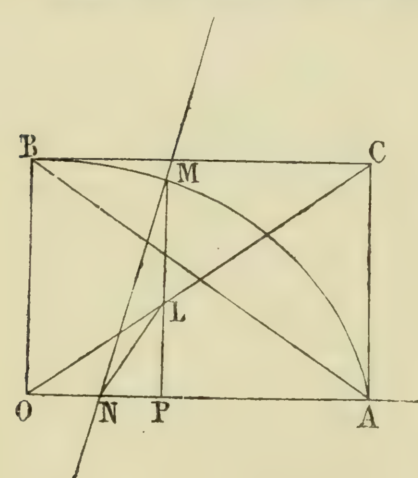
Les tangentes aux sommets A et B se coupant en C, tirons les droites AB et OC.

Les perpendiculaires à OA menées par les points M_1, M_2, M_3,... M_7 coupent la droite OC aux points L_1, L_2, L_3,... L_7.

Les perpendiculaires à AB menées par les points L_1, L_2, L_3,... L_7 coupent l'axe OA aux points N_1, N_2, N_3;... N_7. Les droites M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3,... M_7N_7 sont les normales cherchées.

La justification de ce procédé est des plus simples. Soit MN la normale à l'ellipse au point M. Du point N abaissons sur la droite AB la perpendiculaire NL, qui coupe l'ordonnée MP au point L.

On a, en vertu d'une propriété bien connue de l'ellipse



$$\frac{PN}{OP} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Les triangles PLN et OAB ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, on a aussi

$$\frac{PL}{PN} = \frac{a}{b}.$$

Multipliant ces égalités membre à membre ; il vient

$$\frac{PL}{OP} = \frac{b}{a},$$

égalité qui montre que le point L se trouve sur la droite OC, ce qu'il fallait démontrer.

Cette propriété est un cas particulier d'un théorème qui se trouve établi avec un certain nombre d'autres, dans notre *Étude géométrique sur l'ellipse* qui a paru dans la *Revue maritime et coloniale* (livraison d'octobre 1886).

On peut encore obtenir, très simplement, la normale à l'ellipse par l'application du théorème suivant qui n'est pas connu que je sache et qui constitue une jolie propriété de cette courbe.

Soit (*), *sur le cercle principal qui a pour diamètre le grand axe d'une ellipse,* M′ *le point correspondant au point* M *de cette ellipse. Si l'on porte, sur le rayon* OM′, *la longueur* M′N′ *égale au demi-petit axe de l'ellipse, la droite* MN *est la normale en* M *à cette ellipse.*

Ce théorème se rattache à un ensemble de propriétés de l'ellipse qui fera l'objet d'un de mes prochains Mémoires.

Il conduit au mode suivant de description de l'ellipse par points et normales :

Soient (M″), (M′) *et* (N) *trois cercles concentriques, de rayons respectifs* b, a *et* a + b. *Par le centre commun de ces cercles, menons deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy. *Un rayon pivotant autour du point* O *coupe ces cercles respectivement en* M″, M′ *et* N. *Soit* M *le point de rencontre des perpendiculaires menées à* Ox *par* M′ *et à* Oy *par* M″. *Le point* M *décrit l'ellipse qui a pour demi-axes* OA = a *et* OB = b, *et* MN *est normale à cette ellipse.*

DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE

Par M. **E. Catalan**, Professeur émérite à l'Université de Liège (**).

1. — Dans un des derniers numéros de la *Revue scientifique* (18 septembre), M. Delbœuf, le savant Professeur à l'Université de Liège, donne, sans démonstration, un curieux *théorème sur la divisibilité des nombres*, que l'on peut énoncer ainsi :

Soit un nombre entier N, *décomposé en deux parties* aa′, bb′ *telles que les facteurs* a, b *soient premiers entre eux, et que les facteurs* a′, b′ *soient, aussi, premiers entre eux.*

Soient, d'autre part, six nombres entiers, A, A′, B, B′, x, x', *satisfaisant aux conditions :*

$$Aa + Bb = Nx, \quad A'a' + B'b' = Nx'.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) Extrait de la *Revue Scientifique*, du 16 octobre 1886.

Cela posé, on a

$$AA' + BB' = \mathfrak{M}(N).$$

Des équations

$$aa' + bb' = N, \ Aa + Bb = Nx,$$

on déduit:

$$a(A - a'x) + b(B - b'x = o.$$

Donc

$$A = a'x + b\theta, \ B = b'x - a\theta; \qquad (1)$$

θ étant un entier quelconque, positif ou négatif.

De même,

$$A' = ax' + b'\theta', \ B' = bx' - a'\theta'. \qquad (2)$$

Par conséquent,

$$AA' + BB' = N(xx' + \theta\theta'). \qquad (3)$$

2. — Remarque. Si $N = f^2 + g^2$, prenons $x' = x$, $\theta' = \theta$. L'égalité (3) devient

$$AA' + BB' = (f^2 + g^2)(x^2 + \theta^2),$$

ou

$$AA' + BB' = (fx \pm g\theta)^2 + (f\theta \pm gx)^2. \qquad (4)$$

Ainsi, dans ce cas particulier, *la quantité* $AA' + BB'$, *multiple de* N, *est une somme de deux carrés.*

3. — *Exemple.* $N = 73$, $a = 3$, $b = 2$, $a' = 5$, $b' = 29$, $x = 7$.

On trouve:

$A = 21 + 29\theta$, $B = 14 - 5\theta$, $A = 35 + 2\theta$, $B = 203 - 3\theta$; puis

$$AA' + BB' = 73(7^2 + \theta^2) = (56 \pm 3\theta)^2 + (21 \mp 8\theta)^2.$$

LES CARRÉS MAGIQUES DE FERMAT

RESTAURÉS ET PUBLIÉS SUR DES DOCUMENTS ORIGINAUX ET INÉDITS

Par M. Ed. **Lucas.**

(*Suite et fin*, voir 2me série, 9me année, p. 176.)

L'addition d'équidifférences.

Reprenons la table d'addition de seize nombres; nous supposerons a, b, c, d, et p, q, r, s, rangés dans l'ordre croissant et de plus

$$b + p < a + q,$$

de telle sorte que ap et bp sont les deux plus petits nombres de la table.

Si l'on échange la première ligne des quartiers de droite avec la seconde ligne des quartiers de gauche, on obtient la table II *(fig. 44)*; mais pour que cette nouvelle figure représente une table d'addition il faut et il suffit que l'on ait les deux relations

$$a + d = b + c \quad \text{et} \quad p + s = r + q.$$

Si, dans la table II, on échange deux quartiers opposés; par exemple, le quartier supérieur de droite avec le quartier inférieur de gauche, on obtient une nouvelle table d'addition. D'ailleurs, il ne saurait exister plus de trois tables distinctes; on observera, en outre, que les nombres conjugués se trouvent toujours accouplés deux par deux, comme dans la première et que les nombres placés sur les deux diagonales sont les mêmes dans les trois tables.

Chacune des tables d'addition fournit un nombre égal de carrés à quartiers; on a ainsi

$$8 \times 432 = 3456$$

carrés qui correspondent aux carrés α, β, γ des tables de Frenicle.

On a, en résumé, les théorèmes suivants:

Si l'on forme avec deux équidifférences

$$\text{a. b : c. d} \quad \textit{et} \quad \text{p. q : r. s}$$

c'est-à-dire avec huit nombres différents, mais tels que

$$\text{a} + \text{d} = \text{b} + \text{c} \quad \textit{et} \quad \text{p} + \text{s} = \text{q} + \text{r},$$

trois tables d'addition; d'après les tables I, II, III, *on pourra former ensuite* 3,456 *carrés magiques à quartiers égaux.*

La somme des huit nombres placés dans les deux diagonales égale la somme des huit autres nombres.

Il en est de même de la somme des carrés et de la somme des cubes.

Les carrés δ des tables de Frénicle.

Si, dans le carré du type F *(fig. 40)*, on échange les nombres des cases intérieures des lignes extrêmes, on obtient le carré *(fig. 46)*; mais pour que ce nouveau carré soit magique, il faut et il suffit que la somme des boules ar et dq soit égale à

la somme des boules bp et cs, c'est-à-dire que l'on ait

$$a + d - (b + c) = p + s - (q + r).$$

Par conséquent, lorsque cette relation sera vérifiée, on déduira du type F et du type F′ deux nouveaux carrés, mais bien que ceux-ci conservent le type primitif, nous les désignerons par G et G′.

Dans le cas particulier de la table d'addition de deux équidifférences, la relation précédente se trouve vérifiée, puisque les deux membres sont nuls; dans ce cas, le nombre des carrés G et G′ est triplé, on a donc 384 G et 384 G′ qui correspondent à 96 carrés δ de Frénicle, que l'on doit multiplier par 8, à cause de la rotation et de la symétrie; dans le cas particulier de deux équidifférences, les deux carrés médians ont des sommes égales à la constante; ainsi cela a lieu pour les carrés formés (*fig.* 46) par bq, cp, bs, cr et aq, dp, as, dr.

Le lecteur trouvera la suite de ces recherches dans une note insérée à la fin de l'ouvrage de M. le général Frolow : *Recherches nouvelles sur les carrés magiques* (Paris, Gauthier-Villars).

VARIÉTÉS

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE (*)

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 9).

10. Le cordeau divisé. — Imaginons qu'une ficelle, d'une longueur arbitrairement choisie, ait été repliée douze fois sur elle-même; marquons par des nœuds les points de division et plaçons des signes de reconnaissance à la troisième et à la septième division. Nous aurons ainsi constitué le cordeau divisé.

Il nous reste à montrer quelques-unes de ses applications.

Si nous considérons l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

nous observons qu'elle admet une infinité de solutions entières; en particulier, elle est vérifiée par

$$x = 3, \qquad y = 4, \qquad z = 5.$$

Ces nombres correspondent à la solution la plus simple, et ils représentent les trois côtés d'un triangle rectangle. C'est pour ce motif que le cordeau AA′ a été divisé, comme nous l'avons dit, en trois parties $AB = 3$, $BC = 4$, $CA' = 5$.

Le point B, qui sépare les intervalles AB et BC, se désigne par la notation (3.4); de même, C s'appelle le point (4.5). Quand nous réunirons les extrémités A, A′ du cordeau, nous obtiendrons un troisième point; ce sera le point (3.5).

11. — Problème VI. *Avec le cordeau seul, élever une perpendiculaire en un point* O *d'une droite donnée* Δ.

Au point O, je place le point (3.4) du cordeau, et, à l'aide d'un piquet, je fixe également le point (4.5) sur Δ, en un certain point P. Ayant pris le point (3.5) par la réunion des extrémités du cordeau dans la même main, on s'avance jusqu'à ce que le cordeau soit bien tendu. A ce moment le point (3.5) est placé quelque part sur le terrain, en Q. Alors OQ est la perpendiculaire demandée.

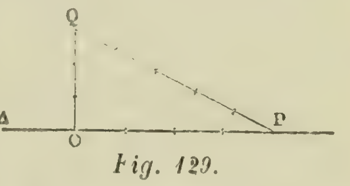


Fig. 129.

Remarque. I. — On observera que la construction précédente exige seulement que l'on puisse parcourir une partie de la droite donnée Δ; cette solution s'applique donc d'une façon particulièrement simple au problème dans lequel on se propose d'*élever une perpendiculaire á l'extrémité d'une droite qu'on ne peut prolonger*.

Remarque II. — On voit aussi comment, avec le cordeau, on peut *abaisser, d'un point donné* Q, *une perpendiculaire sur la droite* Δ.

Ayant fixé en Q le point (3.5) on chemine sur Δ jusqu'à ce qu'on ait trouvé sur cette droite un point P tel que PQ, repré-

sente le segment de longueur 5 dans le cordeau, rigoureusement tendu. Prenant alors le piquet qui est fixé au point (3.4) on chemine de nouveau sur Δ jusqu'à ce que l'on obtienne un cordeau bien tendu. Si O est le point auquel on s'arrête alors, QO est la perpendiculaire cherchée.

Problème (*). — *Avec le cordeau mener par un point donné* M *une parallèle à une droite* Δ.

Jalonnons une droite partant de M et coupant Δ en P; puis, avec le cordeau, ayant pris une longueur de corde égale à MP, plantons sur le prolongement de MP un jalon M′ de telle sorte que PM′ = MP.

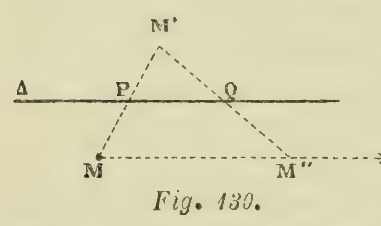


Fig. 130.

Cela fait, par M′ traçons un nouveau jalonnement M′QM″ et, comme tout à l'heure, fixons en M″ un jalon de telle sorte que QM″ = M′Q. Il ne reste plus qu'à jalonner MM″ pour avoir la parallèle demandée.

12. Problème VII. — *Avec le cordeau, tracer la bissectrice d'un angle donné.*

Soient Δ, Δ′ les droites données; sur Δ je fixe, arbitrairement, un jalon en A et je prends une longueur de corde égale à OA. En portant cette même longueur, à partir de O, jusqu'en A′, on pourra tendre une corde de A en A′; et en repliant cette dernière longueur de façon que l'extrémité A′ vienne en A, la nouvelle extrémité M fera connaître le milieu de AA′. Il ne reste plus qu'à jalonner OM.

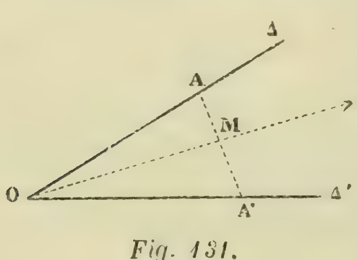


Fig. 131.

Remarque. — Si Δ et Δ′ représentent les traces sur le plan horizontal de deux murs verticaux, on voit que la méthode

(*) Ce problème, et plusieurs de ceux qui suivent ont été examinés dans une note intitulée *Sur les constructions dans le plan et dans l'espace, avec la droite seule*, par M. de Tilly, membre de l'Académie royale de Belgique *Mathésis*, 1886 ; p. 124.)

précédente donne très rapidement, et dans des conditions tout à fait pratiques la trace OM du plan bissecteur.

13. Examen du cas où le sommet de l'angle considéré est inaccessible. — On sait comment on résout ordinairement ce problème en coupant les droites données par une transversale quelconque et en s'appuyant sur ce fait que le centre du cercle inscrit au triangle ainsi formé, étant joint au centre d'un des cercles ex-inscrits, donne une droite passant par le sommet correspondant du triangle.

Mais cette construction, très simple en théorie, présente, au point de vue pratique, quelques longueurs qu'on peut éviter, comme nous allons le montrer.

Nous rappelons que si, sur deux droites Δ, Δ', on considère deux ponctuelles

$$A, B, C, \dots; \quad A', B', C' \dots,$$

telles que l'on ait

$$AB = A'B', \quad BB = B'C' \dots,$$

les milieux des droites AA′, BB′, CC′... qui joignent les points homologues des deux ponctuelles sont des points situés sur une droite (*) parallèle à la bissectrice des droites Δ, Δ'

(*) C'est cette droite que Chasles, dans un de ses mémoires (*Comptes rendus*, 3 décembre 1860) appelait *la droite milieu*. La proposition en question, proposition d'ailleurs bien connue et très évidente, fait l'objet du théorème III dans le mémoire cité, lequel a pour titre : *Propriétés relatives au déplacement fini quelconque dans l'espace d'une figure de forme invariable.*

Ce théorème que nous allons utiliser ici n'est qu'un corollaire d'une proposition plus générale et qui est relative à la parabole, enveloppe des droites qui joignent les points correspondants B, B′ de deux ponctuelles, telles que l'on ait

$$AB = K.A'B', \qquad BC = K.B'C' \dots$$

K désignant une constante.

Mais, pour les personnes auxquelles ces considérations ne seraient pas familières, voici comment on peut, en deux mots, démontrer le théorème présent.

Fig. 133.

Soient m et n les milieux des droites AA′, BB′; menons mp et nq parallèles à AB, puis mr parallèle à A′B′.

Nous avons

$$mp = \frac{OA}{2}, \quad nq = \frac{OB}{2},$$

ou pour être plus précis, à la bissectrice des semi-droites dont les directions sont celles des segments AB et A′B′.

Soient A et B deux points quelconques de Δ; à partir d'un point A′, arbitrairement choisi sur Δ′, prenons, avec le cordeau, A′B′ = AB; d'après le théorème que nous venons de rappeler, la droite δ qui joint les milieux M, N des droites AA′, BB′ est parallèle à la bissectrice cherchée. En abaissant de A une perpendiculaire sur δ et en jalonnant, par le point H milieu de AC, une parallèle à δ, on obtient une droite δ′ qui est la bissectrice demandée.

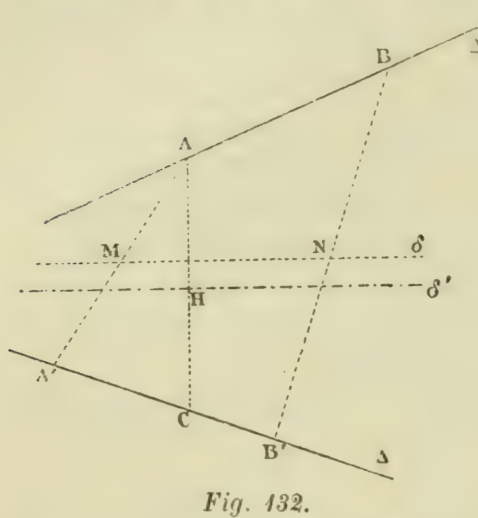


Fig. 132.

(A suivre.)

CONCOURS D'AGRÉGATION (1886)

PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Solution géométrique par M. Boudart, professeur au lycée d'Angoulême.

On donne un cercle et deux points P *et* Q *situés sur un de ses diamètres; on joint les points* P *et* Q *aux extrémités* A *et* B *d'un diamètre du cercle par les droites* PA *et* QB *qui se coupent au point* M. *On fait tourner le diamètre* AB *et l'on demande:*

---

et, par suite,

$$rn = \frac{OB - OA}{2} = \frac{AB}{2}.$$

De même, nous pouvons écrire

$$op = \frac{OA'}{2}, \quad oq = \frac{OB'}{2}$$

d'où

$$pq = mr = \frac{A'B'}{2}.$$

Ainsi le triangle mrn est isocèle, ce qui prouve bien que mn est parallèle à la bissectrice de l'angle des droites AB, A′B′.

1° D'étudier la variation du rapport $\frac{MA}{MB}$ *et de construire la figure lorsque ce rapport a une valeur donnée.*

2° D'étudier la variation de l'angle AMB *et de construire la figure lorsque cet angle a une valeur donnée.*

3° A' et B' étant les seconds points d'intersection des droites MA *et* MB *avec la circonférence du cercle donné, de trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* MA'B'.

1° Variations du rapport $\frac{MA}{MB}$.

Menons AQ' parallèle à MQ. OQ' = OQ.

Les triangles semblables donnent :

$$\frac{MA}{PA} = \frac{2a}{b-a}$$

$$\frac{MQ}{AQ'} = \frac{a+b}{b-a}$$

d'où

$$\frac{MQ + AQ'}{AQ'} = \frac{2b}{b-a}$$

et

$$\frac{MB}{AQ'} = \frac{2b}{b-a}$$

Par division, on obtient :

$$\frac{MA}{PA} \times \frac{AQ'}{MB} = \frac{2a}{b-a} \times \frac{b-a}{2b} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{MA}{MB} = \frac{a}{b} \times \frac{PA}{AQ'}.$$

nous pourons donc substituer le rapport $\frac{PA}{AQ'}$ au rapport $\frac{MA}{MB}$.

Si nous nous proposions de trouver sur le cercle CAO un point A tel que le rapport $\frac{AP}{AQ'}$ soit égal à un rapport donné, il faudrait construire le cercle lieu des potnts dont le rapport

des distances à deux points fixes est constant. Ce cercle est symétrique par rapport au diamètre CD. Il y a donc un point A et un seul situé sur l'arc CD tel que le rapport $\frac{AP}{A'Q}$ soit égal à un rapport donné. Il résulte de là que lorsque le point A se meut de C vers D sur la demi-circonférence CAD, le rapport va sans cesse en variant dans le même sens et, ici, en croissant.

Le rapport $\frac{AP}{AQ'}$ part de la valeur initiale $\frac{R-b}{R-a}$ et croît constamment jusqu'à la valeur finale $\frac{R+b}{R+a}$.

Lorsque le point A se meut de D vers C sur l'arc DBC, le rapport décroît constamment de la valeur $\frac{R+b}{R+a}$ à la valeur $\frac{R-b}{R-a}$.

Pour construire le point M qui correspond à un rapport donnéK; il suffit de construire un point A tel que $\frac{PA}{AQ'} = K \times \frac{b}{a}$, et pour cela, de construire le cercle lieu des points dont le rapport des distances aux deux points P et Q' est égal au rapport $\frac{b}{a} \times K$.

2° *Variations de l'angle* AMB.

Nous substituons à l'angle AMB l'angle PAQ'.

Proposons-nous de construire un point A tel que l'angle PAQ' soit égal à un angle donné.

Nous construisons sur PQ' un segment capable de cet angle PAQ'. Ce segment coupe en général le demi-cercle CAD en deux points A et A_1.

Si nous prenons un point E sur l'arc AA_1, l'angle PEQ' sera plus grand que l'angle PAQ'. Donc, tant que la circonférence menée par les deux points P et Q' ne sera pas tangente à la circonférence CAD, on pourra trouver sur l'arc CAD un point E qui correspondra à un angle supérieur.

On aura donc l'angle maximum en menant par les deux points P et Q' une circonférence tangente au cercle CAD.

On sait que le problème admet deux solutions. Dans le cas de la figure, les deux solutions, sont symétriques par rapport au diamètre CD et par conséquent donnent deux points symétriques par rapport au même diamètre.

Soit E le point de contact de cette circonférence avec la circonférence CAD.

Ce point correspond au maximum de l'angle.

L'angle croît donc de o à ce maximum PEQ' et décroît de cette dernière valeur à o.

En dessous du diamètre CD, l'angle croît de o à PE'Q' et décroît de cette valeur à o.

Pour construire le point correspondant à un angle donné on emploie la construction indiquée plus haut.

3° *Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* A'MB'.

Les triangles donnent les relations suivantes :

$$\overline{P\omega}^2 = \overline{M\omega}^2 + \overline{PM}^2 - 2PM \times \frac{MA'}{2},$$

$$\overline{Q\omega}^2 = \overline{M\omega}^2 + \overline{QM}^2 - 2QM \times \frac{B'M}{2}.$$

Retranchons :

$$\overline{Q\omega}^2 - \overline{P\omega}^2 = \overline{QM}^2 - \overline{PM}^2 - QM \times B'M + PM \times MA'.$$

$$\overline{Q\omega}^2 - \overline{P\omega}^2 = \overline{QM}^2 - \overline{PM}^2 - QM(QM - QB') + PM(PM + PA')$$

$$= QM \times QB' + PM \times PA'.$$

Les triangles semblables donnent :

$$\frac{PM}{PA} = \frac{a+b}{b-a}. \qquad \frac{QM}{QB} = \frac{a+b}{b-a}.$$

$$\overline{Q\omega}^2 - \overline{P\omega}^2 = \frac{a+b}{b-a}(QB' \times QB + PA \times PA').$$

$$PA \times PA' = CP \times PD = R^2 - b^2$$

$$QB \times QB' = \qquad R^2 - a^2.$$

$$\overline{Q\omega}^2 - \overline{P\omega}^2 = \frac{b+a}{b-a}(2R^2 - a^2 - b^2) = \text{const}^e.$$

Le problème revient donc à trouver le lieu des points

tels que la différence des carrés de leurs distances à deux points fixes soit égale à un carré donné. On sait que ce lieu est une droite perpendiculaire à la droite qui joint les deux points fixes.

Le lieu est donc ici une perpendiculaire au diamètre DC.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur aux Collège de Vire.

(*Suite*, voir p. 279.)

---

30. — Le cercle ex-inscrit r' partage par son point de contact, chacun des côtés a, b, c en deux segments soit additifs, soit soustractifs. Si L'_a, L'_b, L'_c désignent les longueurs des portions de tangente commune extérieure aux circonférences décrites avec les segments en question pour diamètres, adjacents aux angles A, B, C et comprenant ces angles et non leur supplément. Si L''_a, L''_b,... L'''_a... désignent des quantités analogues pour les segments déterminés par ces points de contact des deux autres cercles ex-inscrits, on a les relations

$$L'_aL'_bL'_c = \frac{S^2rr'}{abc},\ L''_aL''_bL''_c = \frac{S^2rr''}{abc},\ L'''_aL'''_bL''_c = \frac{S^2rr'''}{abc},\quad (1)$$

$$\frac{K_aK_bK_c}{r} = \frac{L'_aL'_bL'_c}{r'} = \frac{L''_aL''_bL''_c}{r''} = \frac{L''_aL''_bL''_c}{r'''} = \frac{S^2r}{abc} = \frac{Sr}{4R}.\quad (2)$$

On trouve, en effet, aisément :

$$L'_a = p\sin\frac{A}{2}\qquad L'_b = (p-c)\sin\frac{B}{2}\qquad L'_c = (p-b)\sin\frac{C}{2}$$

$$L''_a = (p-c)\sin\frac{A}{2}\qquad L''_b = p\sin\frac{B}{2}\qquad L''_c = (p-a)\sin\frac{C}{2}$$

$$L'''_a = (p-b)\sin\frac{A}{2}\qquad L'''_b = (p-a)\sin\frac{B}{2}\qquad L'''_c = p\sin\frac{C}{2}$$

d'où

$$L'_aL'_bL'_c = p(p-b)(p-c)\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{p(p-a)(p-b)^2(p-c)^2}{abc}$$

$$= \frac{S^4}{p(p-a)abc} = \frac{S^2rr'}{abc}.$$

On démontre de même les deux autres formules (1) ; et, de leur comparaison entre elles et avec celles de l'exercice précédent, on déduit la formule (2).

31. — Si par le point D de la hauteur AD d'un triangle ABC, on mène une droite FDE faisant avec BC l'angle x et coupant les autres côtés en F et E, de manière que les triangles ABC, AEF soient équivalents; qu'on fasse de même pour les pieds des deux autres hauteurs, y et z désignant des angles analogues à x. On a :

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = 0.$$

32. — On considère un angle $A = 60°$ et un cercle de rayon r inscrit dans cet angle. On mène au cercle une tangente quelconque BC qui forme avec les côtés de l'angle A un triangle ABC. H désignant l'orthocentre de ce triangle; démontrer que quel que soit le côté BC ; on a la relation :

$$BH + CH \pm AH = 2r$$

$\pm$ suivant que le cercle r est ex-inscrit ou inscrit dans ABC.

33. — Si sur les côtés BC, AC d'un triangle ABC on porte les longueurs $AD = AE$ égales à la moyenne géométrique des côtés b, c qui comprennent l'angle A ;

1° Les triangles ADE, ABC sont équivalents.

2° Si x_a désigne la longueur de bissectrice comprise entre A et la droite DE ; x_b, x_c désignant des quantités analogues pour des constructions semblables faites relativement aux autres angles ; on a entre ces quantités les relations :

$$x_a x_b x_c = Sp$$
$$x_a^2 + x_b^2 + x_c^2 = p^2$$

x_a, x_b, x_c sont les demi-petits axes des ellipses considérées précédemment (§ 13).

3° Si $2y_a$ désigne la longueur DE ; $2y_b$, $2y_c$ des longueurs analogues ; on a, entre ces quantités les relations :

$$y_a y_b y_c = Sr,$$

$$\frac{1}{y_a^2} + \frac{1}{y_b^2} + \frac{1}{y_c^2} = \frac{1}{r^2},$$

y_a, y_b, y_c sont les demi-axes non transverses des hyperboles qui font l'objet du même numéro.

4° La droite DE coupe le côté BC en A'; B', C' étant des points analogues; les droites : AA', BB', CC' concourent en un même point.

5° Ce point est le barycentre des sommets affectés des coefficients $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$.

6° Il est à lui-même son réciproque du premier ordre. (Système général de correspondance indiqué par M. de Longchamps.)

7° Il jouit de la propriété que la somme des inverses de ses distances aux trois côtés du triangle est minimum.

34. — Dans un système quelconque de numération, le double du dernier chiffre significatif, et le carré de ce chiffre s'écrivent avec les mêmes caractères en ordre inverse.

D'une manière générale b désignant la base d'un système et n un entier $< b$; les deux nombres

$$n(b-1) \quad \text{et} \quad (b-1)(b-n+1)$$

s'écrivent avec les mêmes chiffres en ordre inverse.

En effet

1° b étant la base, le dernier chiffre significatif est $b-1$;

$$2(b-1) \quad \text{s'écrit} \quad 1.((b-2));$$

$$(b-1)^2 = b^2 - 2b + 1 = b(b-2) + 1$$

et s'écrit

$$((b-2)).1.$$

2° D'une manière générale

$$n(b-1) = nb - n = (n-1)b + (b-n)$$

et s'écrit.

$$((n-1)).((b-n));$$

$$b-1)(b-n+1) = b(b-n) + n - 1,$$

ce qui s'écrit

$$((b-n)).((n-1)).$$

Les doubles parenthèses comprenant les chiffres employés.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Levat, ancien élève de l'Ecole Polytechnique.

Voici une petite propriété des nombres.

Pour avoir la somme des carrés des nombres de 1 à 10^n, on procède ainsi :

La somme des carrés des nombres de 1 à 10 est égale à 385.

Pour avoir celle des nombres de 1 à 10^2 : 1° on intercale un 3, entre le 3 et le 8; 2° un 3, entre le 8 et le 5; et 3° enfin, on ajoute un zéro à la suite du 5. Ainsi, l'on a

$$\Sigma^2(1 \text{ à } 10^2) = 338350.$$

La loi observée se continue indéfiniment

$$\Sigma^2(1 \text{ à } 10^3) = 333833500.$$

$$\Sigma^2(1 \text{ à } 10^n) = \overbrace{333\ldots}^{n}\ \overbrace{833\ldots}^{n-1}\ \overbrace{500\ldots}^{n-1}$$

C'est facile à démontrer à l'aide de la formule de la somme S_2 des carrés de n nombres

$$S_2 = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1)$$

J'avais déjà montré que pour avoir la somme des nombres de 1 à 10; de 1 à 100; ...; de 1 à 10^n; il faut prendre la moitié de 10^n et écrire les deux moitiés à la suite.

1 — 10	55
1 — 100	5050
1 — 1000	500500
. .....	....

BIBLIOGRAPHIE

Le troisième livre de *Géométrie à l'usage de l'enseignement moyen et de l'enseignement normal;* théorie des médianes antiparallèles. — Nouveau plan et nouvelles démonstrations par Clément Thiry, étudiant à la Faculté des Sciences de l'Université de Gand. — Gand, Ad. Hoste, éditeur; Paris, Gauthier-Villars, imprimeur, 1887. Prix 1 fr. 25 c. pour la Belgique, 1 fr. 50 c. pour l'Étranger.

Nous avons lu cet opuscule avec beaucoup d'intérêt parce qu'il est animé, d'un bout à l'autre, d'un réel esprit d'originalité. C'est ainsi, pour citer un point qui nous a plus particulièrement frappé, que tous les théorèmes relatifs au carré de la médiane, au carré d'un côté opposé à un angle droit, aigu ou obtus, ceux qui donnent la longueur de la bissectrice, etc., sont déduits du théorème de Stewart (*).

On sait que ce théorème correspond à l'énoncé suivant :

Trois points ABC *étant placés sur une droite, les distances d'un point quelconque* O *à ceux-ci vérifient la relation*

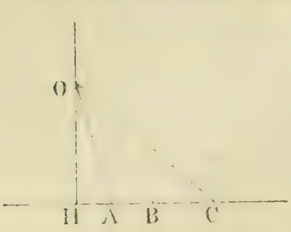
$$\overline{OA}^2.BC + \overline{OB}^2.CA + \overline{OC}^2.AB + AB.BC.CA = 0.$$

(*) Ce théorème célèbre a donné lieu à de nombreux travaux géométriques; voyez, à ce sujet, l'*Aperçu historique*, p. 175.

égalité dans laquelle on doit tenir compte de l'identité d'Euler

$$AB + BC + CA \equiv o.$$

Je crois pourtant que le théorème de Pythagore qui se démontre de tant de façons diverses, plus élégantes les unes que les autres, ne doit pas être considéré comme un corollaire du théorème de Stewart, et qu'il est préférable, pour établir celui-ci avec simplicité, de lui donner pour base, à l'inverse de ce que propose M. Thiry, le théorème de Pythagore.



Dans cet ordre d'idées, le théorème de Stewart est, comme l'on voit, en posant :

$$OH = h, \quad OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c,$$

la conséquence immédiate du théorème de Pythagore et de l'identité évidente :

$$(h^2+a^2)(c-b)+(h^2+b^2)(a-c)+(h^2+c^2)(b-a)+(c-b)(a-c)(b-a)\equiv o.$$

On pourrait aussi rattacher au théorème de Stewart la formule de Héron (*) qui donne l'aire du triangle.

La brochure que nous signalons à l'attention de nos lecteurs et qui n'est, probablement, qu'une première tentative vers un traité complet de géométrie élémentaire, se termine par l'exposé de quelques notions sur la symédiane et le point de Lemoine (le point de Grebe des Allemands). Nous avons vu, non sans plaisir, cette nouvelle géométrie, au développement et à la propagation de laquelle nous avons essayé de contribuer, venir, dans la brochure de M. Thiry, prendre place à côté de son aînée. N'y a-t-il pas lieu d'espérer d'ailleurs que certaines de ses propriétés seront bientôt enseignées et deviendront classiques? Nous y verrions plus d'un avantage.

Ainsi, dans les cours de mathématiques élémentaires qui préparent aux mathématiques spéciales et dont les élèves sont déjà, pour le plus grand nombre, bacheliers; quel inconvénient y aurait-il à introduire dans les matières de l'enseignement l'étude de la géométrie du triangle, par le système des coordonnées trilinéaires? Ces coordonnées, si précieuses pour un grand nombre de questions, sont à peine indiquées dans les cours de mathématiques spéciales. Elles ne sont pas dans les programmes, elles restent, par conséquent, ignorées et il n'y a pas lieu d'être surpris de cette indifférence, conséquence inévitable d'une logique qui date de loin. Mais nous croyons qu'il y a, au point signalé, dans l'enseignement de la géométrie analytique, une lacune regrettable; il serait utile et facile de la combler.

(*) C'est à Héron *l'Ancien* que remonte, d'après Chasles, le traité de géodésie intitulé la *Dioptre*, dans laquelle se trouve la formule

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

voyez (*Aperçu historique*, p. 43). Mais ce point historique (comme tant d'autres!) est controversé. On pourra consulter, à ce propos, le tome I de l'*Histoire des sciences mathématiques* de M. Maximilien Marie. « Je ne crois pas du tout, dit M. Marie (*loc. cit.*, p. 190) que le *Traité de la Dioptre* soit de Héron l'Ancien, et si l'on ne veut pas qu'il soit de Héron le Jeune, alors il faudra je pense chercher un troisième Héron. »

CERTIFICAT D'APTITUDE 1886

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

4 juillet. — Dans un trapèze isocèle BCDE, on donne la longueur d d'une diagonale BD, l'angle α qu'elle fait avec la base BC, et le périmètre $2p$. — 1° calculer la surface du trapèze, ses angles, ses côtés et le rayon du cercle circonscrit. — 2° Quelle relation doit exister entre les données pour que le trapèze soit circonscriptible ? Montrer comment les résultats trouvés précédemment se simplifient dans ce cas particulier. Prouver que la corde de contact MM′ passe par le point de concours des diagonales, et calculer sa longueur. — 3° Le trapèze étant circonscriptible, calculer la valeur de l'angle B pour que le triangle AED, soit équivalent aux 2/3 du triangle BIE.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

Quelles valeurs faut-il donner à la constante m, pour que le trinôme $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6$, reste positif, quel que soit x ?

BACCALAURÉAT

DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

ALGER

Mathématiques.

Novembre 1886. — I. On donne un triangle ABC. Une droite DE parallèle au côté BC, et située dans l'intérieur du triangle, partage sa surface de telle manière que la surface DEBC est moyenne proportionnelle entre la surface du triangle ABC et celle du triangle ADE. On demande : 1° de calculer DE en fonction de BC ; 2° d'exprimer en fonction de la hauteur AF et de BC, le volume engendré par la surface DEBC, tournant autour de BC.

II. Expliquer comment l'on mesure la hauteur d'une montagne ou d'un édifice dont le pied est inaccessible.

Application. — Pour mesurer la hauteur d'un édifice on a choisi une base de 6^m, telle que les angles adjacents à la base du triangle, formé par cette base et le sommet de l'édifice, sont égaux à $83°12'22''$. L'angle d'élévation du sommet vu d'une des extrémités de la base est $80°22'6''$. Calculer la hauteur de cet édifice.

ÉCOLE DE CLUNY

Concours de 1886. — Un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est donnée, $BC = a$, engendre en tournant successivement autour de chacun des côtés de l'angle droit, deux solides dont les volumes sont entre eux dans un rapport donné $\frac{m}{n}$. On demande de calculer :

1° Les deux côtés de l'angle droit, AB et AC ;

2° La hauteur AD et la bissectrice AI, issues du sommet A de l'angle droit ;

3° Les parties BD et DC, ainsi que les parties IB et IC déterminées sur l'hypothénuse par la hauteur AD et la bissectrice AI ;

4° Le rayon x qu'il faudrait donner à un cercle pour que l'aire de l'octogone régulier inscrit dans ce cercle soit équivalente à celle du triangle rectangle ABC ;

5° Le rayon y qu'il faudrait donner à une sphère pour que sa surface soit équivalente à la surface totale du solide engendré par la révolution du triangle ABC autour de l'hypothénuse BC comme charnière.

Application : $a = 1^m$; $\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$.

Nota. — Les calculs devront être donnés numériquement à un millimètre près.

QUESTIONS PROPOSEES

243. — On considère un triangle rectangle BAC et l'on prend sur l'hypoténuse BC un point quelconque M ; ayant abaissé sur BC une perpendiculaire AI on détermine sur celle-ci un point I tel que $\overline{AI}^2 = MC.MB$. La droite MI rencontre les côtés AC, AB en deux points P, Q. Démontrer que les points M, I sont isotomiques sur PQ ; en d'autres termes, les points M et I sont symétriques par rapport au milieu de PQ. *(G. L.)*

Erratum. — 1° Dans l'énoncé de la question 239, p. 288 :
au lieu de $a(y + z + yz) = a$,
lisez $x(y + z + xyz) = a$,
et ainsi des autres.

2° Page 17, ligne 5, *en remontant; au lieu de* C_3, *lisez* B_3.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 2370-7.

SIMPLIFICATION DU CALCUL ALGÉBRIQUE

Par M. **M. Philippof.**

(*Suite*, voir p. 25).

8. Substitution simple. — La substitution de $u + \delta$ au lieu de x, $z + \varepsilon$ au lieu de y sera nommée substitution simple.

Théorème (*). — *Si on désigne par* nm *le coefficient de* $x^n y^m$, *ou celui de* $u^n z^m$, *et si l'on emploie le* SIGNE, OU SYMBOLE OPÉRATIF, (nm) *pour désigner la fonction dérivée de l'ordre* n *par rapport à* δ *et de l'ordre* m *par rapport à* ε, *fonction multipliée par le facteur numérique*

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{1}{1.2\ldots m}=\frac{1}{n!m!}$$

le RÉSULTAT *de la substitution simple dans la fonction*

$$\begin{array}{c|c} & x \\ \hline y & U \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & & x & & \\ \hline & a & b & c & \ldots \\ & d & e & f & \ldots \\ & g & h & i & \ldots \\ y & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & & x & & \\ \hline & 00 & 10 & 20 & \ldots \\ & 01 & 11 & 21 & \ldots \\ & 02 & 12 & 22 & \ldots \\ y & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

s'obtiendra en appliquant à la fonction U *le symbole opératif*

$$\left(\begin{array}{cccc} 00 & 10 & 20 & \ldots \\ 01 & 11 & 21 & \ldots \\ 02 & 12 & 22 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right)$$

semblable à la fonction elle-même, après avoir changé les coordonnées x, y *respectivement en* u, z.

On peut énoncer ce théorème en écrivant :

$$\begin{array}{c|c} & u+\delta \\ \hline z+\varepsilon & U \end{array} = \begin{array}{c|c} & u \\ \hline z & U \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 00 & 10 & 20 & \ldots \\ 01 & 11 & 21 & \ldots \\ 02 & 12 & 22 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right)$$

(*) Ce théorème forme la base d'une nouvelle théorie des transformations linéaires.

9. Explication et démonstration. — Pour expliquer le sens du théorème précédent, je me propose de substituer $x + \delta$ pour x et $y + \varepsilon$ pour y dans la fonction

$$\begin{array}{r|l} - & \quad x \\ \cline{2-2} & a\ b\ c \\ & d\ e\ f \\ y & g\ h\ i \end{array} = \begin{array}{r|l} - & \quad x \\ \cline{2-2} & U \\ y & \end{array} .$$

On trouve au moyen d'une substitution immédiate ou au moyen de la série de Taylor :

$$\begin{array}{r|l} - & \quad x+\delta \\ \cline{2-2} & U \\ y & \end{array} = \begin{array}{r|l} - & \qquad\qquad x \\ \cline{2-2} & a\ b\ c \quad b\ 2c \quad c \\ & d\ e\ f \quad e\ 2f \quad f \\ y & g\ h\ i \quad h\ 2i \quad i\ (\delta) \end{array}$$

Ici $a\ b\ c = a + b\delta + c\delta^2$, etc

On pose

$$\begin{array}{r|l} - & \quad x+\delta \\ \cline{2-2} & U \\ y & \end{array} = \begin{array}{r|l} - & \quad x \\ \cline{2-2} & A\ B\ C \\ & D\ E\ F \\ y & G\ H\ I \end{array} = \begin{array}{r|l} - & \quad x \\ \cline{2-2} & U \\ y & \quad (\delta) \end{array}$$

Mais

$$\begin{array}{r|l} - & \quad x+\delta \\ \cline{2-2} & U \\ y+\varepsilon & \end{array} = \begin{array}{r|l} - & \quad x \\ \cline{2-2} & U \\ y+\varepsilon & \quad (\delta) \end{array} = \begin{array}{r|l} - & \qquad\qquad x \\ \cline{2-2} & \begin{pmatrix}A\\D\\G\end{pmatrix} \begin{pmatrix}B\\E\\H\end{pmatrix} \begin{pmatrix}C\\F\\I\end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix}D\\2G\end{pmatrix} \begin{pmatrix}E\\2H\end{pmatrix} \begin{pmatrix}F\\2I\end{pmatrix} \\ & \quad G \qquad H \qquad I \\ y & \qquad\qquad\qquad (\varepsilon) \end{array}$$

Ici on a

$$\begin{pmatrix}A\\D\\G\end{pmatrix} = A + D\varepsilon + G\varepsilon^2, \text{ etc.}$$

En substituant pour A, D, G, etc. leurs valeurs on obtient :

$$\begin{array}{c|c} & x+\delta \\ \hline & U \\ y+\varepsilon & \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & & & & x \\ \hline & \begin{array}{|ccc} \hline a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} & \begin{array}{|cc} \hline b & 2c \\ e & 2f \\ h & 2i \end{array} & \begin{array}{|c} \hline c \\ f \\ \end{array} & (\delta) \\ & \begin{array}{|ccc} \hline d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{array} & \begin{array}{|cc} \hline e & 2f \\ 2h & 4i \end{array} & \begin{array}{|c} \hline f \\ 2i \end{array} & \\ & \begin{array}{|ccc} \hline g & h & i \end{array} & \begin{array}{|cc} \hline h & 2i \end{array} & \begin{array}{|c} \hline i \end{array} & \\ y & (\varepsilon) & & & \end{array}$$

Mais

$$A_1 = \begin{array}{c|c} & (\delta) \\ \hline & \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \\ (\varepsilon) & \end{array}$$

est une forme cartésienne ayant les coordonnées δ, ε, etc. On remarque que A_1 est égal à la fonction initiale prise par rapport aux variables δ, ε ; c'est donc la fonction U à laquelle on a appliqué le symbole opératif (00). Le coefficient

$$\begin{array}{c|c} & (\delta) \\ \hline & \begin{array}{cc} b & 2c \\ e & 2f \\ h & 2i \end{array} \\ (\varepsilon) & \end{array}$$

est le résultat de l'opération (10), etc. On a donc

$$\begin{array}{c|c} & x+\delta \\ \hline & U \\ y+\varepsilon & \end{array} = \begin{array}{c|c} & x+\delta \\ \hline & \begin{array}{ccc} 00 & 10 & 20 \\ 01 & 11 & 21 \\ 02 & 12 & 22 \end{array} \\ y+\varepsilon & \end{array} = \begin{array}{c|c} & x \\ \hline & U \\ y & \end{array} \begin{pmatrix} 00 & 10 & 20 \\ 01 & 11 & 21 \\ 02 & 12 & 22 \end{pmatrix}$$

et le théorème général est vérifié dans ce cas.

Pour prouver le cas général, il faut appliquer la série de Taylor à la fonction :

$$\begin{array}{c|l} & \quad u+\delta \\ \hline & a \ b \ c \ \ldots \\ & d \ e \ f \ \ldots \\ & g \ h \ i \ \ldots \\ z+\varepsilon & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Le théorème de Taylor donne :

$$\varphi(u+\delta) = \varphi(\delta+u) = \varphi(\delta) + \frac{\varphi'(\delta)}{1} u + \ldots$$

ou, si l'on pose

$$(n) = \frac{\varphi^{(n)}(\delta)}{1.2.3\ldots n},$$

on obtient

$$\varphi(u+\delta) = (0)\,(1)\,(2)\,\ldots$$

Mais on peut poser

$$\begin{array}{c|l} & \quad x \\ \hline & \mathrm{U} \\ y & \end{array} = \begin{array}{c|l} & \quad x \\ \hline & \mathrm{Y}_0 \\ & \mathrm{Y}_1 \\ & \mathrm{Y}_2 \\ y & \ldots\ldots \end{array}$$

(En écrivant $\mathrm{Y}_0 = a\ b\ c\ \ldots$, $\mathrm{Y}_1 = d\ e\ f\ \ldots$, etc.) En posant encore

$$\frac{\varphi^{(n)}(\delta)}{n!} = \varphi^{(\delta)_n}$$

on obtient

$$\begin{array}{c|l} & \quad u+\delta \\ \hline & \mathrm{U} \\ y & \end{array} = \begin{array}{c|l} & \qquad\qquad u \\ \hline & \mathrm{Y}_0{}^{(\delta)_0}\ \mathrm{Y}_0{}^{(\delta)_1}\ \mathrm{Y}_0{}^{(\delta)_2}\ \ldots \\ & \mathrm{Y}_1{}^{(\delta)_0}\ \mathrm{Y}_1{}^{(\delta)_1}\ \mathrm{Y}_1{}^{(\delta)_2}\ \ldots \\ & \mathrm{Y}_2{}^{(\delta)_0}\ \mathrm{Y}_2{}^{(\delta)_1}\ \mathrm{Y}_2{}^{(\delta)_2}\ \ldots \\ y & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} = \begin{array}{c|l} & \qquad u \\ \hline & \mathrm{X}_0\ \mathrm{X}_1 \ldots \\ y & \end{array} = \mathrm{V}.$$

En substituant (dans V) $z+\varepsilon$ pour y et en substituant les valeurs de X_0, etc., on a :

$$\begin{array}{c|c} & u+\delta \\ \hline & U \\ z+\varepsilon & \end{array} = \begin{array}{c|l} & u \\ \hline & X_0^{(\varepsilon)_0}\ X_1^{(\varepsilon)_0} \ldots \\ & X_0^{(\varepsilon)_1}\ X^{1(\varepsilon)_1} \ldots \\ z & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$= \begin{array}{c|l} & x=u \\ \hline & \begin{pmatrix} Y_0^{(\delta)_0} \\ Y_1^{(\delta)_0} \\ \ldots \end{pmatrix}^{(\varepsilon)_0} \begin{pmatrix} Y_0^{(\delta)_1} \\ Y_1^{(\delta)_1} \\ \ldots \end{pmatrix}^{(\varepsilon)_0} \ldots \\ & \begin{pmatrix} Y_0^{(\delta)_0} \\ Y_1^{(\delta)_0} \\ \ldots \end{pmatrix}^{(\varepsilon)_1} \begin{pmatrix} Y_0^{(\delta)_1} \\ Y_1^{(\delta)_1} \\ \ldots \end{pmatrix}^{(\varepsilon)_1} \ldots \\ y=v & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Mais, en rejetant toutes les lettres et en ne laissant que les indices des puissances de u, z, et des fonctions dérivées prises par rapport à δ, ε on aura :

$$\begin{array}{c|l} & x=u \\ \hline & 00\ 10\ 20 \ldots \\ & 01\ 11\ 21 \ldots \\ & 02\ 12\ 22 \ldots \\ y=z & \ldots\ldots\ldots \end{array} = \begin{array}{c|c} & x=u \\ \hline & U \\ y=z & \end{array} \begin{pmatrix} 00 & 10 & 20 & \ldots \\ 01 & 11 & 21 & \ldots \\ 02 & 12 & 22 & \ldots \\ \ldots & & & \end{pmatrix}$$

Quod erat demonstrandum.

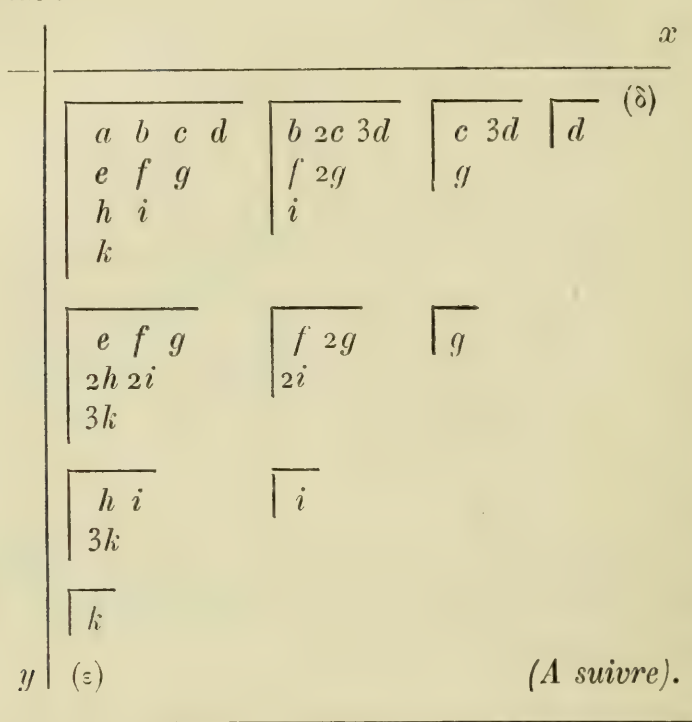
EXEMPLE : *Trouver le résultat de la substitution* x + δ *pour* x, y + ε *pour* y *dans la forme cubique :*

$$\begin{array}{c|l} & \mathrm{x} \\ \hline & a\ b\ c\ d \\ & e\ f\ g \\ & h\ i \\ \mathrm{y} & k \end{array}$$

Réponse : On applique le symbole opératif

$$\begin{pmatrix} 00 & 10 & 20 & 30 \\ 01 & 11 & 21 & \\ 02 & 12 & & \\ 03 & & & \end{pmatrix}$$

Résultat :



(A suivre).

VARIÉTÉS

ESSAI
SUR LA
GEOMETRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE (*)

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 9).

14. Ajuster un jalon entre deux jalons donnés. — Parmi les problèmes qui rentrent dans les premières applications de l'arpentage, il en est un que nous voulons traiter en terminant ce chapitre ; c'est celui qui a pour objet de placer un jalon C, en ligne droite avec deux autres jalons A, B, *sur le segment* AB.

Dans la pratique on opère par tâtonnements et de la manière suivante. On fixe, dans le voisinage de la droite AB, un jalon C′; puis on dispose deux jalons C″ et C‴, l'un sur C′A, l'autre sur C′B ; opération possible au moyen de deux visées successives. Si les jalons C′, C″, C‴ sont sur une même ligne de visée, c'est que le point C′ a été bien déterminé, tout d'abord. Sinon, on constate que le point C′ doit être rapproché de AB, vers la droite, ou vers la gauche, de l'observateur. De là, quelques tâtonnements, mais qui aboutissent rapidement.

La difficulté du problème qui nous occupe tient à ce que l'on suppose les extrémités A et B inaccessibles; s'il n'en est pas ainsi, si l'on peut notamment opérer sur le terrain où pénètre le prolongement de AB, toute difficulté disparaît. En effet, on peut toujours par une ligne de visée, fixer le jalon K sur le prolongement de AB; puis ce jalon étant fixé, l'observateur revenant se placer entre A et B pourra, par une nouvelle visée, ajuster un jalon K', en ligne droite avec les jalons B et K. Mais, si nous supposons que AB ne puisse être prolongée, ni dans un sens, ni dans l'autre, alors (au point de vue théorique, tout au moins) la petite difficulté signalée existe, et voici comment on peut la tourner (*).

Fig. 134.

Une première solution se présente immédiatement à l'esprit: elle consiste à jalonner par les extrémités A et B de la

(*) « Les personnes qui ne sont pas habituées à opérer sur le terrain dit Bergery (*loc. cit.* p. 105) trouveront peut-être quelque difficulté à planter un jalon dans un alignement dont les extrémités sont inaccessibles. » Bergery décrit alors un procédé par tâtonnements qui permet de résoudre pratiquement cette opération pour laquelle il n'indique pas d'ailleurs de solution théorique. La vérité est que les personnes qui se livrent aux opérations d'arpentage, étant habituées à ces difficultés, les résolvent instantanément par l'habileté personnelle qu'elles ont acquise; sans avoir recours à la méthode pratique de Bergery, ou à toute autre. Encore bien moins feront-elles usage des solutions rigoureuses que nous indiquons ici, lesquelles ne trouveraient une application réelle que dans le cas où l'on voudrait obtenir plus d'exactitude ou dans celui où l'on doit considérer des grandes distances.

droite donnée, et, bien entendu, dans la partie accessible, des alignements deux à deux parallèles. On obtient ainsi un parallélogramme ABmn dont la seconde diagonale mn passe par le milieu de AB. En répétant une seconde fois cette construction, on obtiendra donc deux droites mn, $m'n'$ passant, l'une et l'autre, par le milieu de AB. Le point de croisement C des deux diagonales ainsi tracées se trouve nettement déterminé ; en ce point C, on pourra donc placer un jalon qui sera situé sur la droite AB, au milieu de ce segment.

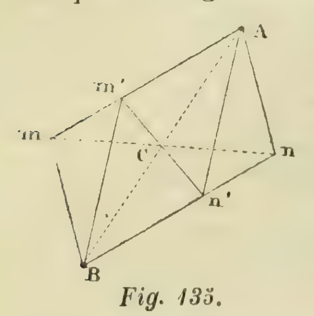


Fig. 135.

Voici une seconde solution. Elle exige, il est vrai, plus d'alignements, mais elle ne nécessite pas le tracé de parallèles, opération toujours délicate ; de plus, au lieu d'indiquer la position du troisième jalon, justement au milieu de AB, particularité qui peut offrir quelques inconvénients, elle permet de placer ce jalon en un point quelconque du segment AB. Elle prend pour base le théorème de Pappus (*Première partie*, § 19).

Supposons que l'on veuille fixer un jalon sur le segment AB. On choisira arbitrairement deux points m et n qui constituent, avec A et B, le quadrilatère auquel on se propose d'appliquer le théorème que nous venons de rappeler. Ayant alors tracé les alignements qu'indique la figure, on obtient deux points O, O'; et la droite AA' coupe mn en un point C qui est rigoureusement en ligne droite avec les points A et B.

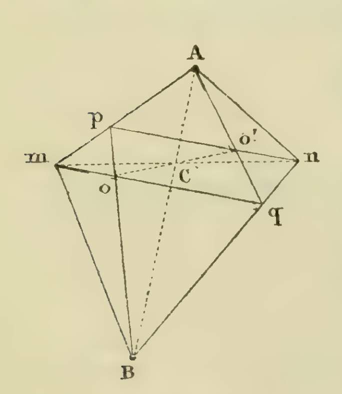


Fig. 136.

Mais voici, au sujet de ce problème, un cas particulier présentant plus d'intérêt, parce qu'il se rencontre dans la pratique de l'arpentage et qu'il ne peut être résolu par la méthode des tâtonnements. Il peut arriver que certains accidents de terrain : arbres, maisons, talus, etc., cachent à l'opérateur, dans la partie du terrain où il doit fixer le troisième jalon, les points A et B, extrémités de l'alignement considéré.

Nous allons examiner ce cas particulier.

15. — Ajuster un jalon entre deux jalons donnés inaccessibles et invisibles pour certaines parties du terrain. — Soient A et B les deux points qui sont visibles dans les parties du terrain voisines de P et de Q, mais non dans celle qui environne le point O, point inconnu et où doit être planté un jalon en ligne droite avec A et B.

Traçons RS parallèlement à PQ. Nous avons

$$\frac{OM}{ON} = \frac{IR}{IS} = \frac{OP}{OQ}.$$

Le problème se trouve ainsi ramené au suivant:

Étant donnée *(fig. 137)* une ponctuelle (P, Q; M, N), déterminer sur cette ponctuelle, un point O qui partage les segments PQ et MN, dans le même rapport.

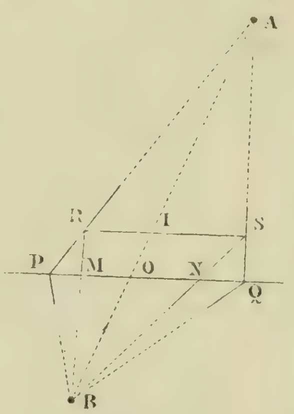


Fig. 137.

Pour résoudre cette dernière question, menons par les points M, N deux alignements parallèles et, avec le cordeau, prenons MP′ = MP et NQ′ = NQ; le point O, déterminé comme l'indique la figure 138 est le point cherché.

Au problème qui vient de nous occuper, correspondent, sans sortir des limites de la Géométrie de la Règle, de nombreuses solutions; celle que nous venons d'exposer, et à laquelle nous nous tiendrons, est la plus simple, parmi celles que nous avons imaginées. On observera peut-être qu'elle est encore assez compliquée; mais il faut reconnaître que la question qui vient de nous occuper offre une certaine difficulté relative, elle ne semble pas comporter, si nous ne nous trompons, de solution sensiblement plus simple, que celle que nous venons d'exposer.

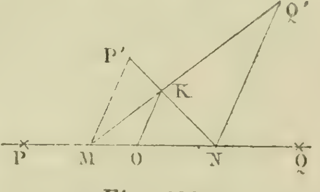


Fig. 138.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. l'abbé E. GELIN, *professeur au collège de Huy (Belgique).*

La *Méthode des coefficients détachés*, (*) que vous signalez comme employée par M. Carr, dans sa *Synopsis*, London 1880, est aussi employée par M. McLellan, dans son ouvrage *the teacher's hand-book of Algebra*, Toronto, 1879 :

1° Pour le calcul des valeurs numériques d'un polynôme entier en x (p. 6), ou pour celui du reste de la division d'un polynôme, entier en x par $x - a$ (p. 39). Exemple : valeur numérique du polynome $2x^4 + 12x^3 + 6x^2 + 10$, pour $x = -5$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & +12 & +6 & -12 & +10 \\ -5 & & -10 & -10 & +20 & -40 \\ \hline & 2 & +2 & -4 & +8 & -30 \end{array}$$

2° Pour la multiplication (p. 22). Exemple : multiplier $3x^4 - 2x^3 - 2x + 3$ par $x^2 + 3x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 1 & 3 & -2 & +0 & -2 & +3 & & \\ +3 & & +9 & -6 & +0 & -6 & +9 & \\ -2 & & & -6 & +4 & -0 & +4 & -6 \\ \hline & 3x^6 & +7x^5 & -12x^4 & +2x^3 & -3x^2 & +13x & -6 \end{array}$$

3° Pour la division (p. 26). Exemple : diviser $3x^6 + 7x^5 - 12x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 13x - 6$ par $x^2 + 3x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 3 & +7 & -12 & +2 & -3 & +13 & -6 \\ -3 & & -9 & +6 & -0 & +6 & -9 & \\ +2 & & & +6 & -4 & +0 & -4 & +6 \\ \hline & 3x^4 & -2x^3 & +0 & -2x & +3 & & \end{array}$$

4° Pour la résolution des systèmes d'équations du premier

(*) M. Philippof, comme il nous l'a écrit, ne s'attribue nullement l'invention de cette notation dont le germe, comme il nous le fait observer avec raison, se trouve déjà dans le triangle arithmétique de Pascal (V. la lettre de M. Laisant ; *Journal*, 1886, p. 238). Elle a d'ailleurs été explicitement employée par Gauss dans ses recherches sur les formes quadratiques et, depuis, par M. Cayley. C'est dans l'introduction des formes rectangulaires et cartésiennes qu'il faut voir l'idee, peut-être neuve, de M. Philippof. G. L.

degré à plusieurs inconnues (p. 178). Exemple : résoudre le système

$$\begin{aligned} u + v + x + y + z &= 15,\\ u + 2v + 4x + 8y + 16z &= 57,\\ u + 3v + 9x + 27y + 81z &= 179,\\ u + 4v + 16x + 64y + 256z &= 453,\\ u + 5v + 25x + 125y + 625z &= 975. \end{aligned}$$

	u	v	x	y	z		
	1	1	1	1	1 =	15	(1)
	1	2	4	8	16 =	57	(2)
	1	3	9	27	81 =	179	(3)
	1	4	16	64	256 =	453	(4)
	1	5	25	125	625 =	975	(5)
(2) − (1)		1	3	7	15 =	42	(6)
(3) − (2)		1	5	19	65 =	122	(7)
(4) − (3)		1	7	37	175 =	274	(8)
(5) − (4)		1	9	61	369 =	522	(9)
(7) − (6)			2	12	50 =	80	(10)
(8) − (7)			2	18	110 =	152	(11)
(9) − (8)			2	24	194 =	248	(12)
(11) − (10)				6	60 =	72	(13)
(12) − (11)				6	84 =	96	(14)
(14) − (13)					24 =	24	(15)
(15) : 24					1	1	(16)
$\frac{1}{6}\{(13) - 60(16)\}$				1		2	(17)
$\frac{1}{2}[(10) - \{12(17) + 50(16)\}]$			1			3	(18)
$(6) - \{3(18) + 7(17) + 15(16)\}$		1				4	(19)
$(1) - \{(19) + (18) + (17) + (16)\}$	1					5	(20)

Réduite aux applications qui précèdent, la méthode des coefficients détachés me semble pouvoir être introduite dans l'enseignement élémentaire.

Je ne trouve aucune indication de cette méthode dans les traités d'algèbre de *Wood* et de *Todhunter*, qui sont classiques en Angleterre, ni dans celui de *Robinson*, qui est employé aux États-Unis.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

SESSION DE JUILLET ET NOVEMBRE 1886.

FACULTÉ DE DIJON

Mathématiques.

29 juillet. — 1° Établir la formule des annuités;

2° On place 15.000 francs à 4 0/0; on prélève 1000 francs à la fin de chaque année. Combien restera-t-il au bout de 15 ans?

2 août. — On verse 750gr de mercure dans un vase ayant la forme d'un tronc de cône. A quelle hauteur s'élèvera-t-il sachant que le diamètre de la petite base qui forme le fond du vase a 5cm de diamètre et que l'arête de ce tronc fait avec la verticale un angle de 30°.

On prendra 13,6 pour la densité du mercure.

15 novembre. — 1° Volume du segment sphérique.

2° Un vase ayant la forme d'une portion de sphère de 1 décimètre de rayon contient de l'eau qui s'élève à 3cm. On y plonge complètement un certain corps et le niveau s'élève de 1cm. Trouver le volume du corps plongé.

SESSION DE NOVEMBRE 1886.

FACULTÉ DE POITIERS (*)

— Soient un demi-cercle ACB, un point C sur ce demi-cercle, et un point K sur le diamètre AB. On demande :

1° De prouver que les volumes engendrés par les segments AMC, BNC tournant autour de AB sont entre eux comme les carrés des surfaces des zônes correspondantes; 2° de déterminer par une construction géométrique le point C de manière que le rapport des volumes précédents soit égal à $\frac{AK}{BK}$.

— Équilibre de la poulie mobile dans le cas particulier où les deux cordons sont parallèles. Démontrer que si la poulie a un mouvement uniforme, le travail de la puissance est égale au travail de la résistance.

FACULTÉ DE BORDEAUX

— On donne un point A sur une droite MN et un point B extérieur. 1° Construire la circonférence passant par B et tangente en A à la droite MN. 2° Calculer le rayon de cette circonférence en fonction des

(*) Énoncés communiqués par M. Monsallut, professeur au collège de Saint-Jean-d'Angely.

longueurs $AC = a$, $BC = b$ (C étant le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur MN). 3° Trouver le lieu du centre du cercle lorsque le point A se déplace sur la droite. En déduire une nouvelle construction.

— Étant donné un rectangle ABCD dont les côtés sont a et b, par les sommets A et C on mène des parallèles faisant avec AB un angle α. Par les points B et D, on mène des perpendiculaires à ces deux parallèles. On demande de trouver la surface du quadrilatère obtenu.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

SESSION DE JUILLET 1886

FACULTÉ DE LILLE (*)

Amiens.

1re et 2me séries. — Calculer les rayons des deux bases d'un tronc de cône, connaissant l'arête a du tronc de cône, sachant que cette arête fait un angle de 60° avec le plan de la base inférieure, et que la surface totale du tronc est égale à celle d'une sphère ayant pour diamètre l'arête a.

Trouver le centre de gravité d'une pyramide triangulaire.

Lille.

1re série. — I. Un observateur se déplace le long d'une droite CM en regardant constamment une même partie AB d'une droite CB perpendiculaire à CM, partie dont les deux extrémités A, B sont à deux distances $CA = a = 1^m$, et $CB = b = 4^m$ de la première droite CM. On demande en degrés et minutes le maximum de l'angle AMB sous lequel est vue la droite en question AB.

II. Qu'entend-on par révolution synodique et par révolution sidérale de la Lune? Durée de la première et manière de l'obtenir par l'observation. En déduire la deuxième par le calcul.

2me série. — I. Supposons que l'on connaisse la mesure du volume d'un parallélipipède et que l'on n'ait encore rien démontré relativement au volume d'un prisme, établir la mesure du volume d'un prisme triangulaire.

II. Une barre pesante homogène AB, mobile autour de son extrémité A qui est fixe, est tenue en équilibre dans la position horizontale au moyen d'une force F appliquée à l'extrémité B et dirigée vers un point C de la verticale Az. Trouver la grandeur de la force F et la pression que supporte le point A. On donne $AB = a$, $AC = b$ et le poids P de la barre.

3me série. — I. Les trois hauteurs d'un triangle sont 5^m, 6^m et 7^m. Quelle est la surface de ce triangle?

(*) Énoncés communiqués par M. L. Richard, professeur à Condé-s-Escaut.

II. Une balle sphérique du poids de 30^{gr} est tirée de bas en haut, avec une vitesse initiale de 50^{m}, dans une masse spongieuse qui oppose à son mouvement une résistance constante de 200^{gr}. Jusqu'à quelle hauteur s'y élèvera-t-elle? (On prendra $g = 9,809$).

I. Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan défini par deux droites qui se coupent, lorsque les traces de ces droites ne sont pas dans les limites de l'épure. Faire l'épure et l'expliquer.

II. Expliquer l'inégalité des saisons.

I. Dans un cercle O, on donne deux cordes $AM = a$ et $AP = b$. La corde AP sous-tend un arc double de l'arc sous-tendu par la corde AM. Trouver R.

Application : $AM = 3^{m},275,$
$AP = 4^{m},120.$

II. Conditions d'équilibre d'un corps pesant placé sur un plan incliné et sollicité par une force faisant avec le plan un angle quelconque.

I. Définir le jour solaire vrai; dire pourquoi il est plus long que le our sidéral et calculer sa valeur moyenne en jours sidéraux, sachant que l'année tropique vaut 366 jours 242217.

II. ABC étant un triangle isoscèle dont on connaît l'angle au sommet $A = 2\alpha$ et un des côtés $AB = a$, on prend sur ce côté un point D tel que $BD = b$, et on mène la droite DEF faisant l'angle $BDE = x$. Calculer l'angle x par sa tangente de manière que l'on ait :

$$DE = EF.$$

BIBLIOGRAPHIE

Cosmographie très élémentaire et purement descriptive, à l'usage des élèves des lycées et collèges de rhétorique, philosophie, mathématiques élémentaires (1re et 2e années) etc., par M. AUDOYNAUD, professeur au lycée de Poitiers (4e édition, Hachette, prix 3 francs.) — Au moment où la cosmographie reparaît dans le programme des examens de Saint-Cyr, nous voulons signaler à nos lecteurs l'ouvrage de M. Audoynaud. Il est clairement rédigé et, comme le dit son titre, très élémentaire; malgré cela, des notes diverses le mettent à la hauteur des examens auxquels nous venons de faire allusion. Enfin, 60 problèmes, d'un genre facile, proposés à la fin du livre constituent un choix d'exercices intéressants permettant à l'élève, qui en cherchera les solutions, de s'assimiler un cours que l'on ne comprend bien qu'après avoir éclairci par des applications numériques, les théories souvent délicates qu'il comporte.

Nous profiterons de cette occasion pour exprimer le regret que la cosmographie ne soit plus représentée au baccalauréat ès-lettres.

Dans le plan d'études de 1880 (Hachette), on lit:

Page 26. — Rhétorique (sciences) : géométrie, corps ronds, cosmographie.

Page 28. — Philosophie (sciences) : *Revision et complément des cours de sciences mathématiques*, physiques et naturelles.

Il n'est nullement dit que la cosmographie ne sera pas revue.

Cependant, dans le programme du baccalauréat ès-lettres, on lit aussi (Hachette) :

Sciences mathématiques.

« Ce programme est celui de la classe de philosophie *c'est-à-dire* la revision des cours d'arithmétique, d'algèbre et de géomètrie avec complément pour la classe de philosophie. »

Il est complètement muet sur la cosmographie.

Tout cela n'est pas très logique et, théoriquement, semble présenter quelque confusion. Mais nous devons reconnaître que, dans la pratique, toute ambiguité disparaît; la cosmographie n'est pas révisée en philosophie, par la toute puissante raison qu'elle n'est pas demandée au baccalauréat-ès-lettres..

Il est permis de trouver cet état de choses regrettable ; aucune science, d'un avis général, les mathématiques pures exceptées, ne paraît plus propre à développer l'esprit philosophique que la cosmographie ; aucune, dans ses lignes générales, et dans ses notions élémentaires, n'est plus nécessaire à connaitre. Si cela est vrai, pourquoi n'est-elle plus enseignée en philosophie; et, *surtout*, pourquoi n'est-elle plus demandée aux examens du baccalauréat ès-lettres?

Bulletin scientifique de l'enseignement secondaire spécial, à l'usage des éléves de 3e, 4e, 5e et 6e années et des candidats aux examens et concours de cet enseignement ; rédigé par M. Ernest Lebon, professeur agrégé de mathématiques au lycée Charlemagne, avec la collaboration d'une société de professeurs (A. Colin et Cie; Paris et départements 6 francs).

Cette publication s'adresse, tout particulièrement, aux élèves et aux professeurs de l'enseignement spécial. Les communications diverses doivent être adressées à M. E. Lebon, 5, rue de Mézières. Les solutions des questions proposées doivent être envoyées au rédacteur, avant le 20e jour qui suit la publication du numéro.

Le Bulletin paraît le 20 de chaque mois, sauf en août et en septembre.

Préparation aux examens de l'enseignement secondaire spécial et de l'enseiseignement secondaire des jeunes filles. Revue bi-mensuelle publiant tous les textes donnés dans les différents centres d'examen de la France et les actes administratifs, paraissant le 10 et le 25 de chaque mois, de novembre à juillet inclusivement; prix d'abonnement : **10** francs.

Les numéros ne sont pas vendus séparément; les abonnements partent du 10 novembre de chaque année pour prendre fin le 25 juillet de l'année suivante. (Librairie Croville-Morant et Foucart, 20, rue de la Sorbonne.)

Ce journal est littéraire et scientifique; il publie TOUS les examens du baccalauréat de l'enseignement spécial dans TOUS les centres d'examens de la France et il fera remonter cette publication à 1883, date du fonctionnement du nouveau baccalauréat.

Il contient une préparation aux certificats d'aptitude et aux agrégations de l'enseignement spécial. Les devoirs à préparer donnés pour chaque mois sont ceux que l'Académie de Paris fait traiter par les candidats qu'elle consent à préparer par correspondance.

G. L.

QUESTION 351

Solution par M. Ph. F.

On donne un cercle O, *deux diamètres rectangulaires* AA′, BB′. *Trouver sur* OB *un point* C *tel qu'en joignant* AC *et en menant* DCD′ *parallèle à* AA′ *le prolongement de* AC *partage l'arc* BD′ *en deux parties égales.*

Joignons D′O. Soient x, y les coordonnées de D, α et ω les angles $\widehat{EAA'}$ $\widehat{D'OA'}$. En vertu de l'égalité

$$\text{arc } D'E = \text{arc } EB,$$

on a
$$\frac{\pi}{2} - 2\alpha = 2\alpha - \omega, \qquad (1)$$

ou
$$\frac{\pi}{2} = 4\alpha - \omega;$$

cette égalité donne
$$1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} 4\alpha = 0. \qquad (2)$$

Or
$$\operatorname{tg} \omega = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{R}$$

en désignant par R le rayon du cercle O.

Remplaçant dans (2) tg ω et tg 4α par leurs valeurs en fonction de x, y, R et observant que

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad (3)$$

il vient, toutes simplifications faites, une équation du 5ᵉ degré en x

$$x(x^4 - 4Rx^3 + 4R^2x^2 + 4R^3x - 4R^4) = 0. \qquad (4)$$

Équation qui nous indique, ainsi qu'on pouvait le supposer, que les points B et B′ répondent aux conditions du problème.

L'équation

$$x - 4Rx^3 + 4R^2x^2 + 4R^3x - 4R^4 = 0.$$

a deux racines réelles

$$x_1 = +\,0{,}764R$$
$$x_2 = -\,0{,}947R.$$

Il y a six points sur la circonférence remplissant les conditions de l'énoncé. Ces points sont symétriques, deux à deux, par rapport à A′A.

L'équation (4) peut être résolue géométriquement par la recherche des intersections de la circonférence (3) et des lignes qui correspondent aux équations :

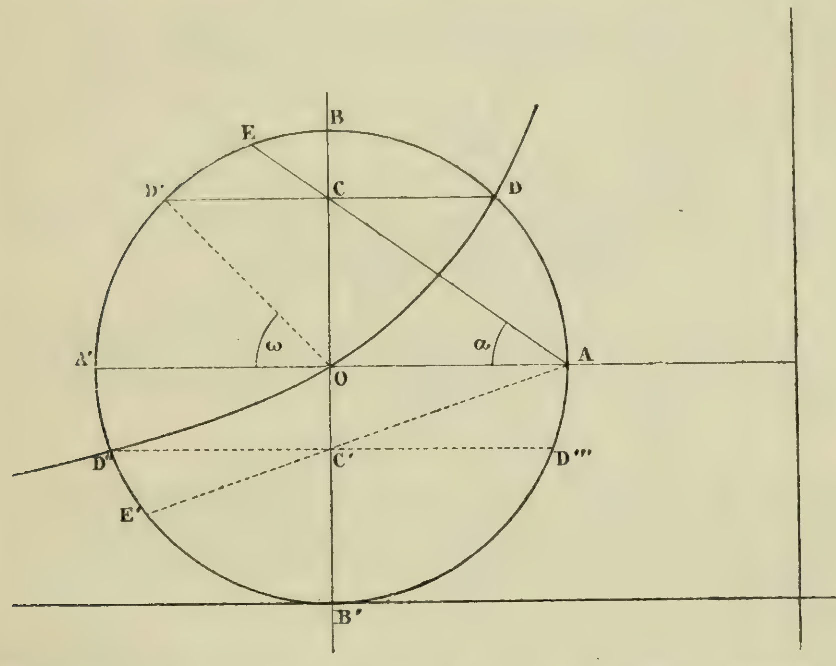
$$x = 0, \tag{5}$$

$$R(2y - x) = xy. \tag{6}$$

Cette dernière égalité mise sous la forme

$$(2R - x)(y + R) = 2R^2,$$

prouve que la courbe correspondante est une hyperbole équi-



latère dont les asymptotes sont : une parallèle à B'B à la distance + 2R, et une parallèle à A'A à la distance − R.

Cette courbe coupe la circonférence en deux points D, D″, D″ étant situé entre A′ et B′ et répondant à l'abcisse 0,947 R.

Ce point D″ est tel que, si l'on mène D″C′D‴ parallèle à A′A, et si l'on joint AC′ qui coupe la circonférence en E′, on a

arc E′A′B = arc E′B′D‴.

On peut, généralisant l'énoncé, se poser la question sous la forme suivante :

Tracer ACE *tel que l'arc* D'B *soit égal à* mEB.

En posant l'arc BE = x l'équation à résoudre sera

$$(\sin x + 1)\cos mx = \cos x. \tag{M}$$

$m = 2$ correspond au cas résolu dans cette note ;
$m = 3$ conduit à cette remarque assez curieuse :

D'C est égale à la différence entre le diamètre et le côté du carré inscrit, soit $2R - R\sqrt{2}$, ligne qui se construit aisément.

Nota. — La question 351 sur laquelle la communication précédente a, naturellement, appelé notre attention, fut proposée, sans signature, au tome V de la première série de ce journal (1881, p. 287). La solution qui a été publiée (*loc cit.*, p. 553) est manifestement fausse; c'est un de ces petits accidents auxquels un journal échappe difficilement. Mais, dans le cas présent, il est singulier que l'auteur (anonyme) de cette question n'ait pas relevé cette inexactitude et, chose plus regrettable, n'ait pas, du même coup, indiqué la solution exacte qu'il avait eue en vue, en proposant cet exercice aux élèves de mathématiques élémentaires.

La solution qu'on vient de lire, fait dépendre le tracé demandé d'une équation du quatrième degré. En appliquant à celle-ci la méthode de Ferrari, on est conduit, si nous avons bien calculé, à la résolvante :

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2 = 0,$$

équation qui n'admet pas de racine commensurable. Nous croyons donc que le problème en question n'est pas *quadratique* et qu'il a, par inadvertance, été proposé comme constituant une question élémentaire; mais, si nous nous trompons, et si l'on nous adresse une solution purement élémentaire de cet exercice, nous l'insérerons avec plaisir.

G. L.

QUESTION 182

Solution par M. Henri Martin, élève au Lycée Condorcet.

Par le sommet A *d'un triangle* ABC, *on mène une parallèle* AD *à* BC, *son inverse* AA_1 *et la médiane anti-parallèle à* $A\alpha$. *Démontrer la relation*

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{B\alpha}{C\alpha}.$$

(E. Vigarié.)

Les angles A_1AB, ACA_1 étant tous devenus égaux à l'angle CAD, les triangles A_1AC, A_1AB sont semblables et donnent :

$$\frac{AA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC} = \frac{A_1B}{AA_1}$$

En tirant de là les valeurs de A_1B, A_1C, et en les divisant membre à membre, on a :

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

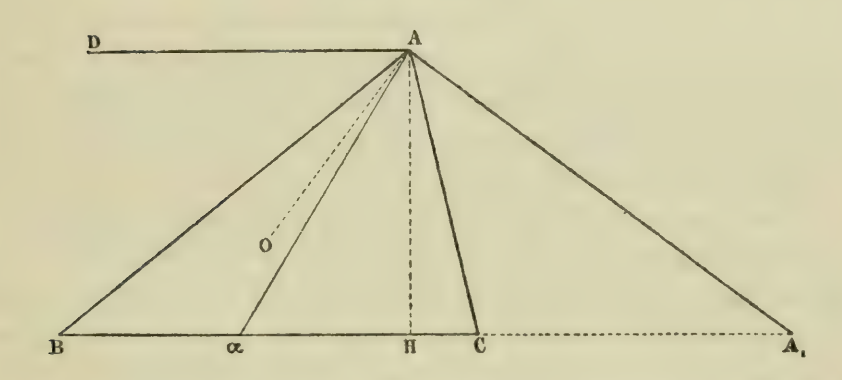
Or, on sait (v. *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1885, p. 55) que :

$$\frac{B\alpha}{C\alpha} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Donc

$$\frac{B\alpha}{C\alpha} = \frac{BA_1}{CA_1}.$$

C. Q. F. D.



Note. — Cette question se démontre encore facilement si on remarque que AD étant perpendiculaire à la hauteur AH, son inverse AA_1 est perpendiculaire à l'inverse de AH, c'est-à-dire à AO (v. *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1885, p. 59). La droite AA_1 est donc tangente au cercle circonscrit, ce qui démontre la proposition énoncée (v. *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1885, p. 102).

E. V.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. G. Bourdier, élève au lycée de Grenoble; A. Fitz-Patrick, élève au lycée de Poitiers; J. Chapron, (solution par les faisceaux harmoniques). Ignacio Beyens (Cadix).

QUESTION 186

Solution par M. E. Vigarié.

On sait que les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux points de contact des cercles ex-inscrits se coupent en un même point. Démontrer que ce point est le centre du cercle inscrit au triangle obtenu en menant par les sommets du triangle les parallèles aux côtés. (G. Boubals.)

Soient ω le *point de Gergonne*, c'est-à-dire le point de concours des droites qui joignent les sommets du triangle aux point α, β, γ de contact du cercle inscrit avec les côtés, ω le *point de Nagel* (*), c'est-à-dire le point de concours des droites qui joignent les sommets du triangle aux points α', β', γ' de contact des cercles ex-inscrits avec les côtés on a évidemment:

$$B\alpha = C\alpha'.$$

Les points ω, ω' étant réciproques, le point ω' est le centre du cercle inscrit au triangle $A_1'B_1'C_1'$ formé en menant par les sommets de ABC des parallèles aux côtés (voir ce journal 1885. Question 94, p. 92).

On sait, en outre *(loc. cit.)*, que les douze lignes qui joignent les sommets du triangle ABC aux douze points de contact des cercles inscrits et ex-inscrits concourent, trois par trois, en huit points, dont ω' est l'un d'eux, trois autres de ces points sont les centres des cercles ex-inscrits au triangle $A_1'B_1'C_1'$; ces trois points sont les points algébriquement associés du point de Nagel (v. *Journal de Math. Sp.* 1885, pp. 193, 217, 241 et *Journal de Math. Élém.*, pp. 129 et 249).

La question précédente peut encore être résolue en s'appuyant sur la théorie des *points complémentaires* (**) : ces derniers sont deux points tels que la droite qui les joint est divisée dans le rapport de deux à un par le centre de gravité G du triangle. Il est facile de voir que si deux points Ω Ω' sont tels que

$$\Omega G = 2G\Omega',$$

(*) Voyez, *Journal*, p. 158.

(**) *Idem*, p. 131.

le point Ω jouit dans le triangle $A'_1B'_1C'_1$ des mêmes propriétés que Ω dans ABC. Or, si O est le centre du cercle inscrit de ABC, on a :

$$\omega' G = 2GO,$$

(*Journal*, 1885, p. 93), donc ω' est le centre du cercle inscrit à $A'_1B'_1C'_1$.

Nota. — M. L. Prince, élève au lycée de Grenoble a résolu la même question, qui a été énoncée par M. E. Lemoine (*Association française. La Rochelle*, 1882. *Théorème XI*; et *Journ. de Math. Spéc.* 1883, p. 51).

QUESTION 187

Solution par M. Gralleau, maître auxiliaire au Lycée de Marseille.

Etant donné un triangle ABC, *on mène la médiane antiparallèle* $A\alpha$ *et on prend sur cette droite à partir de* α *dans le sens* $A\alpha$ *un point* A'' *à une distance de* BC *égale à* $\frac{a}{2}$ tg A. *Par ce point on mène une parallèle à la tangente en* A *à la circonférence* ABC, *cette parallèle coupe* AB, AC *en* C', B'; *les droites* BB', CC' *se coupent en* A_1 *Soient* B_1, C_1 *les points analogues de* A_1

1° *On a :* $A''C = A''C' = A''B = A''B'$;

2° *La droite* AA_1 *est une hauteur du triangle* $AB'C'$;

3° *Les circonférences* ABC, $B'BC'C$ *sont orthogonales ;*

4° *Lieu de l'orthocentre de* $AB'C'$ *quand* BC *étant fixe,* A *parcourt la circonférence* ABC;

5° *Les triangles* ABC, $A_1B_1C_1$, *sont égaux et les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *se coupent au centre du cercle circonscrit à* ABC.

(E. Vigarié.)

Il est facile de voir que le point A'' est le point d'intersection des tangentes menées en B et C à la circonférence ABC, et que $B'C'$ est antiparallèle à BC, puisqu'elle est parallèle à la tangente en A.

1° Les deux triangles $CA''B'$, $BA''C'$ sont isocèles et l'on a :

$$A''C' = A''B', \qquad A''B = A''C',$$

comme $$A''B = A''C,$$

on a : $$A''C = A''C' = A''B = A''B'.$$

2° D'après ce qui précède, le cercle décrit de A″ comme centre, avec B′C′ comme diamètre, passe par B et C; donc les angles B′BC′, B′CC′ sont droits, par conséquent BB′, CC′ sont deux hauteurs du triangle AB′C′ et AA_1 est la troisième hauteur.

3° Les deux circonférences ABC, B′CBC′ sont orthogonales puisque A″C est tangente à la circonférence ABC.

4° Les angles ABA_1, ACA_1 étant droits, le quadrilatère ABA_1C est inscriptible et le point A_1 est sur la circonférence ABC; donc, quand A décrira la circonférence ABC, le point A_1 la décrira aussi.

5° Les points A_1, B_1, C_1 sont diamétralement opposés aux points ABC. Les deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont donc égaux et il suffit d'en faire tourner un de 180° autour du centre O pour les faire coïncider.

Remarque. — On peut encore observer que si le point A décrit la circonférence ABC, les points B′, C′ décrivent la circonférence B′C BC′ et que le cercle des neuf points (cercle d'Euler) du triangle AB′C′ est un cercle fixe puisqu'il passe par trois points fixes A″, B, C.

Nota. — Solutions analogues par MM. Louis Prince, élève au lycée de Grenoble; J. Chapron; G. Bourdier, élève au lycée de Grenoble; Henri Martin, élève au lycée Condorcet; Ignacio B yens (Cadix).

QUESTION 190

Solution par M. G. Bourdier, au Lycée de Grenoble.

Calculer le sinus de 333°.

(École Polytechnique, examens oraux 1885.)

Remarquons d'abord que 333° = 360° − 27°, par suite sin 333° = − sin 27°. Cherchons donc sin 27°.

L'angle au centre du décagone régulier étoilé vaut 108° $= \frac{3 \times 360^\circ}{10}$; or 27° est justement le quart de 108°. Le problème revient donc à chercher la corde sous-tendant un arc moitié de celui du décagone étoilé. Si a est une corde quelconque et si x est la corde sous-tendant l'arc moitié moindre, on a

$$x = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - a^2})}.$$

Si nous faisons R = 1, nous aurons

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}} = \sqrt{\frac{2 + a}{2}} - \sqrt{\frac{2 - a}{2}};$$

a est ici le côté du décagone étoilé, on a donc

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{5} + 1).$$

Remplaçons, nous aurons :

$$x = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{5} + 1}{4}} - \sqrt{\frac{4 + \sqrt{5} - 1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right).$$

Le sinus de 27° est la moitié de cette corde, nous avons donc

$$\sin 27^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right);$$

par suite

$$\sin 333^\circ = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right).$$

Nota. — Autres solutions, par MM. Edmond Bordage, professeur au collège de Nantua; l'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin à Huy (Belgique); Ignacio Beyens (Cadix).

NOTE SUR LA QUESTION 165

Par **Émile Vigarié**.

Cette question, dont il a été donné deux solutions (*J.*, 1885, p. 284; 1886, p. 163), peut se déduire facilement de la proposition bien connue :

Dans un plan, le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à un ensemble de n *points* A, B,... *situés dans un même plan et formant une figure quelconque, soit égale à un carré donné* K^2 *est une circonférence ayant pour centre le centre* O *des moyennes distances des points considérés et pour rayon la longueur :*

$$\rho^2 = K^2 - \frac{(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \ldots.)}{n}$$

Si les points A, B, C forment un polygone régulier, les quantités OA, OB... sont égales au rayon R du cercle circonscrit dont le centre se confond avec O, et l'on a :

$$\rho^2 = \frac{K^2 - nR^2}{n}, \quad \text{ou} \quad K^2 = n(\rho^2 + R^2). \quad (1)$$

Quand ABCD, A'B'C'D' sont deux circonférences concentriques de rayons r, r' et ABC, A'B'C' deux triangles équilatéraux inscrits, la formule (1) donne :

$$\overline{D'A}^2 + \overline{D'B}^2 + \overline{D'C}^2 = 3(\overline{r}^2 + \overline{r'}^2) = \overline{DA'}^2 + \overline{DB'}^2 + \overline{DC'}^2.$$

On peut remplacer les triangles équilatéraux par des polygones réguliers d'un même nombre n de côtés : dans ce cas, les sommes considérées ci-dessus sont égales à :

$$n(\overline{r}^2 + \overline{r'}^2).$$

QUESTIONS PROPOSÉES

244. — La somme des trois rectangles que l'on peut construire, en prenant comme éléments les trois côtés d'un triangle quelconque est égale à la somme de trois autres rectangles ayant pour base commune le demi-périmètre du triangle et successivement pour hauteurs les trois droites menées, par le centre du cercle inscrit, parallèlement aux trois côtés du triangle. *(Reboul.)*

245. — Résoudre le système suivant :

$$x^4 + a - b = y^4 + c - d = z^4 + b - c = u^4 + d - a = xyzu.$$

(Ignacio Beyens.)

Erratum. — C'est par inadvertance que la question 233 a été proposée. Elle l'avait été déjà sous le n° 211.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 4456-7.

SIMPLIFICATION DU CALCUL ALGÉBRIQUE

Par M. M. Philippof.

(*Fin*, voir p. 49).

10. Formule du polynôme. — PROBLÈME : *Trouver le développement :*

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^{nk}) = E^k = V.$$

Rép. : En désignant par $[p]$ le coefficient de x^p je commence par chercher le développement de $E^k = (a_\alpha x^\alpha + a_\beta x^\beta \dots)^k$ où α, β ... sont des nombres entiers.

On a (en employant les symboles)

$$E^k = V = A_0\ A_1\ A_2 \dots$$

Soit $[N]$ le coefficient de x^n dans V (où $N = A_n$).

L'identité $E^k \equiv V$ donne en prenant la dérivée $kE^{k-1}E' \equiv V'$ et, par suite $kE'V \equiv EV'$,
d'où

1) $$\Sigma[\alpha]A_{p-\alpha+1}\{p + 1 - \alpha(k + 1)\} = 0;$$

ou, en posant

$$p + 1 = n, \quad A_n = [N],$$

on aura :

2) $$\Sigma[\alpha][N - \alpha]\{n - \alpha(k + 1)\} = 0.$$

Si

$$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 2;\ [\alpha] = a_0,\ [\beta] = a_1 \text{ etc.}$$

on aura pour

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots)^k = A_0 + A_1x + A_2x^2 \dots$$

la formule

3) $$(p+1)A_{p+1}a_0 = (k-p)A_pa_1 + (2k-p+1)A_{p-1}a_2 + \dots + A_0a_{p-1}.k(p+1).$$

En employant la notation :

$$k(k-1)(k-2) = k\left|^{-3}\right.; \quad k(k-1)(k-2)(k-3) = k\left|^{-4}\right. \text{ etc.}$$

et en remarquant que $A_0 = a_0{}^k$ on aura successivement :

$$A_0 = a_0{}^K$$
$$A_1 = ka_0{}^{k-1}a_1$$

$$A_2 = \frac{k|^{-2}}{2\,!}\, a_0{}^{k-2}a_1^2 + ka_0{}^{k-1}a_2$$

$$A_3 = \frac{k|^{-3}}{3\,!}\, a_0{}^{k-3}a_1^3 + k|^{-2} a_0{}^{k-2}a_1a_2 + ka_0{}^{k-1}a_3 \text{ etc.}$$

Mais on connaît les coefficients numériques $\varphi(k)$ d'après la théorie des permutations. On a *à priori :*

$$(p + q + r + \ldots) = \Sigma^{\mu}\, \frac{\mu\,!}{l\,!\; m\,!\; n\,!\ldots}\, p^l q^m r^n \ldots$$

ou $$x = l + m + n\ldots$$

En posant $a_n^m = \overset{m}{n}$ d'où $a_1^3a_2 + a_2a_3^5 = \overset{3}{1}2,\ 2\overset{5}{3}$, etc.) et en rejetant les coefficients $\varphi(k)$ et les puissances de a_0 connus *à priori*, on peut représenter A_3 par le symbole $(\overset{3}{1},\ 12,\ 3)$ (c'est un symbole d'un nouveau genre). On trouvera de la même manière :

$$A_5 = \left(\overset{5}{1},\ \overset{3}{1}2,\ 1\overset{2}{2},\ \overset{2}{1}3,\ 23,\ 14{,}5\right).$$

Cette écriture symbolique rend évidente la loi de formation des coefficients A. Pour obtenir A^5 il faut décomposer le nombre 5 de toutes les manières possibles :

$$5 = \left|\begin{array}{l} 5 \\ 4 + 1 \\ 3 + 2 \\ 3 + 1 + 1 \\ 2 + 2 + 1 \\ 2 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{array}\right.$$

Il faut écrire $\overset{5}{1}$ pour $1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $\overset{3}{1}2$ pour $2 + 1 + 1 + 1$, etc., et on obtiendra

$$A_5 = \left(\overset{5}{1},\ \overset{3}{1}2,\ 1\overset{2}{2},\ \overset{2}{1}3,\ 23,\ 14,\ 5\right)$$

$$= \frac{k\,!}{(k-5)\,!\;5\,!}\, a_0{}^{k-5}a_1^5 + \frac{k\,!}{(k-4)\,!\;3\,!}\, a_0{}^{k-4}a_1^3a_2 + \text{etc.}$$

Exemple : *Trouver* $(a_0 + a_1x + a_2x^2)^3 = (0,\ 1,\ 2)^3$.

On trouve (en remarquant que $a_3 = a_4 = a_5 \ldots = 0$)

$A_0 = a_0^3$; $A_1 = 3a_0^2a_1$; $A_2 = 3a_0^2a_2 + 3a_0a_1^2$; $A_3 = \left(\overset{3}{1},\ 12,\ 3\right)$

$= \left(\overset{3}{1}\ 1\ 2\right) = a_1^3 + 6a_0a_1a_2$; $A_4 = \left[\overset{2}{1}2,\ \overset{2}{2}\right)$ (parce qu'il faut rejeter $\overset{4}{1}$ comme ayant 4 dimensions) ou $A_4 = 3a_0a_2^2 + 3a_1^2a_2$; $A_5 = 3a_1a_2^2$; $A_6 = a_2^3$. On peut vérifier ces formules par le procédé direct, en calculant $(a_0\ a_1\ a_2)^3$.

Exemples. 1. *Trouver* $(1 + x + x^2)^4$.

On trouve :

$$(1\ \ 1\ \ 1)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 2\ \ 1)^2 =$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} = 1\ \ 4\ \ 10\ \ 16\ \ 19\ \ 16\ \ 10\ \ 4\ \ 1 \\ = 1 + 4x + 10x^2 + \ldots\ldots \end{matrix}$$

2. *Trouver la somme de la série*

$$0,\ (a\ \ b\ \ c) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{a}{x^4} + \frac{b}{x^5} + \frac{c}{x^6} \ldots\ldots$$

On pose $0,\ (a\ \ b\ \ c) = U$

$$U\ 0\ 0\ 0 = \overset{3}{U} = a\ \ b\ \ c,\ (a\ \ b\ \ c)$$

$$\overset{3}{U}\overline{U} = U.\overset{3}{1}\ \overline{1} = a\ \ b\ \ c . U = \frac{a\ \ b\ \ c}{\overset{3}{1}\ \ \overline{1}}$$

$$= \frac{ax^2 + bx + c}{x^3 - 1}.$$

3. *Multiplier :*

$$1 + 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x^2} + 5\sqrt{x^3}\ \textit{par}\ 7 + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2}.$$

Remarque. — On peut poser

$$A + Bx^{\frac{1}{m}} + Cx^{\frac{2}{m}} + Dx^{\frac{3}{m}} + \ldots = ABC\ldots^{:m}.$$

La lettre m s'appelle dénominateur du symbole irrationnel. Deux symboles ayant le même dénominateur se multiplient comme les symboles irrationnels.

Rép. En multipliant

$$1\ \ 2\ \ 3\ \ 5^{:2} \qquad\qquad \text{par}\ \ 7\ \ 1\ \ 2^{:3}$$

ou

$$1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 3\ 0\ 0\ 5^{:6} \text{ par } 7\ 0\ 1\ 0\ 2^{:6}$$

on obtient le résultat :

$$7\ 0\ 1\ 14\ 2\ 2\ 21\ 4\ 3\ 35\ 6\ 5\ 0\ 10^{:6} = 7 + \sqrt[6]{x^2} + 14\sqrt[6]{x^3} + \ldots + 10\sqrt[6]{x^{13}}.$$

4. *Trouver*

$$(a, b, c, d, \ldots x)^2.$$

On a

$$\begin{array}{llll} a^2 & & & \\ 2ab & b^2 & & \\ 2ac & 2bc & c^2 & \\ 2ad & 2bd & 2cd & d^2 \\ \ldots & & & \end{array} = a^2 + 2abx + \begin{array}{c} b^2 \\ 2ac \end{array} \Bigg| + (2bc + 2ad)x^3 + \ldots$$

5. *Trouver*

$$\sqrt{9a^4 - 36a^3b + 60a^2b^2 - 48ab^3 + 16b^4}.$$

On trouve

$$\begin{array}{c|cccccc} 3 & \sqrt{9} & & \overline{36} & 60 & \overline{48} & 16 \\ \bar{6} & 6 & \bar{6} & 1 & \overline{36} & & \\ 4 & 6 & \overline{12} & 4 & 24 & \overline{48} & 16 \\ & & & & \overline{24} & 48 & \overline{16} \\ & & & & & 0 & \end{array}$$

Résultat : $3a^2 - 6ab + 4b^2$.

6. *Décomposer en facteurs :*

$$4(x^2 + xy + y^2)^3 - 27(x^2y + y^2x)^2 = U.$$

On a

$$U = 4(1\ 1\ 1)^3 - 27(0\ 1\ 1\ 0)^2$$

$$\begin{array}{ll} (1\ 1\ 1)^3 = & 1\ 1\ 1 \\ & 1\ 1\ 1 \times 1\ 1\ 1 = (1\ 2\ 3\ 2\ 1)(1\ 1\ 1) \\ & 1\ 1\ 1 \quad = 1\ 3\ 6\ 7\ 6\ 3\ 1;\ (1\ 1)^2 = 1\ 2\ 1. \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc} U = & 4 & 12 & 24 & 28 & 24 & 12 & 4 \\ & & & \overline{27} & \overline{54} & \overline{27} & & \\ \hline = & 4 & 12 & \bar{3} & \overline{26} & \bar{3} & 12 & 4. \end{array}$$

En extrayant la racine carrée et en la divisant par $1 \bar{1}$ on obtient

$$U = 1\ 1^2 . 2\ 5\ 2^2.$$

Mais

$$2\ 5\ 2 = 2\ 1 . 1\ 2,$$

donc

$$U = (x - y)^2(2x + y)^2(x + 2y)^2.$$

11. Conclusion. — L'espace me manque ici pour exposer les nombreuses applications de ma méthode, qui est d'une utilité incontestable non seulement parce qu'elle abrège des longs calculs, mais principalement à cause de la symétrie remarquable des formules auxquelles elle conduit. La théorie des formes cartésiennes, à peine effleurée dans cet article, *est étroitement liée à la théorie générale de l'élimination* et à celle des déterminants. C'est en faisant l'élimination, d'après les méthodes de Bezout, d'Euler et de Cayley, que j'ai eu l'idée des symboles cartésiens. La notation symbolique des polynomes ordonnés n'était inventée que postérieurement. Ainsi, comme il arrive souvent, le cas le plus simple m'échappait encore quand j'avais déjà exploré le cas relativement beaucoup plus difficile (*).

NOTE DE GEOMÉTRIE

Par M. **Raffalli**, maître répétiteur au Lycée Saint-Louis.

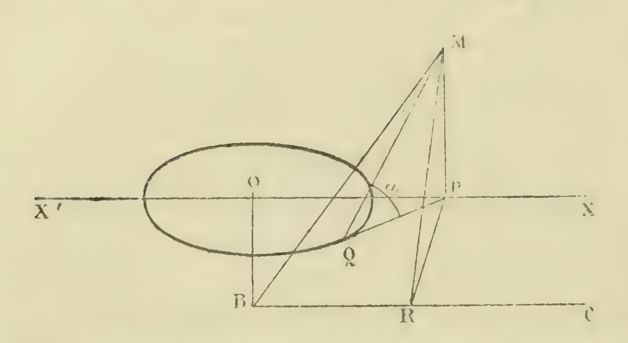
Je me propose de donner une démonstration élémentaire de ce théorème connu :

La section méridenne de la surface gauche de révolution est une hyperbole.

(*) Au commencement de 1885 j'ai communiqué ma méthode d'élimination au moyen des formes cartésiennes dans une lettre adressée à l'illustre mathématicien russe M. Bouniakofsky.

Il suffira de démontrer qu'on peut faire passer un cône de révolution par cette courbe.

Soit O le cercle de gorge situé dans le plan horizontal; X'OX la trace, sur ce plan, d'un méridien quelconque. Prenons sur la perpendiculaire menée par O à OX, une longueur OB = R tang α, α étant l'angle constant des génératrices et du plan horizontal, puis menons BC parallèle à OX. Je dis que le cône de révolution de sommet B, d'axe BC et dont le demi-angle au sommet est α, passe par la méridienne que détermine OX.



Prenons en effet un point Q sur le cercle de gorge et soit M le point où la génératrice qui passe en Q perce le plan vertical OX. Soit P la projection horizontale de M située sur OX. La projection PQ de la génératrice est alors tangente au cercle de gorge. On aura

$$\overline{MP}^2 = \overline{PQ}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \left(\overline{OP}^2 - R^2\right) \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

d'où

$$\overline{MP}^2 + R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \overline{OP}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha. \qquad (1)$$

Menons PR perpendiculaire à BC et joignons MR; MR sera perpendiculaire è BC et nous aurons :

$$\overline{MR}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PR}^2 = \overline{MP}^2 + R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

ou bien $$\overline{BR}^2 \operatorname{tg}^2 MBR = \overline{MP}^2 + R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha. \qquad (2)$$

En rapprochant les égalités (1) et (2) on a donc :

$$\overline{BR}^2 \operatorname{tg}^2 MBR = \overline{OP}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

et comme BR = OP on en déduit :

$$\operatorname{tg} MBR = \operatorname{tg} \alpha,$$

ou, finalement,

$$MBR = \alpha.$$

VARIÉTÉS

ESSAI

SUR LA

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 54).

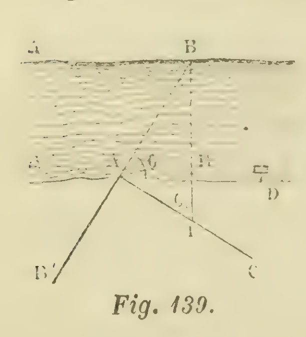
CHAPITRE II

LA LARGEUR DE LA RIVIÈRE

16. — Nous avons exposé dans le chapitre précédent quelques applications de la fausse équerre et du cordeau; mais celles-ci sont beaucoup plus nombreuses qu'on ne serait peut-être tenté de le croire, au premier abord, et nous aurons occasion, dans la suite, de prouver ce fait par plus d'un exemple. Nous devons pourtant quitter ici le développement de ces applications pour nous attacher à l'exposition méthodique des solutions de quelques problèmes, plus particulièrement intéressants, de cette géométrie que nous nous proposons de développer dans la seconde partie de cet ouvrage. Tels sont : le prolongement d'une droite au delà d'un obstacle, la distance d'un point donné à un point inaccessible, ou, encore, celle de deux points inaccessibles, etc. Pour le moment, nous voulons nous occuper du problème qui a pour objet la détermination de la largeur d'une rivière.

17. La largeur de la rivière *(Première solution).* — Soient Δ, Δ' deux droites parallèles représentant les bords du fleuve dont on veut mesurer la largeur. D'un point A, pris sur la rive Δ où l'on se trouve placé, on vise avec la fausse équerre : 1° un point B que l'on aperçoit sur l'autre

rive Δ′; 2° un jalon planté, quelque part, sur Δ; l'instrument relève ainsi l'angle BAD = θ. Ayant ensuite jalonné la droite AC que nous supposons élevée perpendiculairement à AB′, au point A, on chemine sur AC jusqu'à ce que l'on ait trouvé un point I duquel les points A et B soient vus sous l'angle θ; soit AIB = θ. On jalonne IB jusqu'à Δ, ce qui donne un certain point H; BH représente alors la largeur de la rivière. Pour mesurer BH, on observe que l'on a


Fig. 139.

$$\overline{AI}^2 = IH.IB = IH(IH + HB.$$

d'où l'on tire

$$HB = \frac{(AI + IH)(AI - IH)}{IH}.$$

On peut aussi, le calcul est même un peu plus simple, relever les longueurs AH, IH et calculer BH par la formule

$$BH = \frac{\overline{AH}^2}{IH}.$$

Ces solutions sont très simples, mais elles s'appliquent surtout, et avec commodité, au cas où la largeur qu'il s'agit d'évaluer est assez grande; ou, encore, à celui dans lequel se présentent certaines difficultés, comme celles que nous signalons plus loin. Dans la pratique, il en est rarement ainsi; la question qui nous occupe étant surtout un problème de pontonniers. Il s'agit, pour eux d'apprécier, rapidement, et pourtant avec une précision suffisante, la largeur d'une rivière sur laquelle ils doivent, en un point déterminé, jeter un pont; nous allons indiquer d'abord les solutions qu'ils emploient en pareil cas; nous entrerons ensuite dans l'examen circonstancié de quelques cas particuliers, plus difficiles.

A ce propos, revenant ici sur une idée précédemment exprimée, nous insisterons encore sur la nécessité de fournir des solutions variées pour les problèmes de la géométrie pratique et, surtout, des solutions bien appropriées aux conditions matérielles qui leur sont imposées. En définitive, le problème qui nous occupe en ce moment peut, *théoriquement*, être considéré comme identique à celui qui se propose de me-

surer la distance d'un point donné à un point inaccessible (*), problème que nous traiterons avec les développements nécessaires dans un chapitre suivant. Mais, dans la pratique, quelle différence entre les procédés qui peuvent servir à mesurer la largeur d'un fleuve et ceux que l'on peut appliquer à l'évaluation des grandes distances telles que celles qui intéressent la portée des projectiles! C'est pourquoi il convient toujours, en géométrie pratique, d'examiner avec attention si les solutions indiquées conviennent bien, à tous les points de vue, au problème que l'on a voulu traiter, et si, pour nous résumer, les exigences pratiques inhérentes au tracé que l'on veut exécuter, ne sont pas en contradiction *matérielle* avec celles qui ressortent de la solution proposée.

18. La largeur de la rivière *(Solution des pontonniers)* (**). — 1° On jalonne sur l'une des rives une ligne

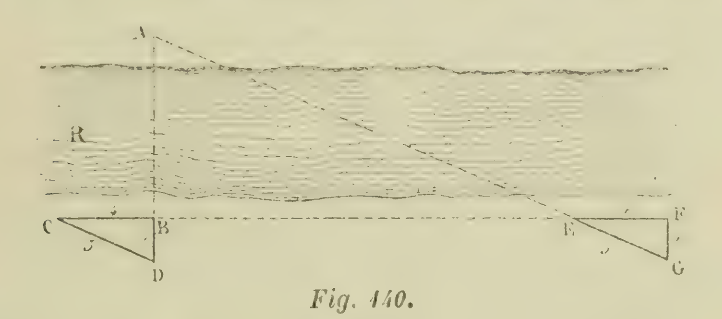


Fig. 140.

BF sensiblement parallèle à cette rive et aussi rapprochée que possible du cours d'eau.

Sur la rive opposée, on choisit un point A facile à recon-

(*) C'est ainsi que le problème est envisagé ordinairement, notamment dans Bergery *(loc. cit.* p. 422). Bergery applique, pour le résoudre, la propriété des diagonales du quadrilatère complet, lesquelles se partagent, comme l'on sait, harmoniquement. Mais cette solution, sur laquelle nous reviendrons, en traitant le problème de la distance d'un point à un point inaccessible, très acceptable pour les grandes distances, n'est pas assez simple quand il s'agit d'evaluer une distance aussi faible, relativement, que la largeur d'un fleuve.

(**) Ces solutions sont empruntées à l'*Aide-mémoire* de Laisné à l'usage des officiers du génie (4e édition, 1861, p. 294 et 5e édition, 1884, chap. V; *Ponts militaires*) et, aussi, à l'ouvrage intitulé *Ecole de Ponts*, 1882, p. 59; elles nous ont été signalées par le capitaine Brocard.

naître et à l'aide d'un triangle rectangle de cordes BCD, dont les côtés ont 3, 4 et 5 mètres, ou des équi-multiples de ces nombres, on détermine le pied B de la perpendiculaire AB, abaissée du point A sur la ligne BF. On promène ensuite le triangle de cordes tout tendu sur cette ligne BF, jusqu'à ce que l'un des côtés de l'angle droit, celui de 4 mètres par exemple, se trouvant sur la ligne BC on puisse voir le point A sur le prolongement de l'hypoténuse, ou côté de 5 mètres. La distance cherchée sera égale aux 3/4 de la longueur BE que l'on peut mesurer sur la rive, car

$$AB = BE \times \frac{FG}{EF} = \frac{3}{4} BE.$$

2° Déterminer un alignement AB perpendiculaire à la rive BE. Prendre BE égal à 40 mètres; EC égal à 10 mètres; mener CF perpendiculaire à BC jusqu'à sa rencontre avec l'hypoténuse :

$$AB = 4FC.$$

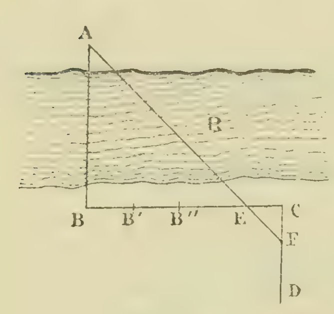


Fig. 141.

3° Remarquez sur la rive opposée un point A; cherchez à l'œil, sur la rive où vous êtes, un autre point B, perpendiculairement opposé au point A; mettez le côté d'un cordeau perpendiculaire dans la direction de AB, prenez des points C et D sur les prolongements des côtés à angle droit du cordeau, et à des distances arbitraires du point B: élevez, au moyen du cordeau, la perpendiculaire CE jusqu'au prolongement de AD; mesurez BC, BD et CE, et vous aurez $AB = \dfrac{BC \times BD}{CE - BD}$. En retranchant ensuite, de cette valeur, la distance du point B à la crête de la rive, vous obtiendrez la largeur de la rivière.

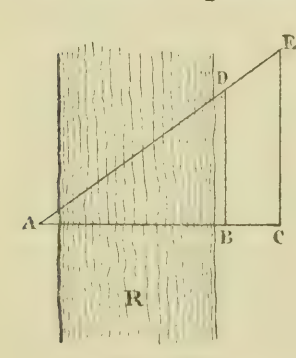


Fig. 142.

4° Si l'on n'a point de cordeau à perpendiculaire, on détermine comme ci-dessus les points A et B; on prend sur AB prolongé un point quelconque C; on choisit un point arbitraire

D hors de la direction AB ; on marque le point E, milieu de CD ; on cherche le point F, rencontre des alignements BD et AE, et on mesure BC, BF, DF ; or, on a FG : BF :: EG ou $\frac{BC}{2}$. AB, mais $FG = \frac{DF - BF}{2}$, donc

$$AB = \frac{BC \times BF}{DF - BF}.$$

L'opération est d'autant plus exacte que la différence DF — BF est plus grande.

Fig. 143.

5° Enfin, le procédé suivant ne donne aucun calcul à faire. Prenez de même, sur les rives, les points A et B perpendiculairement opposés ; à la droite, par exemple, de B marquez un point quelconque C, à partir du point B, et sur CD prolongé, rapportez la distance BC, de B en D ; marquez le point D ; prenez un point quelconque E sur l'alignement des points A et C ; et rapportez la distance EB sur la ligne EB prolongée de B en F ; cherchez le point G sur les directions de D et F et de B et A ; mesurez BG qui est égal à AB.

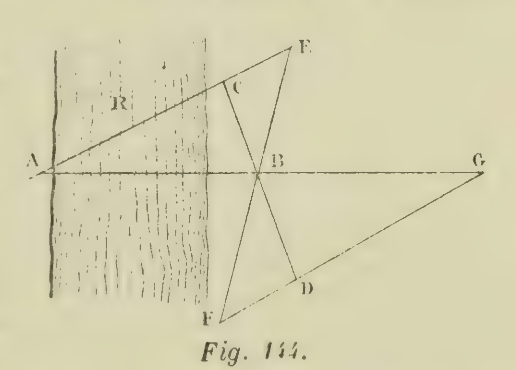


Fig. 144.

Si l'on avait fait $BD = \frac{1}{10}$ BC et $BF = \frac{1}{10}$ BE, on aurait eu

$$BG = \frac{1}{10} AB.$$

19. La Solution de Vauban. — Servois (*loc. cit.* p. 60) s'occupant du problème de la distance d'un point à un autre point inaccessible dit : « On connaît la méthode attribuée à Vauban : elle suppose la construction d'angles droits, ou au moins d'un angle égal à un autre et requiert un *chainage* assez long. » Mais il ne donne aucun renseignement sur cette construction.

Le procédé que Vauban indiquait (*) pour mesurer la distance de l'ouverture de la tranchée au chemin couvert n'est autre chose que la solution exposée plus haut (§ 18; 2°). Nous croyons intéressant, ne serait-ce qu'au point de vue historique de rapporter ici, dans ses termes mêmes, la solution de Vau-

---

(*) Vauban, *Traité de l'attaque des places*. Je dois ce renseignement à l'obligeance de M. Louis Liège d'Iray, lieutenant d'artillerie. L'exemplaire de Vauban que possède cet officier n'est pas daté; il a été imprimé chez *Barrois* et *Magimel, quai des Augustins, à Paris*. La question présente y est exposée au chapitre VI, lequel traite de l'*ouverture de la tranchée*, p. 50.

D'après les renseignements que nous communique à ce propos M. d'Iray, la première édition de l'ouvrage de Vauban, a dû être celle qu'a éditée Jombert, rue Dauphine, à Paris; Elle date de 1769. La bibliothèque de l'Ecole de Saumur possède un exemplaire de l'ouvrage en question ayant pour sous-titre : *Nouvelle édition revue, rectifiée, augmentée de développements, de notes et de planches; par F. P. Foissac, chef de brigade au corps du génie de la République française; à Paris, chez Magimel libraire pour l'art militaire et les sciences et les arts, quai des Augustins, près le Pont-Neuf; l'an troisième de la République.*

Dans cette édition, la question est traitée au chapitre VI, p. 131; mais le texte de Vauban a, en grande partie, disparu; l'ouvrage a été profondément remanié, mis au goût du jour, et, comme nous l'écrit M. d'Iray, c'est presque autant un ouvrage de Foissac, écrit sur le cadre du livre de Vauban, qu'une édition de Vauban.

Aux renseignements qui précèdent, nous ajouterons encore les suivants qui nous ont été communiqués par M. Bertrand, capitaine du génie à la section technique du ministère de la guerre.

Le manuscrit de Vauban sur l'attaque des places a été rédigé pour le duc de Bourgogne et présenté à ce Prince en 1704; la bibliothèque du ministère de la guerre possède cet ouvrage précieux revêtu de la signature de l'auteur. Des copies n'ont pas tardé à circuler dans toute l'Europe et une première édition parut à la Haye, imprimée par de Hondt, en 1737.

La dernière édition est celle qui fut publiée en 1829 (*Traité des sièges et de l'attaque des Places* par le maréchal de Vauban; nouvelle édition entièrement conforme au manuscrit présenté par l'auteur au duc de Bourgogne; par M. Augoyat, chef de bataillon du Génie; Paris. Anselin successeur de Magimel).

Nous devons ajouter que la solution de Vauban se trouve exposée, antérieurement, dans l'ouvrage, intitulé : R. P. Cl. Fr. Millet Dechales, e Societate Jesu, *Cursus seu mundus mathematicus universam Mathesin tribus tomis complectens*. — Lugduni M DC LXXIV. On trouve la solution, exposée depuis par Vauban, dans le volume en question, à la page 331 du livre Ier et dans la partie intitulée *Geometriæ practicæ*.

L'ouvrage en question a été cité par Chasles (Aperçu historique; pp. 272 et 423); il lui donne la date de 1690. — L'édition que nous avons eue sous les yeux est antérieure, comme l'on voit, à celle que Chasles a consultée.

ban. Il convient toutefois d'observer, comme le fait Servois, et la remarque a son importance, qu'elle n'exige nullement l'emploi de l'équerre ordinaire. Il suffit que les droites AB, CD (*fig.* 141) dont il est question soient parallèles; pour atteindre ce but, la fausse équerre suffit. Quant auc haînage nécessaire, contrairement à ce qu'en pense Servois, il est fort rapide; si l'on observe qu'il se réduit au relevé de la longueur CF et que les piquets fixés sur BC ne sont pas déterminés par des chaînages, mais simplement par un cordeau, plus ou moins long, que l'on porte successivement de B en B′, de B′ en B″, etc.; opération simple et rapide.

Quoi qu'il en soit, voici la solution en question; elle s'applique également bien aux grandes et aux petites distances. On observera seulement, dans le cas des grandes distances, qu'il faut augmenter le nombre des piquets placés sur BC. On peut, par exemple; placer dix piquets équidistants entre B et C; E représentant le dixième piquet, il suffit alors de multiplier CF par 10.

« Soit (*fig.* 141) A l'angle du chemin couvert et B le lieu où l'on veut ouvrir la tranchée après avoir pris garde à se mettre en lieu où l'on puisse avoir l'espace nécessaire à l'opération, il n'y a qu'à former l'angle droit B et tirer la ligne BC (avec des piquets) de 60 ou 80 toises, plus ou moins. Vous couperez cette ligne en 3 ou 4 parties égales. Cela fait, sur son extrémité C, formez un autre angle droit BCD alterne au premier et tirez la ligne CD indéterminément, alignez l'un des piquets de la transversale BC, comme E, avec l'angle du chemin couvert A. Vous aurez deux points qui serviront à faire trouver dans leur alignement le point F sur la ligne CD. Mesurez ensuite CF avec une toise pour connaître sa longueur; ensuite, si CE est le tiers de BE, prenez trois fois la longueur CF, vous aurez la distance AB connue en toises. »

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur aux Collège de Vire.

(*Suite*, voir p. 42.)

35. — Trouver le lieu des foyers des paraboles qui touchent deux droites rectangulaires OX, OY; la première en un point fixe A, la seconde en un point variable B.

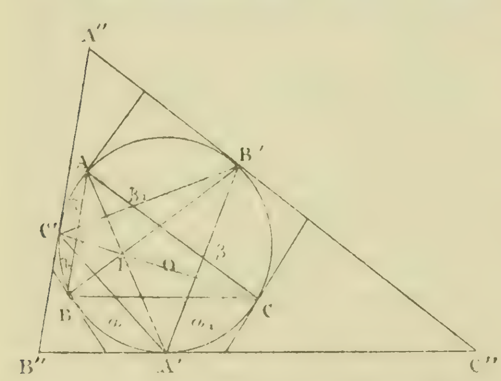
Cette question a été posée comme question de géométrie analytique à l'Ecole des Ponts et Chaussées (Cours préparatoires 1885). Elle est susceptible d'une solution géométrique très simple et élémentaire.

Le lieu est la circonférence du cercle décrit sur OA comme diamètre.

On peut la généraliser en supposant que l'angle des axes OX, OY est quelconque ; le lieu est alors l'arc d'un segment décrit sur OA et capable de l'angle des axes.

36. — Si l'on considère un triangle quelconque ABC ; son cercle circonscrit O ; A′, B′, C′ étant les milieux des arcs BC, AC, AB.

1° Les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point I centre du cercle inscrit dans ABC, orthocentre de A′B′C′.



2° Les triangles ABC, A′B′C′ donnent lieu, par les intersections de leurs côtés, à un hexagone tel que les droites qui joignent les sommets opposés de cet hexagone sont respectivement parallèles aux côtés du triangle ABC, et se coupent au même point I.

3° $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, étant les sommets de cet hexagone, dans un certain ordre : Les triangles $A\gamma\beta_1 = I\gamma\beta_1$; $B\alpha\gamma_1 = I\alpha\gamma_1$; $C\beta\alpha_1 = I\beta\alpha_1$, sont isocèles.

4° Les triangles $B'\beta\beta_1$, $A'\alpha\alpha_1$, $C'\gamma\gamma_1$, A′B′C′ sont semblables.

5° Les triangles : $I\alpha\alpha_1$, $I\beta\beta_1$, $I\gamma\gamma_1$, ABC sont semblables. La somme des rapports de similitude des trois premiers au quatrième est égal à l'unité. Il en résulte que la somme des rayons

des cercles inscrits ou circonscrits à ces trois triangles est égale à r ou R, etc.

6° Si on mène les tangentes, au cercle O, par les six points A, B, C, A′, B′, C′; ces six tangentes déterminent par leurs intersections un hexagone convexe circonscrit tel que les points de concours des côtés opposés sont sur une même ligne droite, polaire de I.

7° D'après le théorème de Brianchon, les droites qui joignent les sommets opposés de cet hexagone concourent en un même point. Ce point est le point I.

8° Les tangentes au cercle O, en A′, B′, C′, déterminent par leurs intersections un triangle A″B″C″ semblable à ABC et circonscrit au cercle O. Leur rapport de similitude est $\frac{R}{r}$; (ces lignes se rapportent à ABC).

9° Les tangentes en A, B, C, au cercle O en coupant les précédentes déterminent trois triangles vers A″, B″, C″; ces trois triangles sont semblables entre eux et à ABC; la somme de leurs rapports de similitude à A″B″C″ est 1. Il en résulte (comme dans 5°) que la somme des rayons de leurs cercles inscrits est égale à R, etc.

37. — Le réciproque du centre du cercle inscrit dans un triangle (Point de concours des anti-bissectrices de M. d'Ocagne, *Journal*, année 1880, p. 158) est le point tel que la somme des racines carrées de ses distances aux trois côtés est maximum.

38. — Construire géométriquement un triangle connaissant un angle et deux médianes. (Il y a deux cas à distinguer.)

39. — Trouver un nombre de deux chiffres qui soit égal à a fois le produit de ses chiffres, a étant entier.

Le problème n'est possible que pour les valeurs

$$a = 2, \quad a = 3, \quad a = 6, \quad a = 11.$$

Les nombres correspondants sont: 36, 15, 12, 11.

L'équation

$$10x + y = axy$$

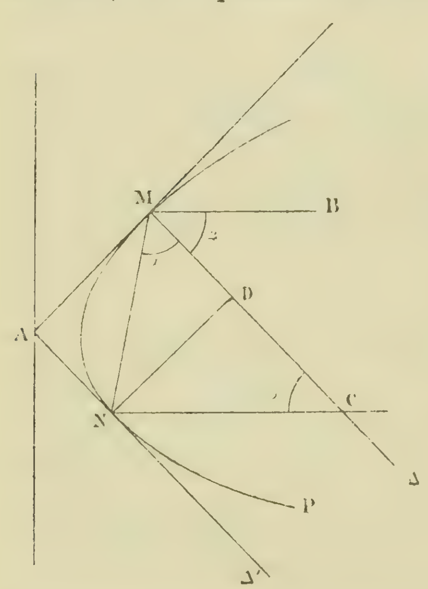
est d'ailleurs susceptible d'autres solutions; pour $a = 1$, $x = 11$, $y = 11$, pour $a = 2$, $x = 1$, $y = 10$.

QUESTION 145

Solution par M. A. Boutin, professeur au Collège de Vire.

Demontrer qu'une corde Δ *normale à une parabole* P *est égale à quatre fois la portion de la tangente* Δ' *parallèle à* Δ, *cette portion ètant comptée depuis le point de contact jusqu'au point de rencontre de* Δ' *avec la directrice.* (G. L.)

Soit M le point où Δ est normale, N le point de contact de Δ' et de P; menons MA tangente en M, MB, NC parallèles à l'axe; ND, parallèle à MA; enfin, tirons MN.



La droite NC rencontre Δ au milieu de cette corde, car NC est le diamètre conjugué à la direction Δ. Il suffit donc de prouver que MC = 2NA. L'angle MAN étant droit, A, d'après un théorème bien connu, est un point de la directrice. D'ailleurs MD = NA, la figure MAND étant un rectangle ; il suffit donc de prouverque le triangle MNC est isocèle. D'après un théorème connu, MN passe par le foyer.

Soit MB le diamètre du point M; la normale Δ est bissectrice de l'angle BMN; on a donc

$$\widehat{1} = \widehat{2};$$

mais

$$\widehat{2} = \widehat{3}:$$

donc

$$\widehat{1} = \widehat{3};$$

Le théorème est donc établi.

QUESTION 159

Solution par M.A. Boutin, professeur au Collège de Vire.

Construire un triangle connaissant l'angle A, *la somme* b + c *des côtés qui comprennent cet angle et un point* I *du côté opposé.*

Nous rappelons que si une droite BC (*) se meut dans le plan d'un angle BAC de telle sorte que

$$AB + AC = l,$$

l étant une quantité constante : 1° BC enveloppe une parabole P ; 2° cette parabole a pour axe la bissectrice de BAC et elle est tangente aux côtés AB, AC en des points H, H′ tels que

$$AH = AH' = l,$$

3° la tangente au sommet est la droite KK′, K et K′ désignant les milieux des côtés AH et AH′.

D'après cela, le foyer F de la parabole est déterminé par le cercle circonscrit au triangle AKK′ et par la bissectrice de l'angle BAC. On est alors ramené à un problème connu ; ce problème admet, en général deux solutions ; celles-ci sont réelles lorsque le cercle décrit sur IF comme diamètre rencontre KK′ en des points réels.

QUESTION 179

Solution par M. Henri Martin.

Sur une droite fixe OX, *on porte trois longueurs* OA′, OB′, OC′ *proportionnelles aux carrés des côtés d'un triangle ; puis on forme les angles* XA′M′, XB′N, XC′P *respectivement égaux aux angles opposés dans le même triangle.*

Démontrer :

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

1° *Que les trois droites* A'M, B'N, C'P *se rencontrent en un même point* T;

2° *Que les longueurs* A'T, B'T, C'T *sont proportionnelles aux rectangles* bc, ca, ab *des côtés;*

3° *Que la perpendiculaire* TQ *abaissée sur* OX *est d'une longueur proportionnelle au double de l'aire du triangle;*

4° *Que* OQ *est proportionnelle à* $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$;

5° *Que* OT *est proportionnelle à* $\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$;

6° *Que l'angle* XOT $= \theta$ *est égal à l'angle de Brocard c'est-à-dire déterminé par la relation*

$$\cot\theta = \cot A + \cot B + \cot C.$$

(Laisant.)

1° soit T le point où les deux droites A'M, B'N se rencontrent, joignons C'T. Dans les triangles A'B'T et C'B'T, on a

$$\frac{B'T}{\sin A} = \frac{OB' - OA'}{\sin(B - A)}, \quad \frac{B'T}{\sin y} = \frac{OC' - OB'}{\sin(y - B)},$$

en désignant par y l'angle TCX ;
on a donc

$$\frac{(OB' - OA')\sin A}{\sin(B - A)\sin y} = \frac{(OC' - OB')\sin y}{\sin(y - B)}.$$

En réduisant et en tenant compte de la relation

$$\frac{OA'}{\sin^2 A} = \frac{OB'}{\sin^2 B} = \frac{OC'}{\sin^2 C},$$

qui donne

$$\frac{OB' - OA'}{\sin^2 B - \sin^2 A} = \frac{OC' - OB'}{\sin^2 C - \sin^2 B}.$$

on a

$$\frac{OA'}{a^2} = \frac{OB'}{b^2} = \frac{OC'}{c^2},$$

et finalement en vertu de la proportionnalité de l'angle au sinus,

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sin A \sin B(\sin^2 A - \sin^2 B)}{\sin^2 C\sin(B-A) - \sin^2 B\sin(B-A) + \sin^3 A\cos B - \sin A\sin^2 B\cos B}$$

$$= \frac{\sin A \sin B(\sin^2 A - \sin^2 B)}{\sin(A - B)[\sin A\cos B\sin C + \sin^2 B - \sin^2 C]}$$

$$= \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A(\cos B\sin C + \sin B\cos C - \sin C\cos B)} = \operatorname{tg} C.$$

Ce qui prouve que l'angle XC'T est égal à l'angle C, ou, en d'autres termes, que la droite C'P passe par le point T commun aux deux droites A'M, B'N.

2° On a

$$\frac{A'T}{\sin B} = \frac{OB' - OA'}{\sin (B - A)},$$

d'où

$$A'T = \frac{\sin B}{\sin (B - A)}(OB' - OA')\cdot$$

Mais

$$OB' - OA' = \frac{OA'}{a^2}(b^2 - a^2).$$

De plus

$$\frac{b^2 - a^2}{bc} = \frac{\sin^2 B - \sin^2 A}{\sin B \sin C} = \frac{\sin (B + A) \sin (B - A)}{\sin B \sin C} = \frac{\sin (B - A)}{\sin B},$$

donc

$$A'T = \frac{OA'}{a^2}\, bc.$$

On trouverait de même

$$B'T = \frac{OB'}{b^2} ca,$$

$$C'T = \frac{OC'}{c^2}\, ab.$$

3° Dans le triangle rectangle A'TQ, on a

$$TQ = A'T \sin A = \frac{OA'}{a^2}\, bc \sin A = \frac{OA'}{a^2}\cdot 2S$$

4° On a

$$OQ = OA' + A'Q = OA' + TQ \operatorname{cotg} A.$$

$$= OA' + \frac{OA'}{a^2}\, bc \cos A$$

$$= \frac{OA'}{a^2}\,(a^2 + bc \cos A).$$

Or, de la relation

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

on tire

$$bc \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2},$$

ce qui donne

$$OQ = \frac{OA'}{a^2}\cdot\frac{a^2 + b^2 + c^2)}{2}.$$

5° On a, dans le triangle rectangle OTQ,

$$\mathrm{OT} = \sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2 + \overline{\mathrm{TQ}}^2} = \frac{\mathrm{OA}'}{a^2}\sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{4} + 4\mathrm{S}^2}$$

$$= \frac{\mathrm{OA}'}{a^2}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

$$= \frac{\mathrm{OA}'}{a^2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}.$$

6° Le triangle rectangle OTQ donne

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{TQ} \operatorname{cotg} \theta,$$

ou

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{TQ}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\mathrm{S}} = \frac{(a^2+b^2+c^2)\mathrm{R}}{abc}$$

$$= \frac{(b^2+c^2-a^2)\mathrm{R}}{abc} + \frac{(c^2+a^2-b^2)\mathrm{R}}{abc} + \frac{(b^2+a^2-c^2)\mathrm{R}}{abc}.$$

Or

$$\operatorname{cotg} \mathrm{A} = \frac{(b^2+c^2-a^2)\mathrm{R}}{abc}, \quad \operatorname{cotg} \mathrm{B} = \frac{(c^2+a^2-b^2)\mathrm{R}}{abc},$$

$$\operatorname{cotg} \mathrm{C} = \frac{(b^2+a^2-c^2)\mathrm{R}}{abc}.$$

Donc

$$\operatorname{cotg} \theta = \operatorname{cotg} \mathrm{A} + \operatorname{cotg} \mathrm{B} + \operatorname{cotg} \mathrm{C}.$$

NOTA. — Solutions analogues par MM. Hoffbauer, collège de Soissons; A. Chapellier, lycée de Nancy; Ignacio Beyens, capitaine du génie à Cadix; l'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique).

QUESTION 180

Solution par M. J. CHAPRON.

Sur une droite fixe OX, *on porte trois longueurs* OA′, OB′, OC′ *égales aux côtés d'un triangle; puis on forme les angles* XA′M′, XB′N, XC′P *respectivement égaux aux moitiés des angles opposés dans le même triangle.*

Démontrer :

1° Que les trois droites A′M, B′N, C′P *se rencontrent en un même point* T;

2° Que les longueurs A′T, B′T, C′T *sont égales aux distances des sommets du triangle au centre du cercle inscrit;*

3° Que la perpendiculaire TQ *abaissée sur* OX *est égale au rayon du cercle inscrit ;*

4° Que OQ *est égale au demi-périmètre ;*

5° Que XOT $= \varphi$ *est déterminé par la relation*

$$\operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$$

(Laisant.)

1° Les droites A′M, B′N, C′P coupent la perpendiculaire OY à OX en A″, B″, C″, nous allons vérifier que (OA′B′C′) = (OA″B″C″) ou que

$$\frac{b}{b-a} : \frac{c}{c-a} = \frac{b \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{b \operatorname{tg} \frac{B}{2} - a \operatorname{tg} \frac{A}{2}} : \frac{c \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{c \operatorname{tg} \frac{C}{2} - a \operatorname{tg} \frac{A}{2}},$$

$$\frac{(c-a) \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{(b-a) \operatorname{tg} \frac{B}{2}} = \frac{c \operatorname{tg} \frac{C}{2} - a \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{b \operatorname{tg} \frac{C}{2} - a \operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} - \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} - \operatorname{tg} \frac{B}{2}}.$$

Remplaçons les côtés par sin A, sin B, sin C.

$$\frac{\sin C - \sin A}{\sin B - \sin A} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} - \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} - \operatorname{tg} \frac{B}{2}},$$

$$\frac{2 \sin \frac{C-A}{2} \cos \frac{C+A}{2}}{2 \sin \frac{B-A}{2} \cos \frac{B+A}{2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}} = \frac{\sin \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} \times \frac{\cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Supprimons les facteurs communs :

$$\frac{\cos \frac{C+A}{2}}{\cos \frac{B+A}{2}} \times \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2}} = 1, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \times \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2}} = 1.$$

2° Dans le triangle TA′B′, la proportionnalité des côtés aux sinus des angles opposés permet de calculer TA′.

$$\mathrm{TA}' = (b - a)\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{B-A}{2}}.$$

D'autre part, dans le triangle rectangle AIK, $\mathrm{AI} = \dfrac{\mathrm{AK}}{\cos\frac{A}{2}}$.

Il faut prouver que AI = TA′, c'est-à-dire que

$$\frac{p-a}{b-a} = \frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-A}{2}},$$

$$\frac{\sin B + \sin C + \sin A}{\sin B - \sin A} = \frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-A}{2}} = \frac{\sin\frac{B+A}{2} + \sin\frac{B-A}{2}}{\sin\frac{B-A}{2}}$$

$$1 + \frac{\sin C}{\sin B - \sin A} = 1 + \frac{\sin\frac{B+A}{2}}{2\cos\frac{B-A}{2}},$$

$$\frac{\sin C}{2\cos\frac{B+A}{2}} = \frac{\sin\frac{B+A}{2}}{1},$$

$$\sin C = 2\sin\frac{B+A}{2}\cos\frac{B+A}{2} = \sin(B+A).$$

3° $\quad \mathrm{TP} = \mathrm{A'T}\sin\frac{A}{2}; \qquad \mathrm{IK} = \mathrm{AI}\sin\frac{A}{2},$

donc

$$\mathrm{TQ} = \mathrm{IK}.$$

4° $\quad \mathrm{OQ} = \mathrm{OA}' + \mathrm{A'Q} = a + \mathrm{TA}'\cos\frac{A}{2}$

$$= a + \mathrm{AK} = a + p - a = p.$$

5° $\quad \cot\varphi = \dfrac{\mathrm{TQ}}{\mathrm{OQ}} = \dfrac{p}{r}.$

D'autre part, le triangle rectangle AIK donne

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} = \frac{AK}{AI} = \frac{p-a}{r},$$

de même

$$\operatorname{cotg} \frac{B}{2} = \frac{p-b}{r}, \qquad \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \frac{p-c}{r};$$

d'où

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \frac{3p-2p}{r} = \frac{p}{r} = \operatorname{cotg} \varphi.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Henri Martin, lycée Condorcet ; A. Chapellier, lycée de Nancy ; Ignacio Beyens, capitaine du Génie à Cadix ; L'abbé E. Gelin, au collège Saint-Quirin à Huy (Belgique).

QUESTIONS PROPOSÉES

246. — Soit AB un diamètre pris dans un cercle C. Un cercle tangent en A à AB coupe la tangente au cercle C, menée par le point B, en M et en M'. Les droites AM et AM' coupent le cercle C respectivement en P et en P'. La droite BP coupe AM' en Q, et la droite BP' coupe AM en Q'. Démontrer que la droite QQ' se confond avec le diamètre du cercle C qui est perpendiculaire à AB. *(d'Ocagne.)*

247. — Dans le triangle rectangle ABC on mène la médiane AM et la perpendiculaire AD sur l'hypoténuse : on désigne par r, r_1, r_2, ρ_1, ρ_2 les rayons des cercles inscrits dans les triangles ABC, ABD, ADC, ABM, ACM et par h la hauteur AD et on propose de démontrer que l'on a :

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{r} + \frac{2}{h}; \quad \frac{r_1}{\rho_1} + \frac{r_2}{\rho_2} = 2.$$ *(G. Russo.)*

248. — Un segment de droite variable se déplace entre deux axes fixes de telle façon que sa projection orthogonale sur l'un des deux axes reste constante. 1° Quel est le lieu du milieu de ce segment de droite? 2° Quel est l'enveloppe de ce segment de droite?

Réponse. — 1° Une droite, 2° une parabole facile à déterminer ; on le voit aisément par la simple géométrie.

(d'Ocagne.)

249. — Si N est un multiple de 3, on prend, dans la suite décroissante, $N - 1$, $N - 2$, ... 2.1, tous les nombres qui ne sont pas multiples de 3, les deux premiers avec le signe +, les deux suivants avec le signe −, les deux suivants avec le signe +, etc.... et on fait la somme algébrique. Démontrer que le résultat est égal à n.

(d'Ocagne.)

Note. — Le Directeur-Gérant du Journal, à propos d'articles *non signés* reçus récemment, avertit ses correspondants :

1° Qu'il répond à toutes les lettres qui lui sont adressées et, sauf empêchement, dans le plus bref délai possible.

2° Que les manuscrits qu'on lui soumet et qu'il ne croit pas devoir insérer sont renvoyés aux auteurs, avec des annotations explicatives.

3° Que le nom des auteurs ne figure pas dans les solutions, ou en tête des articles publiés, lorsqu'ils en témoignent le désir.

Il est donc, dans tous les cas, de l'intérêt des auteurs de signer les articles qu'ils lui adressent.

Enfin, les réclamations ou les demandes ne concernant pas la rédaction, doivent être envoyés à M. Delagrave.

Rectifications. — Page 25, ligne 8, en remontant :

Au lieu de $1\ \bar{4}'\ 1\ 1\ 1$ *lisez* $1\ \overline{4'}\ 1\ \bar{1}\ 1.$

Page 28, ligne 14 :

Lisez

$$(-3 + a) + (-2 + a)x + (1 - a + a^2)x^2,$$

au lieu de

$$(-2 + a)x + (1 - a + a^2)x^2 ;$$

Même page, ligne 17 :

Lisez $4\ \bar{4}\ 4,$ *au lieu de* $4\ 4\ 4,$

et

$1\ \bar{1}\ 1'\ \bar{4}\ 1,$ *au lieu de* $1\ \bar{1}\ 1'\ 4\ 1.$

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7410-7.

NOTE SUR LES COUPLES

Par M. **Bourgarel Paul**, à Antibes.

Dans les cours de Mécanique, la théorie des couples peut servir à établir la théorie générale de la réduction des forces appliquées à un corps solide invariable. De cette dernière théorie, on peut déduire, comme cas particulier, la théorie générale des forces parallèles. Mais alors, pour que cette déduction soit légitime, il faut que la théorie des couples ait été faite sans la considération des forces parallèles. Voici comment on peut démontrer, par la considération seule des forces concourantes, les propriétés fondamentales du couple.

Remarquons tout d'abord que, le point d'application d'une force pouvant être placé en un point quelconque de sa direction, nous pouvons supposer que la droite qui joint les points d'application des forces du couple, constitue le bras de levier du couple.

Cela posé, nous démontrerons les propositions suivantes.

I. — *On ne change pas l'action d'un couple en le faisant tourner, dans son plan, autour du milieu de son bras de levier.*

Soient en effet le couple PABQ *(fig. 1)*, O le milieu de AB, et A′B′ la droite obtenue en faisant tourner AB, d'un angle quelconque, autour du point O. Joignons AA′, BB′.

Décomposons la force AP en deux autres : l'une AM dirigée suivant AB ; l'autre AR dirigée suivant A′A ; décomposons la force BQ d'une manière analogue et appelons BN, BS, ses deux composantes. Il est évident que les deux forces AM, BN sont égales et directement opposées et, par suite, se font équilibre. Si donc nous transportons en A′ et B′ les forces égales AR, BS, le couple proposé se trouve remplacé par le couple R′A′B′S′. La force

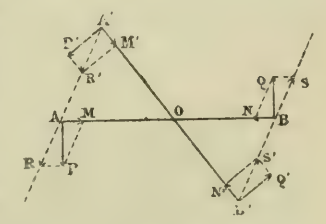


Fig. 1.

A′R′ peut se décomposer en deux autres A′M′, A′P′, dirigées respectivement suivant A′B′, et suivant la direction perpendiculaire. De même B′S′ se décompose en B′N′ et B′Q′. Or les deux forces A′M′, B′N′ se font équilibres; de plus A′P′ = AP comme il résulte de l'égalité des deux triangles rectangles PAM, P′A′R′. De même B′Q′ = BQ. Donc le couple P′A′B′Q′ n'est autre que le couple PABQ que l'on a fait tourner autour du point O.

II. — *Un couple peut être remplacé par un autre, dont le bras de levier coïncide avec le sien, et ayant même sens et même moment que lui.*

Soit en effet le couple PABQ *(fig. 2)*, et O le milieu de AB. Menons par les points A et B deux droites parallèles AX et BY. Décomposons la force AP en deux autres, l'une AS dirigée suivant AB, l'autre AR dirigée suivant AX; décomposons la force BQ d'une manière analogue et appelons BU, BT ses deux composantes. Les deux forces AS et BU se font équilibre et le couple proposé est remplacé par le couple RABT. Abaissons OA′B′ perpendiculaire sur AX et transportons en A′ et B′ les forces AR, BT. La proposition sera démontrée si nous prouvons que les deux couples PABQ, R′A′B′T′ ont le même moment, car le bras de levier A′B′ peut être appliqué sur AB en vertu de la proposition I. Or, on a

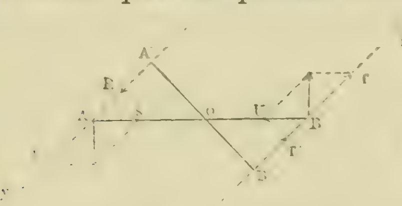


Fig. 2.

$$\text{moment PABQ} = 2\text{AP} \times \text{AO}.$$
$$\text{moment R'A'B'T'} = 2\text{A'R'} \times \text{A'O}.$$

Il faut donc démontrer que:

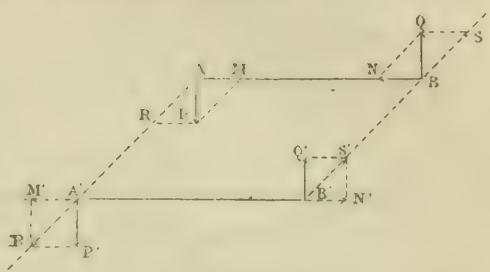
$$\text{AP} \times \text{AO} = \text{A'R'} \times \text{A'O} \quad \text{ou} \quad \text{AP} \times \text{AO} = \text{AR} \times \text{A'O}.$$

C'est ce qui résulte de la similitude des triangles rectangles RAP, AA′O.

III. — *On peut transporter un couple, parallèlement à lui-même, dans son plan.*

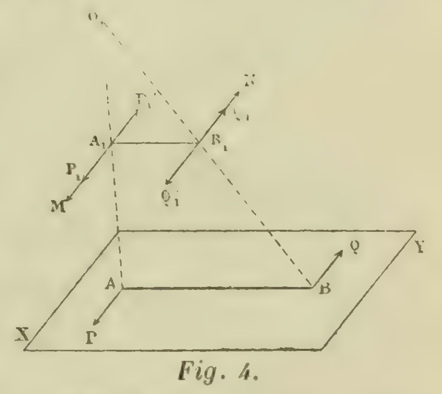
Soit, en effet, le couple PABQ *(fig. 3)* et A′B′ une droite égale et parallèle à AB. Joignons AA′, BB′. Décomposons la

force AP en deux autres, l'une AM dirigée suivant AB, l'autre AR dirigée suivant AA'; décomposons la force BQ, d'une manière analogue, et appelons BN, BS ses deux composantes ; les deux forces AM, BN se font équilibre et les forces AR, BS peuvent se transporter en A' et B' où elles se décomposent, respectivement, en deux autres suivant A'B' et la direction perpendiculaire. Soient A'M' et A'P', les composantes de A'R'; B'N' et B'Q' les composantes de B'S'; A'M', et B'N' se font équilibre et comme l'on a évidemment : A'P' = AP = B'Q' = BQ, la proposition est démontrée.


Fig. 3.

IV. — *On peut transporter un couple, parallèlement à lui-même, dans un plan parallèle à son plan.*

Soit en effet le couple PABQ *(fig. 4)* situé dans le plan XY. Soit A_1B_1 une droite de l'espace parallèle à AB, mais non égale à AB. Joignons AA_1, BB_1 qui se rencontrent en O. Appliquons, en chacun des points A_1, B_1, deux forces égales en grandeur à AP, directement opposées, et parallèles à AP. Soient P_1, P_1', Q_1, Q_1' les extrémités de ces forces. Déplaçons le couple PAA_1P_1', dans son plan, et modifions-le de manière à lui donner OA_1 pour bras de levier. Les forces du couple ainsi formé auront pour grandeur $AP \times \frac{AA_1}{OA_1}$, car le moment du couple reste le même. Faisons subir au couple BQB_1Q_1' une transformation analogue ; les nouvelles forces seront égales à $AP \times \frac{BB_1}{OB_1}$. Or $\frac{AA_1}{OA_1} = \frac{BB_1}{OB_1}$. Les deux nouveaux couples qui ont, respectivement, pour bras de levier OA_1 et OB_1


Fig. 4.

ont donc des forces égales. Dès lors, les deux forces appliquées en O se font équilibre et les autres forces appliquées en A_1 et B_1 s'ajoutent aux forces A_1P_1 et B_1Q_1 pour former un couple MA_1B_1N qui peut remplacer le couple proposé. Le moment de ce couple est égal à :

$$A_1B_1 \times A_1M = A_1B_1\left(AP + AP \times \frac{AA_1}{OA_1}\right) = A_1B_1 \times AP \times \frac{OA}{OA_1}$$
$$= AP \times AB = \text{mom. de } PABQ.$$

Dès lors, en modifiant convenablement ce nouveau couple, dans son plan, nous arriverons à lui donner un bras de levier égal et parallèle à AB; et les forces qui le constitueront seront égales aux forces du couple proposé. La proposition se trouve ainsi démontrée.

N.-B. — Cette dernière démonstration pourrait être modifiée en prenant le point O à égale distance des deux points A, B. On choisirait alors le point O avant de déterminer A_1B_1.

VARIÉTÉS

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 79).

20. La largeur de la rivière *(Cas particuliers).* — Les solutions que nous venons de reproduire supposent, toutes, la possibilité d'effectuer, sur la rive où l'on est placé, des tracés exigeant l'emploi d'une certaine étendue de terrain. Nous examinerons ici quelques cas particuliers, se rencontrant dans la pratique, et pour lesquels les solutions précédentes pourraient se trouver en défaut.

1° Nous supposerons d'abord qu'on arrive en B, à la rivière

qu'il s'agit de traverser, par une route Δ, normale à sa direction, et bordée de terrains dans lesquels on ne peut pénétrer (groupes de maisons, marécages, collines, etc....). On vise le point A, opposé à B, et, après avoir jalonné la direction AB, on relève, suivant BOA′, avec la fausse équerre, l'angle BOA. La largeur est égale à BA′.

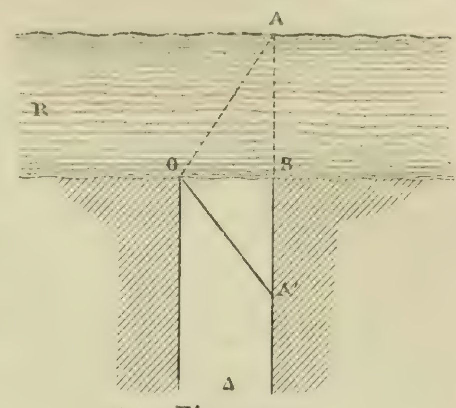


Fig. 145.

2° Admettons maintenant que, dans les conditions précédentes, la route Δ soit oblique à la direction de la rivière. Alors, on peut appliquer la solution que nous venons d'indiquer et, après avoir effectué le jalonnement OC, perpendiculaire à OA, et le jalonnement BC, perpendiculaire à la direction de la rive, au point B, opposé au point A déjà visé, on a

$$AB = \frac{\overline{OB}^2}{BC}.$$

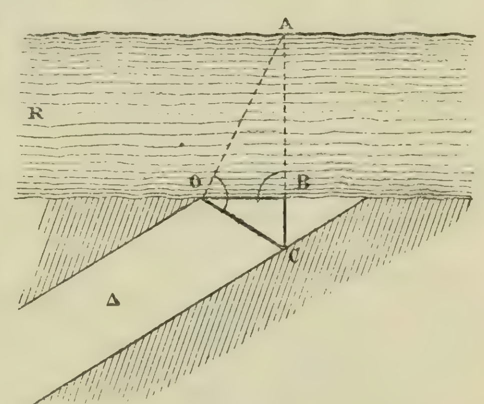


Fig. 146.

3° Imaginons enfin que l'on ne puisse opérer que sur une bande de terrain, assez étroite, située entre la rivière et un terrain U, inaccessible. Soient O, A deux points opposés; on vise A, d'un point P arbitrairement choisi; soient PQ la perpendiculaire à AP, et OQ la perpendiculaire abaissée de O sur PQ.

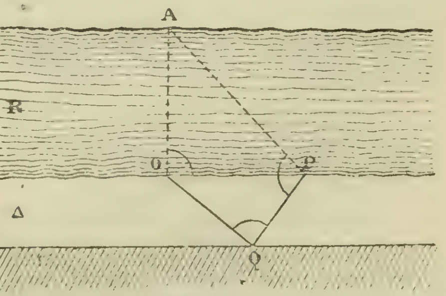


Fig. 147.

Les triangles semblables AOP, OQP donnent

$$OA = PQ.\frac{OP}{OQ}.$$

En prenant le point P, suffisamment près de O, on aura un triangle OQP aussi petit que l'on voudra et cette remarque permet de voir que la construction indiquée sera toujours réalisable, si étroite que soit la partie accessible du terrain. Pour rendre l'approximation obtenue aussi bonne que possible, on doit choisir P de façon que Q soit à peu près sur la ligne de séparation de Δ et de U; en général, on doit éviter, autant du moins que les circonstances le permettent, de prendre sur le terrain une base de trop grande ou de trop petite dimension. Dans le premier cas, les mesures sont longues, et il y a perte de temps; dans l'autre cas, les erreurs commises sont relativement plus grandes, et les résultats obtenus n'ont pas une approximation suffisante.

Remarque. — La traversée d'un fleuve se présente, à tous les points de vue, dans des conditions préférables lorsqu'elle peut s'effectuer devant une île. A ce propos, un problème se présente, que nous allons résoudre; c'est celui dans lequel on se propose de déterminer la largeur du bras qui est situé de l'autre côté de l'île.

Ayant jalonné une droite Δ, perpendiculairement à la direction de la rivière, et passant par le point C, extrémité de l'île; d'un point O, arbitrairement choisi sur la rive accessible on vise : 1° l'extrémité C; 2° le point D qui, sur la rive opposée, est déterminé par l'observateur placé sur Δ et visant C. Avec la fausse équerre, on relève successivement les angles HOC, HOD que l'on reporte en HOC′, HOD′. La droite C′D′ représente la largeur demandée.

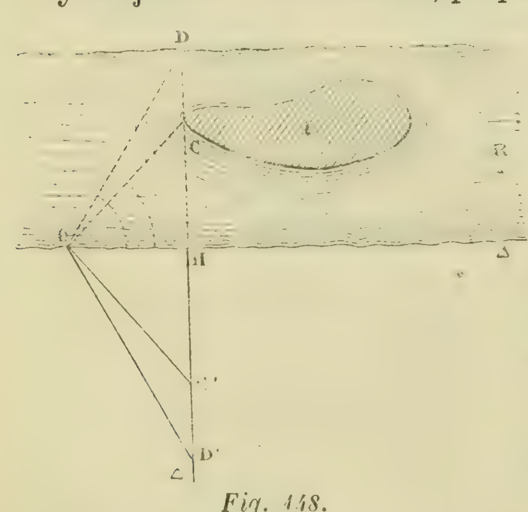


Fig. 118.

Si la rive de l'île qui est invisible est supposée sinueuse, la distance cherchée pourra être plus faible que CD; mais, dans tous les cas, on est assuré de pouvoir traverser le second

bras avec un pont dont la longueur est, tout au plus, égale à CD; c'est un renseignement qui peut être utile et que l'on peut désirer connaître, avant de commencer le passage.

21. — Examen du cas où les rives ne sont pas parallèles. — Soient Δ, Δ' les rives que nous ne supposons plus parallèles; il s'agit de jeter, sur elles, un pont partant d'un point déterminé O.

On rencontre une première difficulté qui tient à ce que la direction du pont devant être perpendiculaire à Δ', pour des raisons évidentes, il faut, avant tout, déterminer la direction de Δ' par une droite tracée dans la partie accessible du terrain. Nous donnerons, dans un chapitre suivant, diverses solutions du problème qui se présente ici; mais, sans renvoyer à ces solutions, nous indiquerons, dès maintenant, celle qui nous paraît la mieux appropriée au cas présent.

Du point O, visons sur Δ' deux points A et B; puis ayant relevé l'angle AOB marchons sur Δ jusqu'à ce que nous trouvions un point O' tel que AO'B = AOB. Le quadrilatère AOB'B étant inscriptible, si l'on relève l'angle BOO' et si, par le point O', on trace O'x tel que AO'x = BO'O = BAO', la droite O'x est évidemment parallèle à Δ'. Le pont jeté, du point O, sur Δ', doit donc avoir la direction de la droite Oz, droite perpendiculaire à O'x.

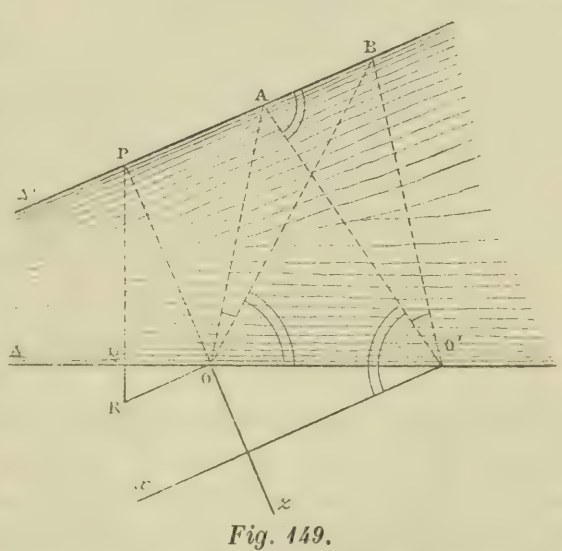


Fig. 149.

Il faut encore déterminer la longueur du pont. Le point P qui, sur Δ', représente l'extrémité du pont, peut être déterminé par la ligne de visée zO; il suffit d'observer un arbre, une pierre, ou le moindre objet, placé, sur Δ', dans le prolongement de zO. Il est donc possible de déterminer avec

l'équerre ordinaire le point Q, où P se projette sur Δ. Les angles POR, OQR étant droits, on a

$$PO = OR \times \frac{OQ}{QR}.$$

Cette relation permet de calculer PO.

22. Le passage au confluent. — Imaginons que deux rivières R′, R″ viennent se réunir en C, pour former une troisième rivière R. On peut se proposer d'effectuer le passage en coupant successivement les rivières R′, R″; dans cette hypothèse, un problème que nous n'avons pas encore traité apparaît ici, et l'on peut demander d'évaluer la largeur de R″.

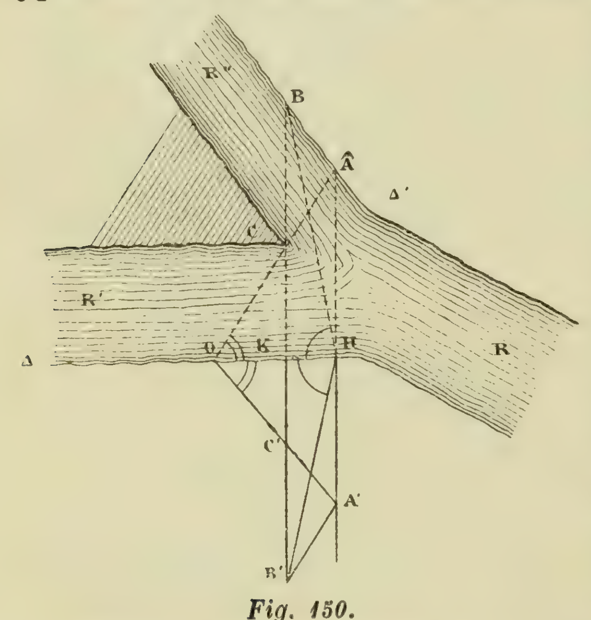


Fig. 150.

Ayant, d'un point O de la rive de Δ, visé un point A de Δ′ sur le prolongement de OC, on jalonne les droites HA′, KB′ perpendiculaires à Δ et passant respectivement par les points A et C. Avec la fausse équerre, on relève les angles AOH, BHO que l'on reporte en HOA′, B′HO, comme l'indique la figure. Il est évident que le triangle A′B′C′ est égal au triangle ABC et que, par suite, la largeur de R″ est égale à la distance de C′ à B′A′.

23. Le cas de la rivière ou du fossé inaccessible. — Il peut arriver que l'on ne puisse, immédiatement du moins, approcher de la rivière; on veut pourtant, pour le moment favorable, préparer toutes les choses nécessaires au passage et, dans ce but, on désire connaître sa largeur. Dans d'autres cas, le problème se présentera sous une autre forme et l'on se

proposera de déterminer la largeur d'un fossé dont les bords sont visibles, mais inaccessibles. Pour fixer le langage, nous raisonnerons dans cette seconde hypothèse.

Nous dirons d'abord comment on peut tracer une parallèle aux bords Δ, Δ′ du fossé considéré,

Soit O le point d'observation (*); distinguons sur Δ deux

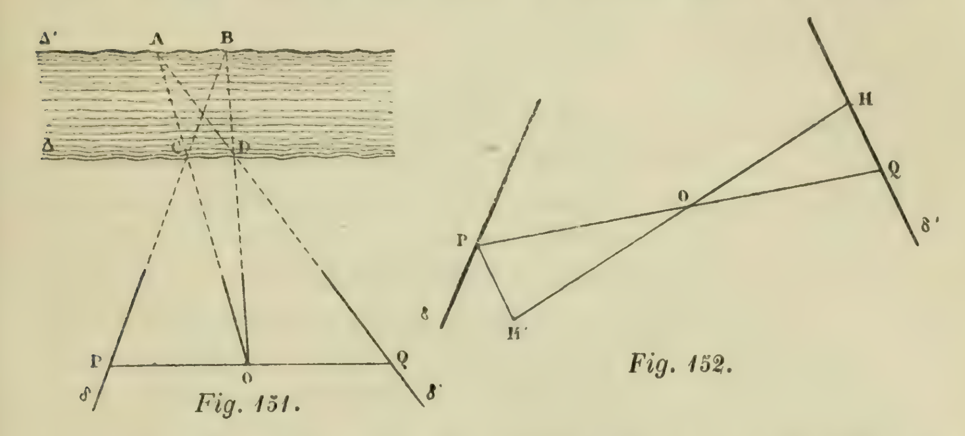


Fig. 151.
Fig. 152.

points C, D ; et, sur Δ′, deux autres points A, B, tels que les droites AC, BD passent par O; il est évident que la parallèle inconnue est une droite PQ partagée par le point O et par les droites BC, AD en deux parties égales. On peut jalonner les segments δ, δ′ des droites BC, AD qui sont situées dans la région accessible et résoudre alors le problème connu : mener, par O, une droite partagée en deux parties égales par les segments δ, δ′.

Pour résoudre ce problème : par O *(fig. 152)*, on mène une droite arbitraire, et l'on prend OH′ = HO; si, par H′, on mène H′P parallèle à δ′, en joignant PO, on a la transversale demandée.

Cela posé, menons MNRS parallèlememt à OC et prenons RS = MN; nous avons OT = CA et en abaissant de T la perpendiculaire TH sur PO, TH représente la largeur du fossé.

(*) Pour ne pas donner à cette figure des dimensions trop grandes, les rapports des différentes lignes ne sont pas observés. Ainsi, dans la présente figure, on doit supposer, pour avoir une image approchée des choses réelles, que le point O est beaucoup plus éloigné de Δ que ne le montre notre dessin. Cette observation s'applique à plusieurs autres figures de cet ouvrage.

Deuxième solution. — La solution précédente exige un certain effort pour la réalisation des jalonnements qu'elle nécessite; mais il faut observer que le problème que nous traitons ici est, relativement, difficile et il ne paraît pas aisé de le résoudre sans une certaine complication de lignes et de mesures.

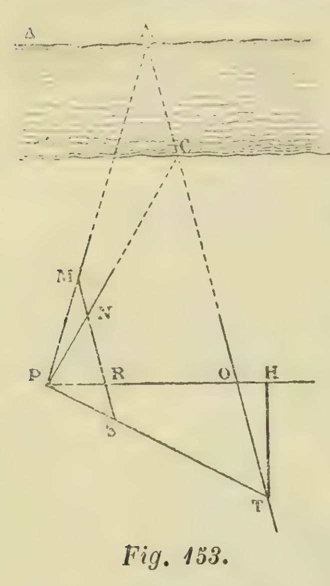


Fig. 153.

La solution que nous allons indiquer maintenant n'est pas d'ailleurs sensiblement plus simple que la précédente, mais elle devrait être substituée à celle-ci dans le cas où les droites BC, AD que nous avons considérées tout à l'heure, feraient entre elles un angle trop grand ; auquel cas il résulterait, pour PQ, une longueur trop considérable.

Observons sur Δ′ un point A, et, sur Δ, deux points B, C. Ayant tracé les droites 1 et 2, du moins dans la partie accessible, puis les parallèles 3, 4, 5, 6, 7 et 8; nous obtenons trois points A′, B′, C′; la largeur du fossé est égale à la distance A′H′ du point A′ à la droite B′C′.

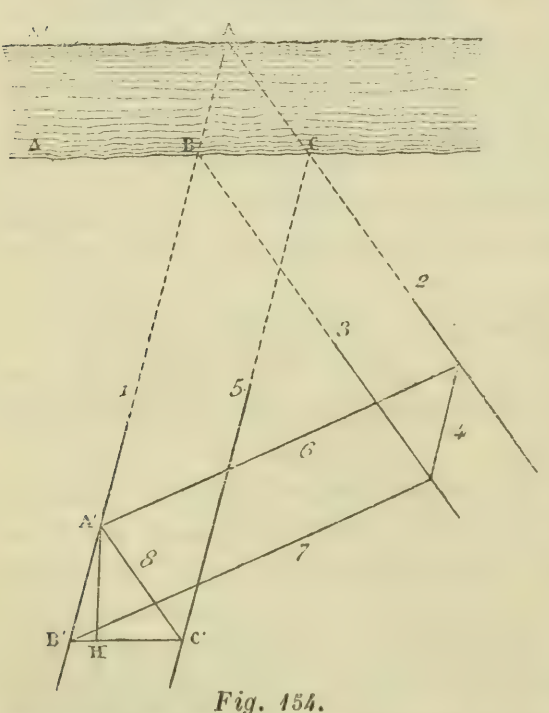


Fig. 154.

24. Le pont oblique. — La nature du terrain et la violence du courant peuvent, dans certains cas, et bien que cette disposition soit généralement défavorable, nécessiter la pose d'un pont oblique à la direction du fleuve. Dans ce cas, après avoir fixé les points A

et B entre lesquels on veut jeter le pont, on peut demander de calculer la longueur de ce pont, c'est-à-dire la distance AB.

Soit C la projection de B sur Δ; on jalonne AD perpendiculairement à la direction AB et l'on a

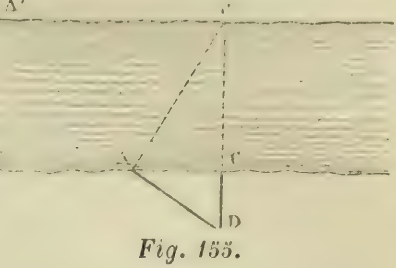


Fig. 155.

$$AB = AD \frac{AC}{CD}.$$

(A suivre.)

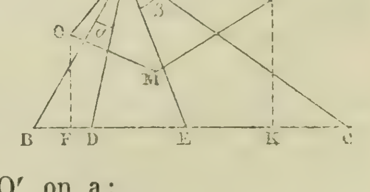
EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Vire

(*Suite*, voir p. 86.)

40. — Si l'on considère les trois paraboles qui sont respectivement tangentes à deux des côtés d'un triangle, la corde des contacts étant le troisième côté ; les secondes intersections de ces paraboles deux à deux, ont lieu sur les médianes du triangle.

41. — Construire géométriquement un triangle connaissant l'angle A, les segments BD, CE du côté opposé, sachant que les angles BAD, CAE ont des valeurs données α, β.



OO' sont les centres des cercles circonscrits à BAD, CAE; OM, O'M sont les perpendiculaires abaissées de OO' sur AD, AE. Dans le quadrilatère AOMO' on a :

$$\widehat{OAO'} = 2A - (\alpha + \beta)$$

d'ailleurs la connaissance de BD, α, CE, β entraîne celle de OA, O'A et des distances OF, O'K de O, O' à BC. On peut donc construire le triangle AOO', on décrit les circonférences OA, O'A, les circonférences OF, O'K; on mène à ces dernières une tangente commune qu'on arrête aux points B et C, extrémités des cordes qu'elle détermine dans les premières.

42. — On considère un triangle quelconque ABC, par les

milieux de ses côtés, on leur élève intérieurement des perpendiculaires de longueur Ka, Kb, Kc. On joint les extrémités A′, B′, C′, de ces perpendiculaires : A′ B′ C′ étant le triangle minimum ainsi obtenu, a', b', c', S′ ses côtés et sa surface démontrer :

1° La valeur de K qui détermine le minimum A′ B′ C′ est :

$$K = \frac{1}{6} \cot\theta;$$

2° $$12S' = S(\cot^2\theta - 3);$$

3° $$\overline{A'B'}^2 + \overline{C'A'}^2 + \overline{B'C'}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2$$
$$= S \cot\theta\left(1 + \frac{1}{9}\cot^2\theta\right);$$

4° $$\frac{OA'}{a} + \frac{OB'}{b} + \frac{OC'}{c} = 0;$$

5° $3(a'^2 + b'^2 + c'^2) = S \cot\theta(\cot^2\theta - 3) = 12S' \cot\theta;$

6° L'angle de Brocard du triangle A′ B′ C′, est le même que l'angle de Brocard θ du triangle ABC ;

7° Les trois droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes ;

8° Les triangles ABC, A′B′C′ ont même centre de gravité.

1° Les perpendiculaires aux milieux des côtés de ABC se coupent en O, centre du cercle circonscrit. On a, aisément,

$$OA' = R(\cos A - 2K \sin A), \text{ et de même } OB', OC'.$$

Ensuite

$$A'B'C' = OA'B' + OA'C' - OB'C',$$

car on voit aisément que O sera à l'extérieur de A′ B′ C′ ; l'aire de ces trois triangles s'exprime aisément en fonction de OA′, OB′, OC′ et des angles ABC ; on trouve alors pour l'expression de S′ une fonction du deuxième degré en K, qui donne pour le minimum de S′ la valeur indiquée de K.

2° et 4° s'obtiennent en portant dans les expressions générales de S′, OA′, OB′, OC′, la valeur de K, trouvée.

3°, 5° s'obtiennent en calculant $\overline{A'B'}^2$, $\overline{AA'}^2$, a'^2 dans les triangles ABA′, ABC′... les calculs sont très symétriques et mènent, assez rapidement, aux résultats.

6° Résulte immédiatement de 5°, car dans tout triangle

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S \cot\theta.$$

7° Résulte d'un théorème général ; la démonstration directe peut se faire, pour ce cas particulier, sans difficulté.

(A suivre.)

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

SESSION D'OCTOBRE-NOVEMBRE 1886

PARIS

Mathématiques.

23 octobre. — Calculer la hauteur h, abaissée du sommet de l'angle droit, et les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant : l'hypoténuse a et le rapport m de la somme des côtés de l'angle droit, à la hauteur h.

Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un d'eux divise l'autre.

26 octobre. — On donne l'équation

$$\text{tg}\, b \cos x - \sin a \sin x = \text{tg}\, b \cos a.$$

On propose d'en déduire $\text{tg}\,\frac{x}{2}$, en fonction de $\text{tg}\,\frac{a}{2}$ $\text{tg}\,\frac{b}{2}$.

Réduction à deux, des forces qui agissent sur un corps solide.

28 octobre. — Étant donnés un cercle et une tangente PP'; mener une corde AB, parallèle à la tangente, et telle que le périmètre du rectangle ABDE formé par la corde, la tangente PP', et les perpendiculaires abaissées de ses extrémités sur la tangente, soit donné.

Étant donné $\sin a$, trouver $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$.

3 novembre. — Déterminer les coefficients p et q de manière que le maximum de $\frac{x^2+px+q}{x}$ soit le nombre donné a, et que le minimum soit le nombre donné b.

Inégalité des jours et des nuits.

5 novembre. — Dans un triangle rectangle, on connaît les côtés de l'angle droit b et c. Déterminer, sur l'hypoténuse, un point tel que la somme des carrés de ses distances aux deux côtés donnés soit égal à m^2.

Mouvement annuel apparent du soleil.

8 novembre. — Étant donné un triangle rectangle ABC, déterminer sur l'hypoténuse un point m tel que les surfaces latérales des cônes engendrés par BM, tournant autour de AB, et par CM, tournant autour de AC, soient dans un rapport donné k. On donne $AB = c$, $AC = b$; on demande de calculer $BM = x$ et de montrer que le problème a toujours une solution, et une seule.

Centre de gravité d'un trapèze homogène.

9 novembre. — Démontrer comment on mesure le volume d'un tronc de prisme triangulaire.

Etablir la formule qui permet de calculer, dans un triangle ABC, la valeur de $\text{tg}\,\frac{A}{2}$, en fonction des côtés a b c.

POITIERS

28 mars 1887. — Un triangle isocèle est inscrit dans une circonférence de rayon R; quelle doit être sa hauteur pour que, tournant autour d'une parallèle à la base menée par le sommet, il engendre le volume le plus grand possible.

— On veut extraire la racine carrée d'un nombre π à un dix millième près, combien de chiffres décimaux suffit-il de prendre dans l'expression de π.

BIBLIOGRAPHIE

Cours élémentaire de mathématiques. Compléments de trigonométrie et méthodes pour la résolution des problèmes par F. J. (Tours; Alfred Mame et fils; Paris, Poussielgue frères; 1886). — Ce livre fait partie d'une série, vraiment intéressante, d'ouvrages dont plusieurs ont été analysés déjà dans ce journal et dont l'ensemble constitue un cours complet de mathématiques élémentaires, en prenant le mot dans son sens le plus élevé. *Les compléments*, que nous signalons à nos lecteurs, se font tout particulièrement remarquer par l'abondance des matières qui y sont développées; c'est, à notre connaissance, le recueil le plus riche qui ait été publié sur les exercices si variés de la trigonométrie. Les Anglais eux-mêmes, qui excellent dans cette science, n'ont pas, croyons-nous, dans ce genre, de livre plus complet. L'auteur a eu la patience, et le mérite, de rechercher les questions de trigonométrie qui ont été posées, à diverses époques, aux examens des Ecoles et à ceux des Baccalauréats; près de 1600 Problèmes ou Exercices se trouvent ainsi, ou résolus, ou proposés. La multiplicité et la variété des sujets traités ne permet pas de faire une analyse quelconque de cet ouvrage, mais nous le recommandons avec confiance aux professeurs et aux élèves; ils y trouveront une mine inépuisable de questions.

L'auteur nous permettra de lui signaler deux ou trois points qui sont à retoucher. 1° La définition des séries convergentes n'a pas toute la rigueur désirable; ainsi: il ne suffit pas que, dans une série alternée, le dernier terme tende vers zéro, pour que cette série soit convergente; il faut encore que les termes, au moins à partir d'un certain rang, aillent sans cesse en diminuant. 2° L'exercice 518, de la page 365, renferme une erreur assez grave. L'équation

$$\rho^2 = ab \sin\omega \cos\omega \qquad (1)$$

ne se décompose pas, comme il est dit, en deux équations

$$\rho = a \sin\omega, \qquad \rho = b \cos\omega;$$

et le lieu qui correspond à l'équation (1) n'est pas, comme l'auteur l'a avancé, un système de deux cercles, mais bien une lemniscate de Bernoulli.

Quoiqu'il en soit, quelques fautes d'inattention auxquelles il est si difficile d'échapper, quand on écrit un volume aussi étendu, erreurs destinées d'ailleurs à disparaître dans une nouvelle édition, n'ôtent rien au réel mérite d'un ouvrage qui rendra certainement de grands services à ceux qui le consulteront.

G. L.

QUESTION 128

Solution, par A. Boutin, professeur au Collège de Vire.

Si l'équation $x^2 - px + q = 0$, *admet deux racines entières et positives :*

1° L'expression : $\dfrac{q(q+p+1)(4q+2p+1)}{36}$ *représente un entier, décomposable en une somme de* q *carrés ;*

2° L'expression : $\dfrac{q^2(q+p+1)^2}{16}$ *représente un entier, décomposable en une somme de* q *cubes ;*

3° Le nombre $q^2(4q+2p+1)$ *est décomposable en une somme algébrique de* 4q *carrés.* (Laisant.)

1° Soient x', x'', les racines de l'équation proposée ; A, l'expression considérée. On a, d'après des relations bien connues :

$$A = \frac{x'x''(x'x'' + x' + x'' + 1)(4x'x'' + 2x' + 2x'' + 1)}{36}$$

$$= \frac{x'x''(x'+1)(x''+1)(2x'+1)(2x''+1)}{36}$$

$$= \frac{x'(x'+1)(2x'+1)}{6} \times \frac{x''(x''+1)(2x''+1)}{6}.$$

Sous cette forme, on reconnaît que chacun des deux facteurs de A représente la somme des carrés des x' et des x'' premiers nombres entiers ; chacun de ces facteurs étant entier, il en est de même de leur produit. Le premier facteur est la somme de x' carrés, le second, la somme de x'' carrés ; leur produit est donc une somme de $x'x''$ ou q carrés.

2° Soit B l'expression considérée,

$$B = \frac{x'^2x''^2(x'x'' + x' + x'' + 1)^2}{16}$$

$$= \frac{x'^2x''^2(x'+1)^2(x''+1)^2}{16}$$

$$= \frac{x'^2(x'+1)^2}{4} \times \frac{x''^2(x''+1)^2}{4}.$$

Sous cette forme, on reconnaît que chacun des facteurs de B est la somme des cubes : l'un, des x'; l'autre, des x'' premiers nombres entiers; chacun de ces facteurs étant entiers, il en est de même de leur produit. Le premier facteur est une somme de x' cubes, le second de x'' cubes; leur produit est donc une somme de $x'x''$, ou q cubes.

3° Soit C l'expression considérée.

$$C = q^2(4q + 2p + 1) = (2x' + 1)x'^2.(2x'' + 1)x''^2.$$

Je vais montrer que $x'^2(2x' + 1)$ est une somme algébrique de $2x'$ carrés.

On a

$$x'^2(2x' + 1) = \frac{2x'(2x' + 1)(4x' + 1)}{6} - 2\frac{x'(x' + 1)(2x' + 1)}{6},$$

c'est-à-dire la somme des carrés des $2x'$ premiers nombres, moins deux fois la somme des carrés des x' premiers nombres; ou

$$x'^2(2x' + 1) = (2x')^2 + (2x' - 1)^2 + \ldots (x' + 1)^2$$
$$- x'^2 - (x' - 1)^2 \ldots - 2^2 - 1^2.$$

Chacun des deux facteurs de C est donc une somme algébrique : le premier de $2x'$, le second de $2x''$ carrés; leur produit est donc une somme algébrique de $2x'.2x'' = 4x'x'' = 4q$ carrés.

Remarques. — 1° On peut encore observer que *l'expression :* $q(4q + 2p + 1)$ *est une somme algébrique de* $4q$ *carrés.*

En effet, soit D l'expression en question, on a :

$$D = q(4q + 2p + 1) = x'x''(2x' + 1)(2x'' + 1)$$
$$= x'(2x' + 1) \times x''(2x'' + 1).$$

Je vais prouver que $x'(2x' + 1)$ est une somme algébrique de $2x'$ carrés. On a

$$x'(2x' + 1) = \frac{x'(2x' + 1)(2x' + 2 - 2x' + 1)}{3}$$
$$= \frac{x'(2x' + 1)[2(x' + 1) - (2x' - 1)]}{3}$$
$$= \frac{2x'(x' + 1)(2x' + 1)}{3} - \frac{x'(4x'^2 - 1)}{3}$$
$$= 4.\frac{x'(x' + 1)(2x' + 1)}{6} - \frac{x'(4x'^2 - 1)}{3}.$$

Mais, d'après des formules connues : $\frac{x'(x'+1)(2x'+1)}{6}$ est la somme des carrés des x' premiers nombres; $\frac{x'(4x'^2-1)}{3}$ est la somme des carrés des x' premiers nombres impairs; donc

$$x'(2x'+1) = 4[x'^2 + (x'-1)^2 + \ldots + 1^2] - [1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots]$$
$$= (2x')^2 - (2x'-1)^2 + (2x'-2)^2 - \ldots - 3^2 + 2^2 - 1^2.$$

Le second membre est donc une somme algébrique de $2x'$ carrés.

Les facteurs de D sont une somme algébrique : l'un de $2x'$ carrés, l'autre de $2x''$ carrés ; leur produit est donc une somme algébrique de $4x'x''$ ou $4q$ carrés.

2° *Le nombre :* $E = q^2(16q + 12p + 9)$ *est une somme algébrique de* 4q *cubes.*

On a $E = x'^2(4x'+3) \times x''^2(4x''+3).$

Il suffit de montrer que $x'^2(4x'+3)$ est une somme algébrique de $2x'$ cubes. Or

$$x'^2(4x'+3) = 8.\frac{x'^2(x'+1)^2}{4} + x'^2(2x'^2-1).$$

On voit que $x'^2(4x'+3)$ est, d'après des formules connues, égal à la somme des cubes des x' premiers nombres pairs, diminuée de la somme des cubes des x' premiers nombres impairs.

On pourrait former d'autres expressions qui seraient des sommes algébriques de quatrième, cinquième puissances.

QUESTION 131

Solution par M. A. Boutin, professeur, au collège de Vire.

Si l'on désigne par m *la somme des trois quantités,*

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z},$$

la relation :

$$4R^3 - 4R^2m + Rm^2 - 2xyz = 0,$$

sera vérifiée dans un triangle, si :

1° x, y, z représentent les distances du point de concours des hauteurs aux trois côtés, et R le rayon du cercle circonscrit.

2° x, y, z représentent les distances du centre du cercle inscrit aux sommets, et R le diamètre du cercle circonscrit.

La relation précédente se décompose en facteurs, pour y = z.

(Em. Lemoine.)

1° On a :

$$x = 2R \cos B \cos C,$$
$$y = 2R \cos A \cos C,$$
$$z = 2R \cos A \cos B.$$

(Formules connues ou faciles à démontrer.)

D'où $\quad m = 2R(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C).$

La relation à vérifier est alors

$$4R^3 - 8R^3 . \Sigma \cos^2 A + 4R^3 (\Sigma \cos^2 A)^2 - 16 R^3 \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C = 0.$$

Posons, pour abréger,

$$\cos A \cos B \cos C \equiv P.$$

Une formule connue donne

$$\Sigma \cos^2 A = 1 - 2P.$$

Il faut donc vérifier que

$$4 - 8(1 - 2P) + 4(1 - 2P^2)^2 - 16P^2 \equiv 0,$$

ce qui est manifeste.

2° On a

$$x = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}, \quad y = \frac{r}{\sin \frac{B}{2}}, \quad z = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}};$$

d'où

$$m = r \left(\frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} + \frac{\sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \right)$$

$$= \frac{r \Sigma \sin^2 \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{r \Sigma \sin^2 \frac{A}{2}}{Q};$$

en posant, pour abréger,

$$Q \equiv \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Une formule connue donne, d'ailleurs,

$$r = 2R \times Q,$$

et la relation à vérifier devient :

$$m = 2R\,\Sigma \sin^2 \frac{A}{2},$$

d'où

$$4R^3 - 8R^3\,\Sigma \sin^2 \frac{A}{2} + 4R^3 \left(\Sigma \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{2r^3}{Q} = 0,$$

ou $$4 - 8\,\Sigma \sin^2 \frac{A}{2} + 4\left(\Sigma \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2 - 16Q^2 = 0.$$

Mais on a $$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos A),$$

d'où $$\Sigma \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,\Sigma \cos A.$$

Une formule connue donne encore

$$\Sigma \cos A = 1 + 4Q,$$

d'où $$\Sigma \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - 2Q.$$

La formule à vérifier est donc

$$1 - 2(1 - 2Q) + 1(1 - 2\,Q)^2 - 4Q^2 = 0,$$

identité manifeste.

Si, dans la relation donnée, on remplace m par sa valeur en x, y, z, qu'on fasse $y = z$, que l'on chasse les dénominateurs, on arrive à mettre l'expression sous la forme

$$y^4(2Rx - y^2)(2R^2x - 4Rx^2 - Ry^2 + 2x^3) = 0,$$

ce qui prouve la décomposition annoncée en facteurs.

QUESTIONS 188 ET 197

Solution par M. Louis Prince, élève au Lycée de Grenoble.

Démontrer que le point réciproque de l'orthocentre d'un triangle est point de Lemoine du triangle formé en menant par les sommets des parallèles aux côtés opposés.

(E. Vigarié et G. Boubals.)

Soient K_1' le point réciproque de l'orthocentre H, $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ les hauteurs de ABC; $A_1'B_1'C_1'$ le triangle obtenu en menant par les sommets des parallèles aux côtés opposés. Si δ_a est la distance de K_1' à $B_1'C_1'$, on a :

$$\frac{\delta_a}{A\alpha} = \frac{AK_1'}{A\alpha'}.$$

Le triangle $A\alpha'C$ coupé par la transversale $BK_1'\beta'$ donne :

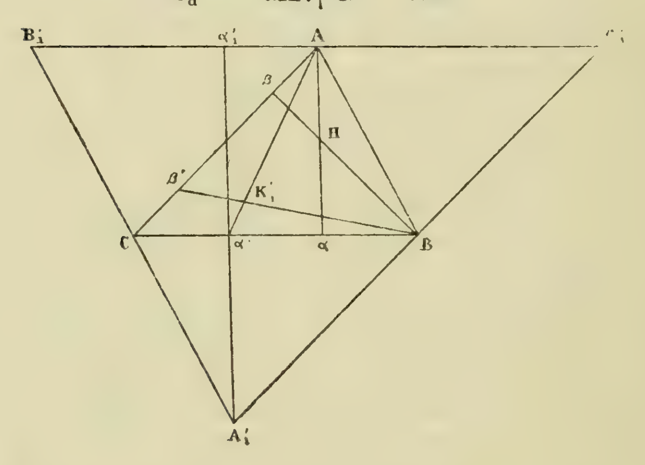
$$\frac{AK_1'}{K_1'\alpha'} = \frac{BC}{B\alpha'} \cdot \frac{\beta'A}{\beta'C} = \frac{BC.C\beta}{C\alpha.\beta A},$$

ou

$$\frac{AK_1'}{A\alpha'} = \frac{AK_1'}{AK_1' + K_1'\alpha'} = \frac{BC.C\beta}{C\alpha.\beta A + BC.CB},$$

d'où

$$\frac{BC}{\delta_a} = \frac{\alpha C.\beta A}{\alpha A.\beta C} + \frac{BC}{A\alpha}.$$



Ainsi

$$\frac{BC}{\delta_a} = \frac{AC.A\beta + \overline{BC}^2}{A\alpha.BC} = \frac{2AC.A\beta + 2\overline{BC}^2}{4S};$$

mais $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AC.A\beta,$

on a donc

$$\frac{BC}{\delta_a} = \frac{a}{\delta_a} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S},$$

ou, enfin,

$$\frac{\delta_a}{2a} = \frac{8S}{4(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

C'est la relation qui déterminerait la position du point de Lemoine du triangle $A_1'B_1'C_1'$; donc K_1' est bien le point de Lemoine de $A_1'B_1'B_1'$.

Note. — On peut donner une solution simple de cette question en s'appuyant sur le lemme suivant (V. *Journal Elém.*, 1885, p. 265). Les droites joignant le milieu du côté d'un triangle au milieu de la hauteur correspondante concourent au point de Lemoine du triangle.

La hauteur $A_1'\alpha'$ du triangle $A_1'B_1'C_1'$ est coupée par BC : en son milieu en un point α' conjugué isotomique de α et A est le milieu de $B^{1'}C_1'$; donc, d'après le lemme précédent, K_1' est le point de Lemoine du triangle $A_1'B_1'C_1'$. E. V.

Nota. — La même question a été résolue par MM. H. Martin, élève au lycée Condorcet et C. Gralleau, maître auxiliaire au lycée de Marseille ; Ignacio Beyens (Cadix).

Elle a été traitée par M. E. Lemoine d'abord en 1873 au congrès de Lyon, puis dans le *Journat de Mathématiques spéciales* (1883, pp. 5, 27, etc.).

QUESTION 191

Solution par X...

On considère un carré ABCD *et une droite quelconque* Δ *dans son plan. Des points* A, B, C, D *on abaisse des perpendiculaires* AA', BB', CC', DD' *sur* Δ. *En désignant par* A *et* C *deux sommets opposés, démontrer que* $\overline{BB'}^2 + \overline{DD'}^2 - 2AA' \times CC'$ *est une quantité constante quelle que soit la position de* Δ

Déduire de cette remarque une application relative à l'enveloppe des droites qui jouissent de la propriété que la somme des carrés des distances de l'une d'elles à deux points fixes soit constante.

(Ed. Bordage).

L'énoncé étant ainsi rectifié (*) ; Soient a, le côté du carré, et A_1, B_1. D_1, les points de rencontre de AA', BB', DD' avec une parallèle à Δ menée par le sommet C (**). On a

$$\begin{aligned} a^2 &= \overline{BB_1}^2 + \overline{DD_1}^2 = (BB' - CC')^2 + (DD' - CC')^2 \\ &= \overline{BB'}^2 + \overline{DD'}^2 - 2CC'(BB' + DD' - CC') \\ &= \overline{BB'}^2 + \overline{DD'}^2 - 2CC'.AA' \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

(*) La relation donnée par l'énoncé était $\overline{BB'}^2 + \overline{DD'}^2 - 2AA'.BB'$; une faute d'impression s'y était glissée.

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

Donc l'enveloppe des droites telles que la somme $\overline{BB'}^2 + \overline{DD'}^2$ soit constante et égale à $2k^2$, n'est autre chose que l'enveloppe des droites telles que $AA'.CC' = 2k^2 - a^2$. On sait que cette enveloppe est une conique ayant les points A et C pour foyers, k pour demi-grand axe et $\sqrt{2k^2 - a^2}$ pour demi-petit axe.

Solutions analogues par MM. Chapron, G. Bourdier et Louis Prince, lycée de Grenoble; Henri Martin, lycée Condorcet.

QUESTION 192

Solution par X.

Un segment de droite AB *contenu dans l'angle droit* (*) XOY *est tel que la parallèle* OZ *menée par le point* O *à la droite* AB, *est située dans l'angle* XOY. *Soient* a, a_1, α *les projections orthogonales de* A *respectivement sur* OX, OY, OZ; b, b_1, β *les projections orthogonales de* B *sur les mêmes axes. Si l'on désigne par* S *la surface de celui des trapèzes* AabB, Aa_1b_1B *qui est coupé par la droite* OZ, *par* S′ *la surface de l'autre trapèze, et par* σ *la surface du rectangle* AαβB, *démontrer que l'on a :* $S = S' + \sigma$.

Soient A′, B′ les points d'intersection de Aa, Bb avec OZ en supposant que OZ traverse le trapèze $AabB$ (**).

On a

$$S = AA'B'B + A'abB'$$
$$= \sigma + A'abB'$$

Faisons glisser le trapèze Aa_1b_1B, parallèlement à OY, de manière que A, B coïncident avec A′, B′. Soient a_2b_2 les nouvelles positions de a_1b_1.

On a

$$A'abB' = OB'b - OA'a = OB'b_2 - OA'a_2 = A'b_2b_2B' = A'a_1b_1B' = S';$$

et la proposition est démontrée.

Solution analogue, par M. A. Boutin, professeur au collège de Vire.

(*) Condition essentielle sous-entendue par l'énoncé.

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

QUESTION 195

Par les sommets d'un triangle ABC *on mène des parallèles aux côtés ; et, par les sommets* $A_1B_1C_1$ *du triangle ainsi obtenu, on mène encore des parallèles aux côtés de* ABC. *Démontrer que si, par le point de concours des bissectrices du troisième triangle* $A_2B_2C_2$, *on mène les parallèles aux côtés, ces droites déterminent, sur les côtés du triangle* ABC, *les points qui sont les sommets d'un hexagone circonscriptible à un cercle.* (G. Boubals.)

Cette question a été résolue par M. E. Lemoine *(Journal de Math. spéciales)*, 1886, pp. 9-11).

Le point par lequel on mène les parallèles aux côtés du triangle est le point de Nagel du triangle $A_1B_1C_1$. Les associés de ce point donnent lieu à des propositions analogues à la proposée. E. Vigarié.

QUESTION 196

Solution par Giovanni Russo, à CATANZARO (Italie).

Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur plus petit multiple commun.

On prouve aisément que deux nombres ont le même plus grand commun diviseur que leur somme et leur plus petit multiple commun. D'après cela, avec les données du problème, on peut calculer le plus grand commun diviseur des deux nombres que l'on cherche : alors, la question est ramenée à la suivante, laquelle est bien connue : *Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit.*

Solutions analogues par MM. Blessel, conducteur des Ponts et Chaussées; Henri Martin, élève au lycée Condorcet; de Times; Cartucoli, professeur au collège de Sisteron.

Nota. — Cette question avait été retirée parce qu'elle avait été proposée déja dans ce Journal. On trouvera une solution plus détaillée (année 1877, p. 351).

QUESTIONS PROPOSÉES

250. — On considère un triangle OA_1B_1 et le cercle Δ_1, de rayon R_1, circonscrit à ce triangle. On mène, à Δ_1, une tangente, anti-parallèle de A_1B_1 dans le triangle OA_1B_1 ; cette droite rencontre les côtés OA_1, OB_1 aux points A_2, B_2.

On obtient ainsi un triangle OA_2B_2 et, à ce nouveau triangle, correspond un cercle circonscrit Δ_2, de rayon R_2.

Opérant sur OA_2B_2, comme il vient d'être fait avec OA_1B_1, et ainsi de suite, on obtient une série de cercles

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_p.$$

Démontrer : 1° que les centres des cercles

$$\Delta_1, \Delta_3, \ldots$$

sont distribués sur une droite OZ, et que ceux des cercles

$$\Delta_2, \Delta_4, \ldots$$

sont aussi sur une droite OZ′ ;

2° que les rayons de trois cercles consécutifs Δ_{p-2}, Δ_{p-1}, Δ_p vérifient la relation de recurrence

$$R_p\, R_{p-2} = 2R_{p-1}^2,$$

et déduire de là que

$$R_p = 2^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} \times \frac{R_2^{p-1}}{R_1^{p-2}};$$

R_1 et R_2 vérifiant d'ailleurs l'égalité

$$R_2 h = 2R_1^2;$$

dans laquelle h désigne la hauteur issue de O, dans le triangle OA_1B_1. *(G. L.)*

Rectifications. — 1° Les sujets de compositions indiqués, page 60, comme ayant été proposés à Bordeaux et à Poitiers au *Baccalauréat spécial,* ont été donnés au *Baccalauréat ès sciences complet;*

2° p. 96, ligne 6: au lieu de n lisez N.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 8974-7.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

SUR QUELQUES CERCLES REMARQUABLES

(CERCLES DE NEUBERG ET DE M'CAY).

Par M. **Émile Vigarié.**

I

CERCLES DE NEUBERG (*)

1. **Définition.** — Étant donné un triangle ABC, si l'on construit, sur l'un des côtés, des triangles ayant même angle de Brocard que le triangle ABC, le sommet libre décrit une circonférence.

Les trois circonférences ainsi obtenues, que nous désignerons par N_a, N_b, N_c sont appelés *Cercles de Neuberg*, du nom du savant professeur de l'Université de Liège, qui, le premier, a étudié ces cercles et les a signalés à l'attention des géomètres.

Ces cercles remarquables jouissent de propriétés intéressantes que nous allons faire connaître, en utilisant des notes que M. Neuberg a bien voulu mettre à notre disposition.

2. **Théorème I.** — *Si sur le côté* BC *du triangle* ABC

(*) On peut consulter sur les cercles de Neuberg et de M'Cay les ouvrages suivants :

J. Neuberg. — *Mathesis*, tome II 1882 pp. 94, 76, 157, 186.

J. Casey. — *A Treatise on Analytical Geometry*, 1885 pp. 73, 107, 120, 248 256, 258-259, 326; *A Sequel to Euclid*, 4me édit., 1886 pp. 207-208, 213-214.

M'Cay. — *Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. XVIII pp. 453-470. Le mémoire a pour titre : *On three Circles related to a triangle.*

Les *Cercles de Neuberg et de M'Cay* dont il est ici question ne sont pas des cas particuliers des *Cercles de Tücker*, comme on pourrait le croire d'après ce que nous avons dit (J.-E. 1886 p. 227).

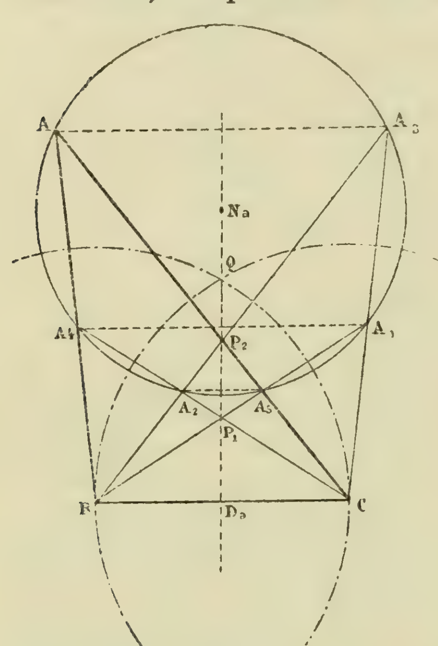
Les cercles que nous avions alors en vue, bien que dûs à MM. Neuberg et M'Cay, ont reçu d'autres noms : nous les étudierons d'ailleurs avec les *Cercles de Lemoine et de Taylor* dans un prochain article.

on construit les triangles

$$BCA_1, \quad CA_2B, \quad A_3CB, \quad CBA_4, \quad BA_5C$$

équiangles avec ABC (*), *les points* A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *sont sur une même circonférence* (**).

En effet, les points A et A_3, A_1 et A_4, A_2 et A_5 sont symétriques par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de BC, donc le trapèze $AA_3A_1A_4$ est isocèle et par suite inscriptible. Le quadrilatère $AA_3A_2A_4$ est aussi inscriptible, par conséquent la circonférence AA_3A_4 passe par les points A_1 et A_2. On démontrerait de même qu'elle passe par le point A_5.



Remarque. — Il est facile de voir que *le triangle* AA_2A_1 *est directement semblable et le triangle* $A_3A_5A_4$ *inversement semblable à* ABC.

Corollaire I. — *Si sur une même base* BC *on construit trois triangles isocèles* PBC, P_1BC, P_2BC *tels que les angles à la base comptés du même côté de* BC *et dans le même sens, aient une somme égale à* π, *les côtés s'entrecoupent en six points d'une même circonférence.*

Cette proposition ne diffère du théorème I que par la forme donnée à l'énoncé.

Corollaire II. — *Les puissances des points* B *et* C *par rapport au cercle* AA_1A_2 *sont égales à* $\overline{BC}^2$.

(*) Lorsqu'il s'agira de triangles semblables ou de triangles homologiques, nous aurons soin de placer les sommets homologues dans le même ordre. Ainsi, pour le triangle BCA_1 comparé à ABC : B est l'homologue de A ; C, l'homologue de B ; et A_1, l'homologue de C.

(**) Ce théorème a été énoncé pour la première fois par M. J. Neuberg (*Mathésis*, 1882, pp. 94, 157.)

En effet, de la similitude des triangles ABC, CBA_4 on conclut :

$$\overline{BC}^2 = BA_4.BA.$$

3. Théorème II. — *Étant donné deux cercles égaux* (B) *et* (C) *dont chacun passe par le centre de l'autre, si l'on décrit un troisième cercle* N_a *coupant orthogonalement les premiers et que l'on joigne un point quelconque* A *de* N_a *aux centres* B *et* C *des premiers cercles, les sommets des triangles, semblables à* ABC, *et construits sur* BC, *appartiennent également au cercle* N_a.

En effet, d'après le théorème I, les sommets de ces triangles se trouvent sur une circonférence passant par A et coupant orthogonalement les cercles décrits de B et C comme centres avec BC pour rayon. Or, il n'y a qu'une seule circonférence coupant à angle droit les cercles (B) et (C) et passant par A. Le théorème II est donc démontré.

Le théorème II qui est le réciproque du théorème I peut se démontrer directement de la manière suivante :

Soient A_4 et A_3 les points de rencontre du cercle N_a avec AB et AC. L'égalité

$$\overline{BC}^2 = BA_4.BA$$

qui résulte de ce que les cercles (N_a) et (B) sont orthogonaux entraîne la similitude des triangles ABC, CBA_4.

Pour la même raison ABC est semblable à BA_3C, les droites CA_4, BA_3 rencontrent le cercle N_a en deux points A_2, A_1 sommets de triangles semblables à ABC. De même les droites BA_2, CA_1 doivent rencontrer la circonférence N_a en des points sommets de triangles semblables à ABC et comme il n'y a plus qu'un seul triangle de cette espèce, BA_2, CA_1 se rencontrent sur le cercle N_a.

Corollaire. — *Si un cercle* N_a *coupe orthogonalement deux cercles* (B) *et* (C) *dont chacun passe par le centre de l'autre, on peut inscrire au cercle* N_a *une infinité d'hexagones tels que les côtés passent alternativement par les centres des cercles* (B) *et* (C).

Remarque. — Lorsque les points B et C sont donnés, le cercle N_a est déterminé par son centre qu'on peut prendre

arbitrairement sur la perpendiculaire élevée au milieu de BC, le carré de son rayon est égal à

$$\overline{N_aB}^2 - \overline{BC}^2.$$

Lorsque le cercle N_a est donné, le point B est arbitraire et l'on obtient le point C en traçant le diamètre N_aP dont la distance à B est égale à la moitié de la tangente issue de B et en prenant le symétrique de B par rapport à ce diamètre.

4. Théorème III. — *Étant donné un triangle* ABC, *le cercle* N_a *qui passe par* A *et dont les puissances par rapport à* B *et à* C *sont égales à* $\overline{BC}^2$ *jouit de la propriété que les triangles qui ont pour base* BC *et dont le sommet est sur la circonférence* N_a *ont même angle de Brocard que* ABC. (J. Neuberg, *Mathésis*, 1882, pp. 94, 186).

En effet les éléments qui fixent le cercle N_a par rapport à BC ne dépendent que du côté BC et de l'angle ω de Brocard.

Soit D_a le milieu de BC et posons $N_aD_a = \delta_a$, $AN_a = \rho_a$. On a par hypothèse :

$$a^2 = \overline{N_aB}^2 - \rho_a^2 = \delta_a^2 + \frac{a^2}{4} - \rho_a^2,$$

ou

$$\rho_a^2 = \delta_a^2 - \frac{3a^2}{4}.$$

On a aussi en désignant par h_a la hauteur abaissée de A sur BC et par x la distance de D_a au pied de cette hauteur :

$$\rho_a^2 = (h_a - \delta_a)^2 + x^2,$$

d'où, en égalant les deux valeurs de ρ_a :

$$\delta_a^2 - \frac{3a^2}{4} = (h_a \delta_a)^2 + x^2,$$

par suite :

$$\delta_a = \frac{h_a^2 + x^2 + \frac{3}{4}a^2}{2ha} = \frac{\overline{AD}_a^2 + \frac{3}{4}a^2}{2h_a}$$

ou, à cause de $b^2 + c^2 = 2\overline{AD}_a^2 + \frac{a}{2}$:

$$\delta_a = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{4h_a} = a\frac{b^2 + c^2 + a^2}{8S} = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\omega.$$

Il résulte de là que du point N_a on voit BC sous l'angle 2ω. Donc ce cercle ne dépendant que de a et ω, reste le même lorsque le triangle ABC est remplacé par l'un quelconque des triangles de base BC et ayant l'angle de Brocard ω.

5. Rayons des cercles de Neuberg. — D'après ce qui précède, le rayon du cercle N_a sera :

$$\rho = \sqrt{\delta_a^2 - \frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{\text{cotg}^2\omega - 3}.$$

On voit que le maximum de ω est 30° : c'est ce qui résulte aussi de la signification du cercle N_a : le centre N_a a pour position limite le sommet du triangle équilatéral construit sur BC.

Corollaire I. — On sait que le rayon du cercle de Brocard a pour expression

$$\rho = \frac{R}{2\ \text{cotg}\ \omega}\sqrt{\text{cotg}^2\omega - 3}$$

De là on conclut

$$\rho_a = \rho\frac{a}{R}\ \text{cotg}\ \omega = 2\rho\ \sin A\ \ \text{tg}\ \omega.$$

Ainsi :

Les rayons des cercles de Neuberg N_a, N_b, N_c *sont aux côtés du premier triangle de Brocard comme* 1 *est à* tg ω.

Corollaire II. — Le rapport de similitude des triangles AA_2A_1, ABC est :

$$\frac{\rho_a}{R} = \sin A\sqrt{\text{cotg}^2\omega - 3}$$

L'angle des côtés homologues de ces triangles est $\widehat{A_1AA_2}$; il est donné par une formule assez compliquée.

(A suivre.)

VARIÉTÉS

ESSAI

SUR LA

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 100).

CHAPITRE III

LE PROBLÈME DE L'OBSTACLE

Le problème qui va nous occuper dans ce chapitre est celui qui se propose de prolonger un alignement au-delà d'un obstacle ; nous avons déjà signalé, dans le chapitre premier, certaines solutions de ce problème que nous reprenons ici, pour le traiter plus à fond.

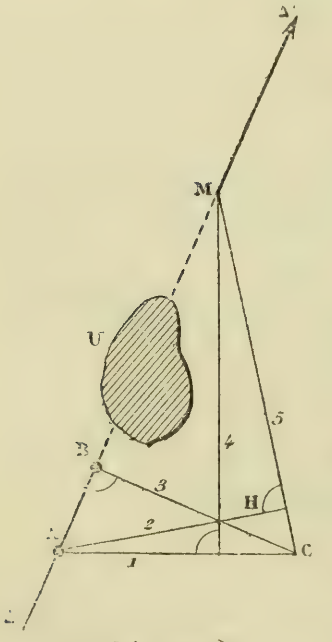


Fig. 156.

25. La solution par l'équerre. — La première solution que nous voulions indiquer, pour ce problème, suppose que l'on ait à sa disposition une équerre d'arpenteur, instrument qui permet de déterminer, rapidement, sur le terrain, des angles droits. D'ailleurs, pour le moment, nous nous accordons uniquement l'usage de cet instrument. Dans ces conditions, la solution ordinaire, exigeant l'emploi de la fausse équerre, devient illusoire ; par ce qu'elle exige, en outre la chaîne, ou, tout au moins, le cordeau.

Soit U l'obstacle que doit franchir une ligne jalonnée Δ (*); si l'on effectue les jalonnements qu'indique la figure (**), le théorème relatif aux trois hauteurs d'un triangle prouve que les lignes 4 et 5 se coupent, au point M, sur le prolongement cherché Δ'. En répétant cette construction une seconde fois, on obtiendra un autre point de Δ'; et celui-ci se trouve alors bien déterminé.

En observant que le choix du point A pris sur Δ, celui de B, et la direction de BM sont absolument arbitraires on reconnaîtra que, dans la pratique, la solution précédente grâce au jeu laissé aux jalonnements que nous avons décrits, pourra, presque toujours, être réalisée commodément.

26. — Remarque. La distance CM peut d'ailleurs se calculer facilement.

Une propriété connue donne, en effet,

$$AB.BM = CB.BH.$$

Cette égalité permet d'évaluer BM, quand on a relevé, par un chaînage, les longueurs accessibles AB, CB et BH.

27. Prolonger une droite AB dont les extrémités sont séparées par un obstacle. — Le théorème qui vient de nous servir dans la solution précédente peut être utilisé dans le problème que nous allons considérer maintenant. Ce problème peut se définir ainsi : Deux points A et B sont situés de part et d'autre d'un obstacle U qui rend l'un d'eux invisible pour l'observateur placé dans le voisinage de l'autre; on propose de jalonner les prolongements de la droite AB, de part et d'autre de l'obstacle.

Prenons arbitrairement un point C, puis, avec l'équerre, effectuons les constructions (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8); la droite Δ ainsi obtenue représente l'un des prolongements demandés.

(*) Il va, sans dire, que l'obstacle est supposé cacher la droite Δ, pour les observateurs placés sur le prolongement Δ'; autrement, la difficulté qui nous occupe n'existerait pas.

(**) Nous rappelons qne les angles qui, sur les figures que nous employons, sont marqués d'un petit arc de cercle, sont des angles droits; nous avons déjà fait cette convention; elle nous permet une rédaction plus rapide.

Il va, sans dire, que le point C sera choisi de façon à permettre le tracé des alignements dans les régions ac-accessibles du terrain sur lequel on opère; si l'on veut avoir l'autre prolongement, celui qui passe par A, on devra répéter, au point A, les opérations correspondant aux lignes 6, 7 et 8, qui ont été jalonnées pour obtenir Δ.

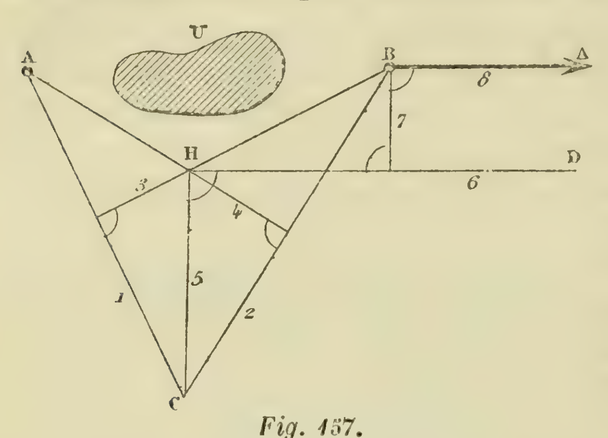


Fig. 157.

28. — Remarque. Si l'on rencontrait, dans le voisinage de B, un second obstacle V, on profiterait de la droite HD qui, dans la partie accessible, est parallèle à AB, pour effectuer

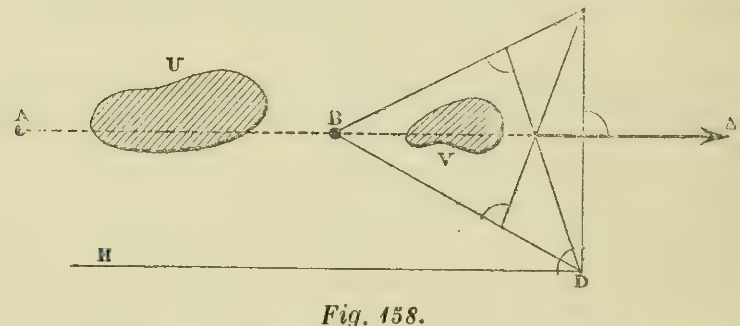


Fig. 158.

le tracé de Δ, comme l'indique la figure 158. Nous examinons d'ailleurs, plus loin, et avec détails, le cas des deux obstacles.

29. La solution par les alignements. — Nous allons supposer maintenant que l'on n'ait à sa disposition aucun instrument d'arpentage et nous nous proposons de résoudre le problème qui nous occupe par de simples alignements. Le nombre des solutions du problème ainsi posé est indéfini; les théorèmes relatifs à trois points en ligne droite (*)

(*) Par exemple, celui que nous avons démontré dans la première partie (§§ 19 et 20).

théorèmes que la géométrie élémentaire procure avec abondance, fournissent autant de réponses à la difficulté en question. Le livre des Porismes, notamment, est plein de propositions susceptibles d'être appliquées au cas présent; mais il suffit de signaler cette mine, sans qu'il y ait intérêt à énumérer toutes les ressources qu'elle renferme et nous nous bornerons à signaler quelques solutions, plus particulièrement simples.

La première qui se présente à l'esprit, solution donnée par Servois (*), par Bergery (**), et probablement par tous ceux qui ont écrit sur cette matière, est celle qui prend pour base la belle propriété des diagonales du quadrilatère complet. Voici d'ailleurs le détail des opérations qu'il faudra faire sur le terrain, quand on voudra l'appliquer.

On choisit, entre les points A et B, arbitrairement, un point C, plus voisin de B que de A et d'autant plus voisin de A, que l'obstacle proposé a une plus petite étendue. On effectue alors les alignements (1, 2, 3, 4, 5, 6) indiqués par la figure. La droite NP va passer par le point C' conjugué harmonique de C par rapport au segment AB. En répétant une seconde fois (***) la construction précédente, on obtient finalement deux droites telles que NP qui, par leur intersection, déterminent un point du prolongement cherché Δ. Ainsi, on pourra, par de simples alignements, se procurer autant de points que l'on voudra du prolongement cherché.

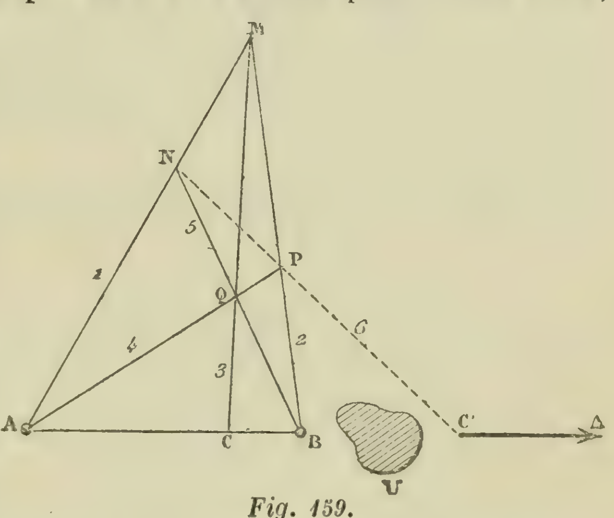


Fig. 159.

(*) *Loc. cit.*, p. 31.

(**) *Loc. cit.*, p. 107.

(***) Dans ce second tracé il faut observer que les jalonnements 1, 2, 3 peuvent servir et qu'il suffit de modifier la position du point Q sur MC.

Quant à la distance AC′ elle se calcule par la formule

$$\frac{1}{AC'} = \frac{2}{AB} - \frac{1}{AC};$$

une table des inverses des nombres entiers, table dont nous nous occuperons dans le chapitre suivant, permet de calculer très rapidement la longueur AC′. Si l'on n'a pas à sa disposition la table en question, on fera le calcul de AC′ au moyen de la formule précédente.

Deuxième Solution. — On peut obtenir le point C′, dont il est question dans la solution précédente, par une seule opération comme nous allons le montrer. Cette seconde solution n'est pas, somme toute, sensiblement plus simple que celle qui est indiquée ci-dessus, mais elle donne lieu à une certaine vérification, présentant un intérêt pratique.

Considérons, comme tout à l'heure, un quadrilatère complet dont les points donnés A et B sont deux sommets; puis joignons le point O, point de concours des diagonales aux points A et B; nous obtenons ainsi quatre points I, H, K, L. Il est facile de reconnaître que les droites HK et IL concourent au point C′.

En effet, la figure ABMOKH constitue un quadrilatère

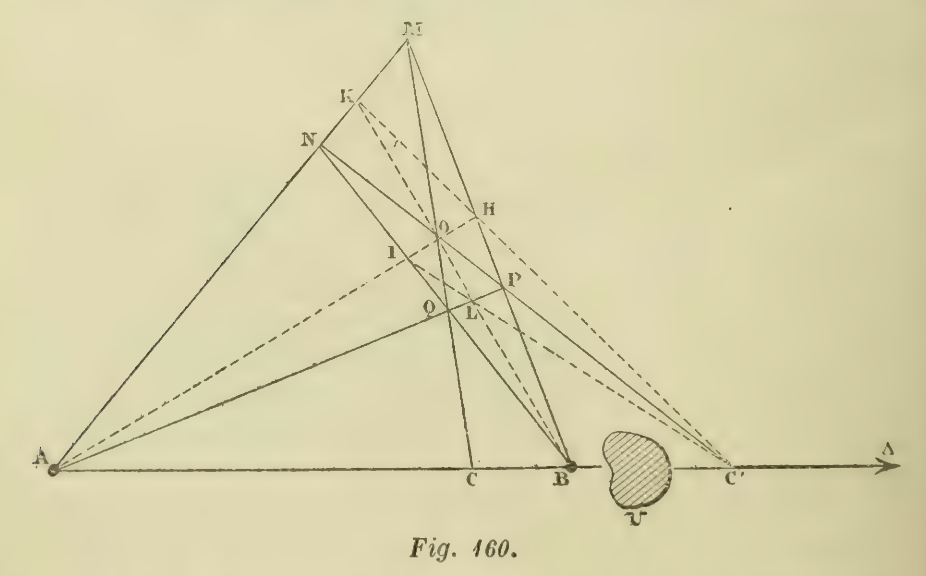


Fig. 160.

complet et la diagonale KH doit couper AB au point conjugué harmonique de C; c'est-à-dire au point C′. Cette remarque

s'applique, bien entendu, à IL et l'on a de la sorte trois droites KH, NP, IL concourant en C'. De là, résulte, pour le point C', au point de vue pratique, une détermination plus sûre.

On peut résumer les deux solutions précédentes en observant qu'à un point Q pris sur MC correspond une droite NP passant par le conjugué C'; pour déterminer celui-ci, il faut prendre deux points tels que Q et l'on obtient deux droites telles que NP; c'est la première solution. Mais, si l'on choisit pour second point Q, le point O lui-même, chose naturelle d'ailleurs, alors, on a la seconde solution. Celle-ci n'est donc en définitive qu'une réalisation particulière de la première, accompagnée d'une remarque pouvant d'ailleurs s'appliquer à la construction obtenue en prenant sur MC, pour second point Q, un point quelconque.

Troisième Solution. — Une solution un peu plus rapide, et bien distincte des précédentes, est celle qu'on obtient en appliquant le principe de la transformation homologique (*).

La figure montre comment on a obtenu le point C sur le prolongement de AB, au moyen des deux triangles homologiques *mnp*, *m'n'p'*. Les jalonnements peuvent être effectués dans l'ordre (1, 2, ...8) indiqué; et, comme la direction des alignements 1, 2, 3, 4, la position de la droite 5, et même la direction de la droite 6, restent arbitraires, on voit qu'il y

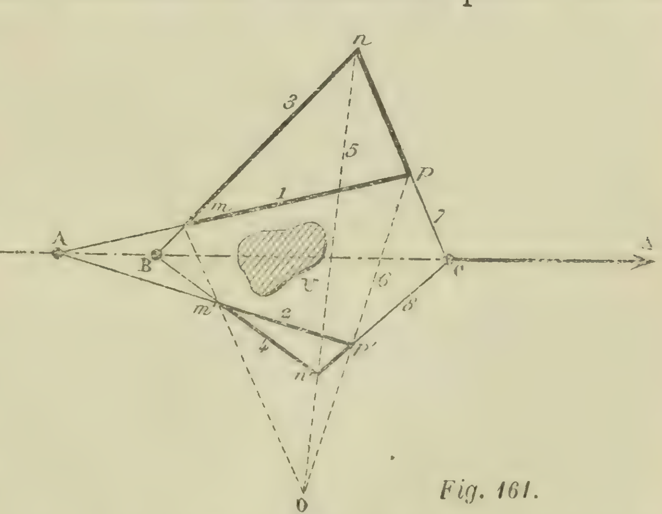


Fig. 161.

(*) On sait que le théorème en question est dû à Desargues; voyez *Œuvres de Desargues, réunies et analysées par Poudra;* Paris, 1864, t. I, pp. 513, 430. On trouvera une analyse de l'ouvrage cité dans le tome III, série II, des *Nouvelles Annales*.

aura moyen, dans la plupart des cas, même dans ceux qui offrent une certaine difficulté pratique, de disposer les jalonnements de façon à déterminer la position du point C.

Le calcul de BC est moins simple que dans les solutions précédentes. Il faut avoir recours au théorème de Ménélaüs qui donne ici

$$BC = AB \frac{nC \cdot mp}{np \cdot mA}.$$

Il y aurait cinq droites à chaîner pour obtenir BC; cette formule paraîtra donc compliquée, du moins, comparée à celle que nous avons donnée dans la première solution.

Nous voulons borner à ces trois procédés (qui n'en forment réellement que deux, comme nous l'avons fait remarquer) la solution du problème de l'obstacle, par des alignements. On observera certainement que ces procédés offrent, dans la pratique, une certaine complication qui tient au nombre assez grand des alignements qu'ils nécessitent. Mais la raison de cette complication est naturelle, et il paraît difficile d'imaginer, sans autre instrument que le jalon, une solution plus simple que celles que nous avons fait connaître dans ce paragraphe. Il n'en est plus de même quand on s'accorde le droit de mener des parallèles, opération qui peut se faire, très rapidement, avec la fausse équerre ou avec l'équerre ordinaire. On peut alors, par l'emploi simultané des alignements et de l'équerre, obtenir des solutions très simples du problème en question. Nous allons en indiquer quelques-unes.

30. Les solutions par l'équerre et les alignements. — Les solutions que nous allons développer dans ce paragraphe se distinguent de celle que nous avons donnée plus haut (§ 25) en ce que l'on ne fait usage de l'équerre que pour mener des parallèles, et non pour élever des perpendiculaires. Il y a là, au point de vue pratique, une différence que l'on appréciera, sans que nous ayions besoin d'y insister. Il résulte, notamment des conditions dans lesquelles nous nous plaçons ici, que la fausse équerre, pour les solutions que nous avons en vue, est tout aussi bonne, pour ne pas dire meilleure, que l'équerre ordinaire; car, bien que la fausse équerre puisse

servir, comme nous l'avons montré, au tracé des perpendiculaires il faut reconnaître qu'elle n'arrive pas à ce tracé sans un certain effort et l'on doit considérer la fausse équerre comme étant, avant tout, l'instrument des parallèles.

Première Solution. — Considérons un triangle ABC, et soit AD une droite quelconque issue de A et rencontrant BC en D; menons MN parallèlement à BC et joignons enfin BN qui coupe AD en P, puis MP; cette dernière droite coupe BC en un point Q qui reste fixe quand MN se transporte parallèlement à elle-même (*).

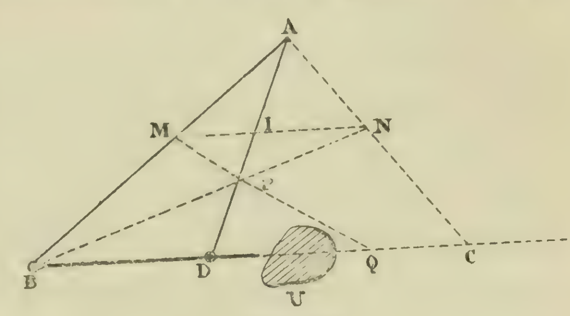


Fig. 162.

En donnant à MN deux positions arbitraires on obtient le point Q et l'on achève la construction en menant par Q une parallèle à MN.

Il reste à indiquer comment on évalue BQ.

De la relation

$$\overline{BD}^2 = DQ.DC,$$

on déduit

$$\overline{BD}^2 = (BQ - BD)(BC - BD),$$

ou

$$\frac{1}{BQ} = \frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}.$$

Cette formule permet, dans tous les cas, de calculer BQ; mais si l'on possède la table des inverses, à laquelle nous avons déjà fait allusion, le résultat sera lu immédiatement sur cette table.

(*) Cette propriété fait partie de trente-huit lemmes de Pappus sur les Porismes d'Euclide (Voyez: *les trois livres des Porismes*, p. 89; proposition VII)

Elle se démontre immédiatement en observant que l'on a

$$\frac{MI}{IN} = \frac{BD}{DC}, \text{ et aussi } \frac{MI}{IN} = \frac{DQ}{BD}.$$

Ces égalités donnent par comparaison

$$\overline{BD}^2 = DQ.DC$$

Seconde Solution. — Voici une seconde solution ; elle exige, il est vrai, un emploi plus continu de la fausse équerre, mais elle présente l'avantage de donner un point C symétrique du point A, par rapport à B, ce qui, à l'occasion, peut être utile.

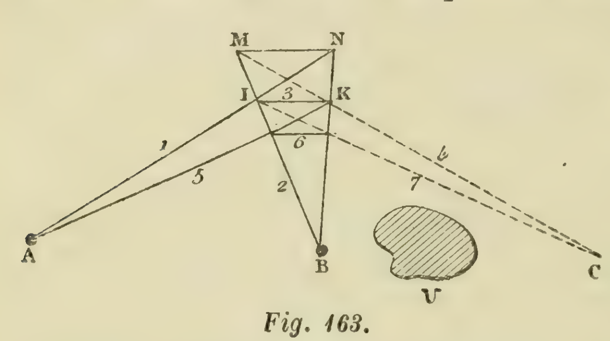


Fig. 163.

Dans tous les cas, pour mesurer BC, on n'a aucun chaînage à faire puisque BC = AB.

Ayant déterminé, quelque part, les extrémités M, N d'un segment parallèle à AB on effectue les alignements (1, 2,... 7). Les droites 4 et 7 concourent en un point C situé sur AB et tel que BC = AB.

En effet le trapèze MNAB donne (§ 14)

$$\frac{1}{IK} = \frac{1}{MN} + \frac{1}{AB}.$$

De même, dans le trapèze MNBC, nous avons

$$\frac{1}{IK} = \frac{1}{MN} + \frac{1}{BC}.$$

Ces égalités prouvent que MK coupe AB au point C, symétrique de A par rapport à B.

Cette remarque, appliquée aux droites 4 et 7, établit l'exactitude de la construction précédente.

Nous bornerons là les solutions que nous voulons indiquer pour résoudre le problème qui vient de nous occuper ; mais, en terminant ce chapitre, nous allons encore examiner quelques cas particuliers intéressants, auxquels les solutions précédentes ne sauraient convenir.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Vire

(*Suite*, voir p. 107.)

---

43. — Si sur les côtés d'un triangle quelconque on élève en leurs milieux soit intérieurement, soit extérieurement des perpendiculaires sur lesquelles on porte des longueurs proportionnelles à ces côtés, A′, B′, C′ désignant l'extrémité de ces droites; les triangles ABC, A′B′C′ ont même centre de gravité.

Il est aisé de vérifier ce théorème en prenant la moyenne arithmétique des distances des points A′, B′, C′ aux côtés du triangle.
Cet énoncé comprend donc le cas de la figure de l'exercice 42; le cas du triangle de Brocard; le triangle qui a pour sommet les centres des carrés construits sur les côtés d'un triangle donné; les sommets des triangles équilatéraux construits sur les mêmes côtés...

44. — La figure étant commencée comme dans les deux exercices précédents; démontrer :

1° Qu'il existe toujours deux valeurs de k pour lesquelles les droites AA′, BB′, CC′ sont parallèles; elles sont fournies par l'équation :

$$4k^2 - 4k \operatorname{cotg} \theta + 3 = 0,$$

θ désignant l'angle de Brocard du triangle ABC.

2° On a :

$$\frac{OA' + OA''}{a} + \frac{OB' + OB''}{b} + \frac{OC' + OC''}{c} = 2 \operatorname{cotg} \theta;$$

3° $S' + S'' = 2S(\operatorname{cotg}^2 \theta - 2)$;

4° $S'S'' = S^2(4 - \operatorname{cotg}^2 \theta)$;

5° $$\overline{A'B}^2 + \overline{A''B}^2 + \overline{C'A}^2 + \overline{C''A}^2 + \overline{B'C}^2 + \overline{B''C}^2 = 4S \operatorname{cotg}^2 \theta (\operatorname{cotg}^2 \theta - 1);$$

6° $\overline{AA'}^2 + \overline{AA''}^2 + \overline{A'A''}^2 = a^2(\operatorname{cotg}^2 \theta - 3)$;

donc les droites AA′, AA″ sont rectangulaires.

7° $\overline{A'A''}^2 + \overline{B'B''}^2 + \overline{C'C''}^2 = 4S \operatorname{cotg} \theta(\operatorname{cotg}^2 \theta - 3)$;

8° $a'^2 + b'^2 + c'^2 + a''^2 + b''^2 + c''^2 = 4S \operatorname{cotg} \theta (3 \operatorname{cotg}^2 \theta - 7)$;

9° Les triangles ABC, A'B'C', A''B''C'' ont même centre de gravité.

O désigne le centre du cercle circonscrit à ABC; S, S', S'', $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ sont la surface et les côtés des triangles ABC, A'B'C', A''B''C''.

1° On écrit que deux des droites AA', BB', CC' font un même angle avec le côté BC par exemple; on trouve l'équation (1).

On a

$$S' = OA'B' + OA'C' + OB'C'.$$

3° et 4° On évalue aisément l'aire de ces triangles. D'ailleurs d'une manière générale

$$4S' = S(12K^2 - 4K \operatorname{cotg} \theta + 1).$$

5°, 6°, 7° Des triangles rectangles donnent les longueurs qui rentrent dans ces formules.

8° On trouve d'une manière générale

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 12K^2 S \operatorname{cotg} \theta - 12KS + S \operatorname{cotg} \theta,$$

en partant de

$$a'^2 = OB'^2 + OC'^2 + 2OB'.OC' \cos A.$$

9° Il suffit de prendre la moyenne des distances à un côté quelconque

45. — Sommer la suite :

$$S = \cos a \operatorname{coséc} 3a + \cos 3a \operatorname{coséc} 9a + \ldots\ldots + \cos 3^n a \operatorname{coséc} 3^{n+1} a.$$

On part de l'identité facile à vérifier :

$$2 \cos a \operatorname{coséc} 3a \equiv \operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} 3a.$$

46. — Sommer la suite :

$$S = \sin \frac{a}{3} \operatorname{séc} a + \sin \frac{a}{9} \operatorname{séc} \frac{a}{3} + \ldots\ldots + \sin \frac{a}{3^n} \operatorname{séc} \frac{a}{3^{n-1}},$$

cas ou $n = \infty$.

On part de l'identité :

$$2 \sin \frac{a}{3} \operatorname{séc} a \equiv \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} \frac{a}{3}.$$

On trouve :

$$S = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} \frac{a}{3^n}\right);$$

et, à la limite, pour $n = \infty$, $S = \frac{1}{2} \operatorname{tg} a$.

47. — Si, dans un triangle, les tangentes des angles sont en progression arithmétique, il en est de même des sinus des angles doubles.

Si l'on a

$$2 \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C.$$

Il en résulte :

$$2 \sin B \cos A \cos C = \sin C \cos A \cos B + \sin A \cos B \cos C$$

$$2 \sin B [\cos (A - C) - \cos B] = \sin C [\cos (A - B) - \cos C].$$

$$+ \sin A [\cos (B - C) - \cos A].$$

Dans l'hypothèse faite :

$$2 \sin B \cos (A - C) = \sin C \cos (A - B) + \sin A \cos (B - C)$$

il reste donc :

$$2 \sin 2B = \sin 2A + \sin 2C.$$

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. MESSET, *professeur à Caudéran, près Bordeaux.*

... Il me semble que la question 180 dont vous publiez une solution dans le *Journal de Mathématiques Élémentaires*, avril 1887, p. 92, peut être résolue plus simplement de la manière suivante (*):

Soient ABC le triangle proposé, T le centre du cercle inscrit. I le point de contact de ce cercle avec AC. Prenons TB′ symétrique de TB par rapport à AT, TA′ symétrique de TA par rapport à TI.

Les droites TA′, TB′, TC′ font respectivement avec XA les angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$; TI est le rayon du cercle inscrit.

Si l'on prend, dans la direction opposée au point I, $A''O = a$; on a $IO = p$, $B'O = b$, $C'O = c'$.

Les quatre premières parties de la question sont donc établies et l'on trouve facilement la valeur de l'angle XOT par le procédé employé par M. Chapron.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

QUESTIONS ÉCRITES
POSÉES DANS DIVERS EXAMENS EN 1886

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES
(CONCOURS D'AGRÉGATION. — ORDRE DES SCIENCES)

Mathématiques.

9 juillet 1886. — Résolution de l'équation du second degré; discussion relative à la réalité et au signe des racines.

— Déterminer les trois côtés d'un triangle ABC, rectangle en A, connaissant le périmètre $2p$ et sachant que la surface totale du cône qu'engendre ce triangle en tournant autour du côté AB est équivalente à celle du cercle qui a BC pour rayon.

Application numérique. On suppose le demi-périmètre p égal à 1 mètre; calculer, à 1 centimètre près, la longueur de l'hypoténuse.

ÉCOLE NORMALE DE SÈVRES
(SECTION DES SCIENCES)

Arithmétique et Géométrie.

— Résoudre l'équation

$$x^2 - 106x + 2448 = 0.$$

— Démontrer la formule qui donne la somme des termes d'une progression géométrique. Cas où la progression est décroissante et où le nombre des termes augmente indéfiniment.

— Démontrer que le côté du décagone régulier inscrit dans une circonférence est égal au plus grand segment du rayon partagé en moyenne et extrême raison.

— Etant donné un triangle rectangle, construire une circonférence tangente à l'hypothénuse, passant par le sommet de l'angle droit et ayant son centre sur l'un des côtés. Calculer le rayon de cette circonférence en supposant connus les deux côtés de l'angle droit.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES
(CERTIFICAT D'APTITUDE — SECTION DES SCIENCES)

Mathématiques.

9 juillet 1886. — Définition de la parabole. Tracé de la courbe par points et d'un mouvement continu. Propriétés de la tangente.

Quelles valeurs faut-il donner à la constante m pour que le trinôme

$$(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6$$

reste positif quel que soit x ? (*)

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

Mathématiques.

— Résoudre par l'arithmétique le problème suivant :

Deux robinets A et B sont ajustés à un réservoir, on ouvre A et on laisse couler le 1/4 du liquide, puis on ouvre B et le réservoir achève de se vider par les deux robinets en 1 heure 1/4.

Si on avait d'abord laissé couler B pendant une 1/2 heure et ensuite ouvert le robinet A, le réservoir aurait achevé de s'épuiser en 1 heure 1/7 par les deux robinets.

Quel temps faudra-t-il à chaque robinet coulant seul pour mettre le réservoir à sec ?

— Equation à résoudre :

$$x^2 - 6x - 9 = 2\sqrt{x^2 - 6x + 15}$$

ÉCOLES NORMALES D'INSTITUTEURS

(CERTIFICAT D'APTITUDE AU PROFESSORAT EN 1886)

Composition de mathématiques.

— Dans un triangle ABC, on mène les bissectrices des angles que forment entre elles les deux droites AB et AC. Ces droites rencontrent la droite AC en deux points D et D'. Quelle est la propriété la plus importante dont jouissent les deux points D et D' ?

Peut-on citer une conséquence remarquable de cette propriété ?

— calculer à $\frac{1}{1000}$ près le quotient $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

— Étant donnée une demi-circonférence AOB, on propose de trouver sur le diamètre AB un point P tel que si par le point P on élève une perpendiculaire sur le diamètre AB, qui rencontre la circonférence en N, et ensuite que, par le point N, on mène une parallèle à AB, coupant la circonférence en M, on ait :

$$2\overline{AM}^2 + \overline{PM}^2 = k^2,$$

k^2 étant une quantité donnée

BREVET SCIENTIFIQUE

Nancy 1886. — On sait que, dans un triangle rectiligne, l'angle B est double de l'angle A. Quelle relation en résulte-t-il entre les côtés ? — Etant donnés deux côtés quelconques de ce triangle, calculer le troisième. — Discuter les différents cas.

(*) Cette seconde question a été indiquée déjà (p. 47). Voyez aussi, à la page citée, les énoncés concernant le certificat d'aptitude à l'enseignement spécial et le concours pour l'école de Cluny en 1886.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

SESSION DE NOVEMBRE 1886 (*).

ALGER

— On donne un triangle ABC. Une droite DE parallèle au côté BC, et située dans l'intérieur du triangle, partage sa surface de telle manière que la surface DEBC est moyenne proportionnelle entre la surface du triangle ABC et celle du triangle ADE. On demande : 1° de calculer DE en fonction de BC; 2° d'exprimer, en fonction de la hauteur AF et de BC, le volume engendré par la surface DEBC tournant autour de BC.

— Expliquer comment l'on mesure la hauteur d'une montagne ou d'un édifice dont le pied est inaccessible.

Application : Pour mesurer la hauteur d'un édifice, on a choisi une base de 6^m, telle que les angles adjacents à la base du triangle, formé par cette base et le sommet de l'édifice, sont égaux a $83°12'22''$. L'angle d'élévation du sommet vu d'une des extrémités de la base est $80°22'6''$. Calculer la hauteur de cet édifice.

CAEN

— Deux pyramides triangulaires de bases équivalentes et de hauteurs égales sont équivalentes.

— Définir la longitude; détermination expérimentale.

— Un triangle est formé par trois tiges rigides et homogènes dont les longueurs sont 3^m, 4^m, 5^m. — Trouver le centre de gravité de l'ensemble de ces trois tiges.

AIX

— Trouver les rayons de deux sphéres concentriques sachant que la différence de ces rayons a une longueur b et que le volume compris entre les surfaces des deux sphères a pour valeur

$$\frac{3}{4}\pi a^3.$$

— Angle de deux plans dont les traces verticales sont parallèles.

BESANÇON

— Les trois côtés d'un triangle rectiligne sont :

$$a = 5$$
$$b = 4$$
$$c = 3$$

(*) On trouvera des solutions de ces questions dans la publication à laquelle nous avons emprunté les énoncés et qui est éditée par M. Foucart (20, rue de la Sorbonne).

Calculer les trois médianes et les trois bissectrices intérieures du triangle à 0,01 près.

RENNES

Mathématiques.

— Trouver $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ connaissant $\operatorname{tg}a$.

— Calculer les arêtes d'un pallèlipipède rectangle, connaissant leur somme, la longueur de la diagonale, et sachant que l'une d'elles est moyenne proportionnelle entre les deux autres.

LYON

Mathématiques.

— Une pyramide a pour base un losange dont le côté est égal à 15. Les deux arêtes qui partent des extrémités de l'une des diagonales sont égales chacune à 41; les deux autres ont pour valeur l'une 48 et l'autre 30.

On demande de calculer les angles du losange, le volume de la pyramide et l'angle plan du dièdre dont l'arête est égale à 48.

DIJON

Mathématiques.

— Établir la formule des annuités. Que devient-elle quand les intérêts se capitalisent par semestres?

— On doit s'acquitter d'une somme en payant pendant 10 ans une annuité de 1000 francs. Quelle est la valeur actuelle de cette somme? On prendra le taux égal à 5.

DOUAI

— On considère un triangle isocèle ABC, circonscrit à un cercle de rayon donné R et on demande:

1° D'établir la relation qui existe entre la hauteur $AD = x$ et la demi-base $BD = DC = y$ du triangle.

2° De déterminer x de telle sorte que le volume du cône engendré par la rotation du triangle autour de AD soit équivalent à celui de la sphère de rayon m donné;

3° D'en déduire la valeur de x lorsque le cône a le plus petit volume possible.

— Étant données les projections (δ, δ') d'une droite et celles d'un point (a, a'), trouver les traces d'un plan mené par (a, a') perpendiculairement à la droite (δ, δ') ainsi que les projections de l'intersection de la droite (δ, δ') et de ce plan. Justifier la construction par l'énoncè des théorémes de géométrie sur lesquels on s'appuie.

(A suivre.)

QUESTION 194

Solution, par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin à Huy (Belgique).

On donne une droite Δ, *un point* A *sur cette droite, et un point* B *hors de cette droite. Un mobile parcourt la droite* Δ *du point* A *à un point* M, *avec une vitesse constante* v ; *puis il va, en ligne droite, du point* M *au point* B, *avec une vitesse constante* v'.

Position du point M *pour que le temps du parcours* AMB *soit minimum. Lieu de cette position, lorsque les points* A *et* B *étant fixes, on fait pivoter la droite* Δ, *autour du point* A.

(D'Ocagne.)

Menons BP perpendiculaire sur la droite Δ, et et posons $AP = a$, $BP = b$, $MP = x$. On a, en représentant le temps total du parcours par t, l'équation

$$\frac{AM}{v} + \frac{BM}{v'} = t, \text{ ou } \frac{a - x}{v} + \frac{\sqrt{b^2 + x^2}}{v'} = t,$$

ou

$$(v^2 - v'^2)x^2 - 2v'^2(vt - a)x + b^2v^2 - v'^2(vt - a)^2 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{v'^2(vt - a) \pm v' \sqrt{v'^2(vt - a)^2 - b^2(v^2 - v'^2)}}{v^2 - v'^2}.$$

Pour $v < v'$ ou $v = v'$, il est évident que le minimum de t a lieu quand le mobile suit la droite AB.

Pour $v > v'$, on a la condition de réalité

$$v'(vt - a)^2 - b^2(v^2 - v'^2) > 0,$$

ou, en observant que $vt - a$ est positif,

$$v'(vt - a) > b\sqrt{v^2 - v'^2},$$

d'où, pour le minimum de t,

$$t = \frac{av' + b\sqrt{v^2 - v'^2}}{vv'}.$$

On a alors

$$x = \frac{bv'^2}{\sqrt{v^2 - v'^2}},$$

quantité indépendante de a, et

$$\text{tg AMB} = -\frac{b}{x} = -\frac{\sqrt{v^2 - v'^2}}{v'^2},$$

quantité constante. Ainsi la position du point M est indépendante de celle du point A sur la droite Δ, et le lieu du point M, lorsque la droite Δ pivote autour du point A, est un arc de cercle décrit sur AB, et capable de l'angle constant AMB.

J'ai dit que $vt - a$ est positif. On a, en effet,

$$\text{AM} + \text{MB} > a,$$

d'où
$$\frac{\text{AM}}{v} + \frac{\text{MB}}{v} > \frac{a}{v},$$

et, à fortiori,
$$\frac{\text{AM}}{v} + \frac{\text{MB}}{v'} > \frac{a}{v},$$

ou
$$t > \frac{a}{v}.$$

QUESTION 196 *bis*

Solution par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin à Huy (Belgique.)

Soit ABC *un triangle rectangle et soit* D *le point de contact du cercle inscrit avec l'hypoténuse* BC. *Démontrer que*

$$2\left(\frac{1}{\text{AB}} - \frac{1}{\text{AC}}\right) = \frac{1}{\text{BD}} - \frac{1}{\text{CD}}. \quad \text{(Laurens.)}$$

Il faut vérifier, avec les notations ordinaires, que

$$2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-c},$$

ou, après avoir divisé les deux membres par $(b - c)$, que

$$(2p - 2b)(2p - 2c) = 2bc.$$

Or celle-ci revient immédiatement à la suivante :

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

laquelle est vérifiée, le triangle proposé étant rectangle.

Autres solutions par MM. Ignacio Beyens à Cadix ; Alexandre Couvert au lycée Condorcet ; Henri Martin, id. ; Louis Prince, lycée de Grenoble ; d'Hardiviller, élève au collège de Beauvais ; G. Bourdier, lycée de Grenoble ; Giovanni Russo, à Catanzaro (Italie) ; Georges Caye, élève du lycée Charlemagne (classe de M. Richard).

QUESTIONS PROPOSÉES

251. — Dans le triangle ABC, les côtés AB et AC sont égaux, I est le point milieu de la base BC. On porte sur le côté BA, de part et d'autre du point A, la longueur $AA' = AA_1 = 2m.BA$, et sur le côté BC, de part et d'autre du point C, la longueur $CC' = CC_1 = m.BC$; et on propose de montrer que les perpendiculaires élevées à AC, $A'C'$ et A_1C_1, aux points C, C' et C_1 se coupent sur la droite AI.

(G. Russo.)

252. — Étant donnés une circonférence O, une corde AB, un point P sur cette corde et deux points MN sur la circonférence; trouver sur celle-ci un troisième point S qui soit tel que les droites SM, SN coupent la corde AB en deux points M′, N′, de telle manière que le rapport $\frac{PM'}{PN'}$ soit égal à une quantité donnée $\frac{m}{n}$.

(Ignacio Beyens.)

Rectification sur la question 250. — Une erreur s'est glissée dans l'énoncé de cette question.

Il faut, comme nous le fait observer M. Vigarié, en nous en adressant une solution,

$$R_p R_{p-2} = R^2_{p-1},$$

et, par suite,

$$R_p = \frac{R_2{}^{p-1}}{R_1{}^{p-2}}.$$

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 10824-7.

NOTE D'ANALYSE

Par M. **Griess**, professeur de Mathématiques au Lycée d'Alger.

On trouve dans Desboves (*Questions d'Algèbre*, p. 252) l'énoncé suivant :

« **Théorème.** — n *étant le nombre des termes d'une progression arithmétique dont la raison est* r, S_p *la somme des puissances* p *de ces termes, si l'on fait tendre* n *vers l'infini, la fraction* $\frac{S_p}{n^{p+1}}$ *aura pour limite* $\frac{1^p}{p+1}$ p *étant entier et positif.* »

Le théorème précédent était connu de Pascal qui l'a donné dans son *Traité sur la sommation des puissances numériques*, sous une forme différente, mais au fond équivalente.

L'objet de cette note est d'appliquer le théorème à la progression formée par les n premiers nombres entiers, et de montrer qu'il est vrai, quelle que soit la valeur, entière ou fractionnaire, positive ou négative de p, sous la seule réserve $p + 1 > 0$.

Théorème. — *Si l'on pose* $S_p = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$, p *étant quelconque, mais tel que* $p + 1 > 0$, *on a*

$$\lim \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}, \textit{ pour } n \textit{ infini}.$$

Supposons d'abord p entier. D'après une méthode connue, on a pour déterminer S_p l'équation

$$(1) \quad (n+1)^{p+1} = 1 + \frac{p+1}{1} S_p + \frac{(p+1)p}{1.2} S_{p-1} + \ldots + S_0$$

Comme $S_0 = n \quad S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, cette égalité montre que S_p est une fonction entière de degré $p + 1$, par rapport à n; S_{p-1} une fonction entière, de degré p, etc.

Donc

$$\lim \frac{S_{p-1}}{n^{p+1}} = 0 \qquad \lim \frac{S_{p-2}}{n^{p+1}} = 0 \quad \text{etc.}$$

Divisons les deux membres de l'égalité (1) par n^{p+1} et faisons croître n indéfiniment, il vient

$$1 = (p+1) \lim \frac{S_p}{n^{p+1}},$$

ou

$$\lim \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Remarquons que, de l'égalité (1), on conclut

$$(p+1)\frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{(n+1)^{p+1} - 1}{n^{p+1}} - \ldots$$

Donc $\frac{S_p}{n^{p+1}}$ tend vers sa limite, en lui restant inférieure.

Prenons maintenant le cas où p est quelconque.

Posons

$$F(n) = \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1^p + 2^p + \ldots n^p}{n^{p+1}}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^p + 1\right]$$

ou

$$nF(n) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^p$$

$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}$ sont inférieures à 1; en supposant $p+1>0$, on sait qu'on peut développer chaque terme du second membre en série. On a donc

$$1 = 1$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^p = 1 - p.\frac{1}{n} + \frac{p(p-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots$$

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^p = 1 - p.\frac{2}{n} + \frac{p(p-1)}{1.2}\cdot\frac{2}{n^2} + \ldots$$

. . . .

$$\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^p = 1 - p.\frac{n-1}{n} + \frac{p(p-1)}{1.2}\cdot\frac{(n-1)^2}{n^2} + \ldots$$

Chacune des séries qui figurent dans le second membre est convergente ainsi que la série de ses modules; par suite, leur somme, faite d'une façon quelconque, donne encore une série convergente. Donc, en additionnant

$$nF(n) = n - p.\frac{S'_1}{n} + \frac{p(p-1)}{1.2}\cdot\frac{S'_2}{n^2} - \ldots$$

ou

$$F(n) = 1 - p.\frac{S'_1}{n^2} + \frac{p(p-1)}{1.2}.\frac{S'_2}{n^3} - \ldots \qquad (2)$$

en posant

$$S'_h = 1^h + 2^h + \ldots + (n-1)^h$$

on a évidemment

$$\frac{S_h - S'_h}{n^{h+1}} = \frac{1}{n}.$$

$\frac{S'_h}{n^{h+1}}$ tend donc aussi vers $\frac{1}{h+1}$, en lui restant inférieur, quand n croît indéfiniment.

Cela posé, les termes de la série (2) sont respectivement inférieurs à ceux de la série

$$1 - \frac{p}{1.2} + \frac{p(p-1)}{1.2.3} - \ldots \qquad (3)$$

obtenue en faisant croître n au-delà de toute limite dans (2). Nous allons faire voir que cette série est convergente et que la somme est $\frac{1}{p+1}$

En effet, soit x une quantité < 1, on a

$$(1+x)^{p+1} = 1 + \frac{p+1}{1}.x + \frac{(p+1)p}{1.2}x^2 + \frac{(p+1)p(p-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Comme $p + 1 > 0$, on sait que cette série reste convergente pour $x = -1$; on a donc

$$0 = 1 - \frac{p+1}{1} + \frac{(p+1)p}{1.2} - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3} + \ldots$$

et

$$\frac{1}{p+1} = 1 - \frac{p}{1.2} + \frac{p(p-1)}{1.2.3} - \ldots$$

Cela posé par un raisonnement analogue à celui qu'on fait pour la série e, on prouve que

$$\lim F(n) = 1 - \frac{p}{2} + \frac{p(p-1)}{1.2.3} - \ldots = \frac{1}{p+1}.$$

Le théorème est donc démontré sous la seule condition

$$p > -1.$$

Si $p < -1$, les séries employées sont toutes divergentes.

Applications :

$$p = 3 \qquad \lim \left[F(n) = \frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^4} \right] = \frac{1}{4}.$$

$$p = \frac{1}{2} \qquad \lim \left[F(n) = \frac{1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \right] = \frac{2}{3}.$$

$$p = -\frac{1}{2} \qquad \lim \left[F(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots + \frac{1}{n} \right] = 2.$$

NOTE SUR L'HYPOCYCLOIDE

A QUATRE REBROUSSEMENTS

Par M. **J. Rat**, élève à l'École Polytechnique.

1. — On sait qu'on peut considérer l'hypocycloïde à quatre rebroussements comme l'enveloppe d'une droite de longueur constante glissant entre deux axes rectangulaires. Partant de cette propriété, on arrive à l'équation de la courbe :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}} = 0.$$

On peut donc représenter l'hypocycloïde par les deux équations :

$$x = R\cos^3\varphi,$$
$$y = R\sin^3\varphi.$$

Cela posé, cherchons le coefficient angulaire de la tangente au point de la courbe, caractérisé par le paramètre angulaire φ.

On a, en différentiant :

$$dx = -3R\cos^2\varphi . \sin\varphi . d\varphi,$$
$$dy = 3R\sin^2\varphi . \cos\varphi . d\varphi,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\varphi = -t.$$

La formule $\operatorname{tg}\varphi = t$ donne :

$$\sin\varphi = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

et la courbe peut se représenter par les équations :

$$x = \frac{R}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad y = \frac{Rt^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où $-t$ représente le coefficient angulaire de la tangente, au point caractérisé par le paramètre t.

L'équation d'une tangente à la courbe est de la forme

$$Y + tX + K = 0.$$

Si l'on exprime que cette droite passe par le point (x, y), on trouve

$$K = -\frac{Rt}{\sqrt{1+t^2}},$$

et l'équation de la tangente au point (x, y) est

$$Y + tX - \frac{Rt}{\sqrt{1+t^2}} = 0.$$

2. — Cherchons les valeurs de t correspondant aux tangentes menées à la courbe par un point (x, y) du plan. Cette équation est

$$(1 + t^2)(y + tx)^2 - R^2t^2 = 0,$$

ou

$$t^4x^2 + 2t^3xy + t^2(x^2 + y^2 - R^2) + 2txy + y^2 = 0. \quad (1)$$

Si l'on appelle t_1, t_2, t_3, t_4 les racines de cette équation, on a

$$\Sigma t_1 = \Sigma t_1t_2t_3,$$

ou encore

$$\Sigma(-t_1) = \Sigma[(-t_1)(-t_2)(-t_3)].$$

En se rappelant la signification du paramètre t, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *La somme des angles que les quatre tangentes, menées d'un point à la courbe, font avec l'une quelconque des tangentes de rebroussement, est égale à un multiple de π.*

Cette propriété constitue une première analogie entre l'hypocycloïde à quatre rebroussements et l'hypocycloïde à trois rebroussements.

(A suivre.)

SUR UNE FONCTION FACTORIELLE

Par M. **Balitrand**, élève au Lycée de Nismes.

M. E. Cesáro, dans une note publiée dans *Mathesis* (VI, juin 1886, p. 126), s'est occupé, entre autres choses, de la fonction factorielle

$$f(x) = (1 + qx)(1 + q^2x) \ldots (1 + q^nx).$$

Nous nous proposons, dans cette petite note, de signaler quelques propriétés de cette même fonction.

On peut remarquer d'abord qu'elle est une généralisation de la formule du binôme; car si l'on fait $q = 1$, on a

$$f(x) = (1 + x)^n.$$

Soit posé

$$f(x) = (1 + qx)(1 + q^2x) \ldots (1 + q^nx) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_px^p + \ldots A_nx^n;$$

on a

$$f(qx) = (1 + q^2x)(1 + q^3x) \ldots (1 + q^{n+1}x) = A_0 + A_1qx + A_2q^2x^2 + \ldots A_pq^px^p + \ldots A_nq^nx^n$$

et, par suite,

$$\frac{f(x)}{f(qx)} = \frac{1 + qx}{1 + q^{n+1}x},$$

d'où

$$(1 + q^{n+1}x)f(x) = (1 + qx)f(qx).$$

En égalant les coefficients de x^p dans les deux membres on obtient

$$A_p + q^{n+1}A_{p-1} = q^p(A_p + A_{p-1})$$

ou

$$(1 - q^p)A_p = q^p(1 - q^{n-p+1})A_{p-1}.$$

Dans cette formule, donnons à p les valeurs successives $p - 1$, $p - 2$,... nous trouvons

$$(1 - q^p)A_p = q^p(1 - q^{n-p+1})A_{p-1},$$
$$(1 - q^{p-1})A_{p-1} = q^{p-1}(1 - q^{n-p+2})A_{p-2},$$
$$(1 - q^{p-2})A_{p-2} = q^{p-2}(1 - q^{n-p+3})A_{p-3}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(1 - q)A_1 = q(1 - q^n);$$

d'où

$$\Lambda_p = q^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(1-q^{n-p+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^p)} = q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{n,p}$$

on a donc

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=n} q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{n,p}x^p$$

$$= \lambda_{n,0} + q\lambda_{n,1}x + q^3\lambda_{n,2}x^2 \ldots q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{n,p}x^p + \ldots q^{\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_{n,n}x^n$$

formule dans laquelle on a d'ailleurs $\lambda_{n,0} = \lambda_{n,n} = 1$.

De même, le produit

$$\varphi(x) = (1-qx)(1-q^2x)\ldots(1-q^nx)$$

peut s'écrire :

$$\varphi(x) = \lambda_{n,0} - q\lambda_{n,1}x + q^3\lambda_{n,2}x^2 \ldots \pm q^{\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_{n,n}.x^n.$$

Les coefficients λ jouissent de propriétés analogues à celles des coefficients binomiaux. Nous allons les étudier.

1° Deux coefficients λ, consécutifs, vérifient la relation de récurrence suivante

$$\frac{\lambda_{n,p}}{\lambda_{n,p-1}} = \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q^p}; \qquad (1)$$

2° Deux coefficients λ équidistants des extrêmes sont égaux.

En effet si l'on pose

$$\omega_n = (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)$$

on a

$$\lambda_{n,p} = \frac{\omega_n}{\omega_p \cdot \omega_{n-p}} \lambda_{n,n-p}. \qquad (2)$$

Cette propriété a été signalée par M. E. Cesáro (*Mathesis*, juin 1886.)

3° Si q est plus petit que l'unité, les coefficients λ vont en augmentant, jusques et y compris le terme du milieu, lorsque n est pair; et, lorsque n est impair, les coefficients λ augmentent, pendant la première moitié du développement.

En effet, la relation (1) prouve que l'inégalité $\lambda_{n,p} > \lambda_{n,p-1}$ est vérifiée, si l'inégalité

$$\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q^p} > 1,$$

a lieu. On a donc, puisque le dénominateur est positif,

$$1-q^{n-p+1} > 1-q^p, \qquad \text{ou} \qquad q^{n-p+1} < q^p,$$

et comme les puissances positives d'un nombre positif plus

petit que l'unité diminuent, lorsque l'exposant augmente, il faut que

$$n - p + 1 > p, \quad \text{ou} \quad n + 1 > 2p;$$

d'où

$$p < \frac{n+1}{2}$$

Il y a maintenant deux cas à distinguer. Si n est pair $(n = 2m)$ on doit avoir

$$p < m + \frac{1}{2};$$

si n est impair $(n = 2m + 1)$ on doit avoir

$$p < m + 1.$$

En observant que p est nécessairement entier, on obtient alors le résultat énoncé

4° Si l'on observe que l'on a

$$f_n(x)\, f_n(q^n x) \equiv f_{2n}(x),$$

et, si l'on égale les coefficients de x^n dans les deux membres, en observant que les coefficients équidistants des extrêmes sont égaux, on obtient l'égalité

$$1 + \lambda_{n,1}^2 q + \lambda_{n,2}^2 q^4 + \lambda_{n,3}^2 q^9 + \ldots = \lambda_{2n,n} \qquad (3)$$

donnée par M. E. Cesáro (*loc. cit.*).

Il est facile de voir que $q^{p(p+1)}\lambda_{n,p}$ représente, précisément, la somme des produits p à p des termes de la progression géométrique dont le premier terme est q, la raison q, et le nombre des termes n; somme que nous designerons par S_p^n. L'égalité, facile à vérifier,

$$S_p^n = S_p^{n-1} + q^n S_{p-1}^{n-1},$$

donne immédiatement

$$S_p^n = q S_{p-1}^{n-1} + q^{n-1} S_{p-1}^{n-2} + \ldots + q^{p+1} S_{p-1}^{p} + q^p S_{p-1}^{p-1}$$

ou

$$q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{n,p} = q^n \cdot q^{\frac{p(p-1)}{2}}\lambda_{n-1,p-1} + q^{n-1} \cdot q^{\frac{p(p-1)}{2}}\lambda_{n-2,p-1} \ldots$$
$$q^{p+1} \cdot q^{\frac{p(p-1)}{2}}\lambda_{p,p-1} + q^p \cdot q^{\frac{p(p-1)}{2}}\lambda_{p-1,p-1}$$

ou

$$q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{n,p} = q^{n-p} \cdot q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{n-1,p-1} + q^{n-p-1} \cdot q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{n-2,p-1} \ldots$$
$$+ q \cdot q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{p,p-1} + q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{p-1,p-1} \ldots$$

ou, en divisant par $q^{\frac{p(p+1)}{2}}$, quantité positive,

$$\lambda_{n,p} = q^{n-p}\lambda_{n-1,p-1} + q^{n-p-1}\lambda_{n-2,p-1}$$
$$+ \ldots q\lambda_{p,p-1} + \lambda_{p-1,p-1}. \qquad (4)$$

Enfin, on vérifie aisément l'égalité

$$\lambda_{n,p} = q^p\lambda_{n-1,p} + \lambda_{n-1,p-1},$$

et, en donnant à n les valeurs successives : $n, (n-1), \ldots (n-p)$; et à p les valeurs successives : $p, (p-1) \ldots 1, 0$, on a

$$\lambda_{n,p} = q^p\lambda_{n-1,p} + \lambda_{n-1,p-1},$$
$$\lambda_{n-1,p-1} = q^{p-1}\lambda_{n-2,p-1} + \lambda_{n-2,p-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_{n-p+1,1} = q\lambda_{n-p,1} + \lambda_{n-p,0}.$$

En multipliant membre à membre et en remarquant que $\lambda_{n-p,o} = 1$, on a la formule

$$\lambda_{n,p} = 1 + q\lambda_{n-p,1} + q^2\lambda_{n-p+1,2} + \ldots + q^{p-1}\lambda_{n-2,p-1} + q^p\lambda_{n-1,p}. \quad (6)$$

Remarque. — Au concours général de 1879, on a proposé l'étude de la fonction

$$F(x) \equiv (1 + qx)(1 + q^3x) \ldots \ldots (1 + q^{2n-1}x)\left(1 + \frac{q}{x}\right)\left(1 + \frac{q^3}{x}\right) \cdots \left(1 + \frac{q^{2n-1}}{x}\right).$$

La solution de cette question découle assez simplement des considérations précédentes.

En effet on a

$$F(x) \equiv \varphi(x).\psi(x)$$

en posant

$$\varphi(x) \equiv (1 + qx)(1 + q^3x) \ldots (1 + q^{2n-1}x)$$
$$\psi(x) \equiv \left(1 + \frac{q}{x}\right)\left(1 + \frac{q^3}{x}\right) \cdots \left(1 + \frac{q^{2n-1}}{x}\right).$$

Considérons la fonction $\varphi(x)$. En remplaçant x par q^2x, on trouve

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(q^2x)}, = \frac{(1 + qx)}{(1 + q^{2n+1}x)}.$$

En désignant par A_p, le coefficient de x^p dans le développement de $\varphi(x)$, on déduit, de cette égalité,

$$A_p(1 - q^{2p}) = q^{2p-1}(1 - q^{2(n-p+1)})A_{p-1}.$$

En donnant à p les valeurs successives $(p - 1), (p - 2) \ldots$ on trouve

$$A_p = q^{2p} \frac{(1 - q^{2n})(1 - q^{2(n-1)}) \ldots (1 - q^{2(n-p+1)})}{(2 - q^2)(1 - q_p) \ldots (1 - q^{2p})} = q^{p^2} \mu_{n,p}$$

et l'on peut remarquer que $\mu_{n,p}$ représente précisément $\lambda_{n,p}$, lorsqu'on a remplacé q par q^2.

On a donc

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{p=2n-1} q^{p^2}\mu_{n,p}\,.\,x^p\,;$$

de même

$$\psi(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{p=0}^{p=2n-1} q^{p^2}\mu_{n,p}\frac{1}{x^2}$$

et par suite

$$F(x) = \sum_{p=0}^{p=2n-1} q^{p^2}\mu_{n,p}x^p \times \sum_{p=0}^{p=2n-1} q^{p^2}\mu_{n,p}\frac{1}{x^p}\,.$$

Il suffit d'effectuer la multiplication pour trouver les coefficients des différentes puissances de x, depuis $x^{-(n+1)}$ jusqu'à x^{n+1}, ce qui n'offre aucune difficulté.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 127).

21. Points algébriquement associés (M, M_a, M_b, M_c). — Considérons le point $M(\alpha, \beta, \gamma)$ dont les coordonnées vérifient les égalités :

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}.$$

Nous appellerons *points algébriquement associés* au point M et nous noterons par M_a, M_b, M_c, les points qui se déduisent de M en changeant le signe du dénominateur d'une des coordonnées. D'après cela, les coordonnées des points algébriquement associés à M (*) seront telles que :

(*) M. J. Neuberg avait créé le terme de *points associés* (*M.* 1881, p. 173) pour désigner les points dont il est question ici, et M. Lemoine dans plusieurs notes avait adopté ce terme. M. de Longchamps trouvant le terme de *associé* trop général a proposé celui de *points adjoints* ou plus exactement de *points algébriquement adjoints.* Nous conserverons le terme de

$$M_a \qquad \frac{\alpha}{-A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}$$

$$M_b \qquad \frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{-B} = \frac{\gamma}{C}$$

$$M_c \qquad \frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{-C}.$$

Ces points sont faciles à construire. En effet, si nous prenons les conjugués harmoniques des points M′, M″, M‴ où AM, BM, CM coupent BC, CA, AB, nous avons trois points, μ', μ'', μ''', tels que les droites $A\mu'$, $B\mu''$, $C\mu'''$ se coupent deux à deux aux points M_a, M_b, M_c cherchés.

L'un quelconque des quatre points M, M_a, M_b, M_c a, pour algébriquement associés, les trois autres.

On démontre facilement que :

Les triangles ABC, M_a, M_b, M_c sont homologiques et ont M pour centre d'homologie.

Les quatre droites M_bAM_c, AC, AM, AB formant un faisceau harmonique. De même, pour les quatre droites (M_cBM_a, BA, BM, BC) et (M_aCM_b, CB, CM, CA).

On voit immédiatement que si la position du point M est déterminée par certaines propriétés géométriques des rapports que les points M′, M″, M‴ déterminent sur les côtés du triangle, les points M_a, M_b, M_c auront une détermination semblable, et celles des propriétés de M qui ne dépendront que de ces rapports donneront lieu à des propriétés analogues des points M_a, M_b, M_c, donc :

Chaque fois qu'on étudiera un point remarquable M du triangle, on devra chercher des propriétés analogues pour ses points algébriquement associés. Nous donnerons, dans la suite, plusieurs applications de cette idée (*).

---

associé en y joignant le mot *algébriquement* qui indique de quelle manière est faite l'association ; mais on peut dire indifféremment *points algébriquement associés* ou *points algébriquement adjoints*.

(*) On peut consulter sur les points algébriquement associés :
E. Lemoine. — *Sur les points associés du plan du triangle*, (*A. F. Blois*, 1884. — *J. S.* 1885, p. 193, 217). G. de Longchamps. — (*J. E.*, 1886, pp. 129-130.)

22. Points Brocardiens (M, M_δ, M_ρ). — A un point donné $M(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}$$

on peut associer deux autres points que nous désignerons par les lettres M_δ, M_ρ (δ et ρ, initiales des mots : *direct* et *rétrograde*) dont les coordonnées vérifient les égalités

$$M_\delta \qquad B\alpha' = C\beta' = A\gamma'$$

$$M_\rho \qquad C\alpha'' = A\beta'' = B\gamma''$$

et que M. de Longchamps (*J. E.* 1886, p. 229) appelle *Points Brocardiens* correspondant à M. Les points Brocardiens se construisent facilement en employant la méthode suivante due à M. E. Lemoine (*N. A. M.* 1885, p. 202; — *A. F. Grenoble*, 1885.)

Menons :

$M'\rho'$ parallèle à CA,
$M''\mu'$ parallèle à AB,
$M'''\nu'$ parallèle à BC.

Les droites $A\mu'$, $B\nu'$, $C\rho'$ concourent en un point M_δ qui est l'un des points Brocardiens correspondant à M. Pour obtenir le second point Brocardien M_ρ il suffit d'effectuer le tracé en sens inverse, mener $M'\rho''$ parallèle à BA, etc.

En continuant à généraliser une idée due à M. Lemoine (*A. F. Grenoble* 1886), on peut dire, et c'est ce que nous ferons dans la suite, que M_δ *est le point Brocardien direct* et que M_ρ *est le point Brocardien rétrograde* correspondant au point donné M (*).

23. Points isobariques (M, M'_i, M''_i) **et points semi-réciproques** (M, M'_j, M''_j, M'''_j). — A un point donné M (A, B, C) on peut faire correspondre cinq points que nous désignerons par M'_i, M''_i, M'_j, M''_j, M'''_j) dont les coordonnées sont :

(*) Voir sur les *points Brocardiens :*

E. Lemoine. — *A. F. Grenoble*, 1885. — Ce mémoire forme le supplément du numéro de mai 1886 de *Mathesis*.

G. de Longchamps. — *Généralités sur la géométrie du triangle* (*J. E.* 1886, p. 229-231).

M	A	B	C	M'_j	A	C	B
M'_i	B	C	A	M''_j	C	B	A
M''_i	C	A	B	M'''_j	B	A	C

que nous appellerons avec M. J. Neuberg (*J. E.* 1886, p. 231) *groupe isobarique* associé à un point donné M. Plus particulièrement nous dirons que :

Les deux points M'_i, M''_i sont les *points isobariques* correspondant à M.

Les trois points M'_j, M''_j, M'''_j, sont les *points semi-réciproques* associés à M (*).

Les points isobariques et les points semi-réciproques ont les mêmes coordonnées barycentriques, par conséquent, les deux triangles $MM'_iM''_i$, $M'_jM''_jM'''_j$ ont même centre de gravité que le triangle de référence (**). Dans les points isobariques, le point milieu de $M'_iM''_i$, est le point complémentairede M. De même, le point milieu de $M''_jM'''_j$ est le complémentaire de M'_j.

La construction des points isobariques est très facile; il suffit, en effet, d'observer que ce sont les points réciproques des points Brocardiens.

Pour construire les points semi-réciproques, on remarque : 1° que les deux points M, M'_j formant avec BC deux triangles de même aire, la droite MM'_j est parallèle à BC ; 2° que les droites AM, AM'_j rencontrent BC en deux points isotomiques. Connaissant M, on construit donc facilement le point M'_j.

(A suivre.)

(*) Voir sur les *points isobariques* et *semi-réciproques :*
G. de Longchamps. — *J. E.* 1886, p. 278 (note au bas de la page).

(**) C'est de cette propriété que M. de Longchamps a tiré le nom de *points isobariques.* Les points que nous nommons, avec M. Neuberg, *points semi-réciproques,* ont été appelés par M. G. de Longchamps *points isobariques de seconde espèce.* On peut adopter la dénomination de M. de Longchamps ou employer celle de M. Neuberg, également bien. Le terme de *semi-réciproque* provient de ce que les coordonnées de M'_j peuvent se mettre sous la forme $\left(\frac{A}{BC}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}\right)$; les deux dernières sont justement celles du réciproque de M. (*J. E.* 1886, p. 278.)

QUESTIONS D'EXAMEN

10. — *Établir, à priori, la formule qui donne la somme des cubes des* n *premiers nombres.*

Imaginons la table de Pythagore pour les n premiers nombres :

					C	
	1	2	3	.....	n	
	2	4	6	.....	$2n$	
	3	6	9	.....	$3n$	
A	n	$2n$	$3n$	.....	n^2	B

En ajoutant les nombres renfermés dans les colonnes verticales, on a, évidemment,

$$S_n^1, \quad 2S_n^1, \quad \dots \quad nS_n^1$$

ou

$$(1 + 2 + \dots + n)S_n^1 = (S_n^1)^2.$$

D'autre part, comptons les nombres renfermés dans la partie ABC de la table ; leur somme est égale à

$$(n + 2n + \dots + n^2) + [n + 2n + \dots + (n - 1)n]$$

ou

$$n \cdot \frac{n(n + 1)}{2} + n \cdot \frac{(n - 1)n}{2} = n^3.$$

Ainsi

$$(S_n^1)^2 = S_n^3.$$

11. — *Une conique* Γ *est inscrite dans un angle* yox; *une tangente* Δ *rencontre* ox *et* oy *aux points* A *et* B; *trouver le lieu* ζ *décrit par le milieu* I *de* AB.

En posant $oA = u$, $oB = v$ et en désignant par x et y les coordonnées du point I, on a

$$u = 2x, \qquad v = 2y.$$

Or A et B décrivent sur ox et oy deux divisions homographiques ; on a donc

$$Auv + Bu + Cv + D = 0. \quad \text{etc.}$$

Remarque. — Si Γ est située d'une façon quelconque par rapport aux axes ox, oy, on partira de l'équation générale tangentielle des coniques.

$$\begin{vmatrix} & & & U \\ & \Delta & & V \\ & & & W \\ U & V & W & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans cette égalité, on sait que Δ représente le discriminant de l'équation de Γ, et que la droite Δ, correspondant à l'égalité

$$Ux + Vy + Wz = 0,$$

est tangente à Γ. On a donc pour l'équation de ζ

$$\begin{vmatrix} & & & \frac{1}{2x} \\ & \Delta & & \frac{1}{2y} \\ & & & -1 \\ \frac{1}{2x} & \frac{1}{2y} & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ζ est, généralement, du quatrième degré.

12. — *Que représente l'équation*

$$f\left(\frac{P}{Q}, \frac{R}{S}\right) = 0,$$

P, Q, R, S *étant des fonctions linéaires quelconques des coordonnées* x, y, z.

En posant

$$P = \lambda Q, \qquad R = \mu S,$$

et en considérant les solutions, en nombre infini, réelles ou imaginaires, de l'équation

$$f(\lambda, \mu) = 0,$$

on voit que, à l'égalité proposée, correspond une surface réglée.

CORRESPONDANCE

Sur une identité de Jacobi.

Si l'on considère le tableau des neuf cosinus de trois directions rectangulaires Ox, Oy, Oz avec trois autres directions rectangulaires Ox', Oy', Oz',

O	x'	y'	z'
x	a_1	a_2	a_3
y	b_1	b_2	b_3
z	c_1	c_2	c_3

l'équation du cône passant par les six arêtes des deux trièdres trirectangles est

$$\frac{a_1a_2a_3}{x} + \frac{b_1b_2b_3}{y} + \frac{c_1c_2c_3}{z} = 0;$$

si l'on chasse les dénominateurs et si l'on multiplie par 2, l'équation en s correspondante est

$$s^3 - Is^2 + Js - \delta = 0,$$

équation dans laquelle $I = 0$ et

$$J = (a_1a_2a_3)^2 + (b_1b_2b_3)^2 + (c_1c_2c_3)^2,$$

$$\delta = 2(a_1a_2a_3)(b_1b_2b_3)(c_1c_2c_3).$$

Dans le second système d'axes, on obtient l'équation du cône et l'équation en s correspondante

$$s^3 - I's^2 + J's - \delta' = 0,$$

en échangeant les colonnes et les lignes du tableau des cosinus; mais on a $\delta = \delta'$, par suite $J = J'$; en d'autres termes

$$(a_1a_2a_3)^2 + (b_1b_2b_3)^2 + (c_1c_2c_3)^2 = (a_1b_1c_1)^2 + (a_2b_2c_2)^2 + (a_3b_3c_3).$$

Ed. Lucas.

Nous avions demandé (*Journal*, 1886; p. 215 la date d'un ouvrage de Tartaglia (*): *Generale trattato di numeri e misure*, M. Vigarié nous signale, à ce propos, une note de Terquem (*Nouvelles Annales*, 1860; Bulletin de bibliographie, p. 14), d'après laquelle l'ouvrage en question est de 1546.

Mais il y a là, vraisemblablement, une faute d'impression et il faut lire, croyons-nous, 1556. Cette dernière date a été donnée par le prince Boncompagni dans un ouvrage publié à Rome en 1857 et portant pour titre : *Scritti inediti del P. D. Pietro Cossali*. A la page 289 de ce livre on trouve une note de la *Trattato...; stampato in Venezia, anno 1556*. La date de 1556 est aussi celle que donne M. Marie dans son *Histoire des sciences mathématiques*, t. II; p. 245

Quoi qu'il en soit, et jusqu'à meilleure information, ce serait donc à Stifel (1544) que reviendrait la priorité du triangle arithmétique de Pascal.

Extrait d'une lettre de M. Deschamps.

.. Je trouve dans le dernier numéro de votre très intéressant journal, une démonstration de la réalité des racines de l'équation en S, déduite de la relation :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

Cette démonstration est attribuée M. Buckheim (1884).

Permettez-moi d'appeler votre attention sur une question de priorité qui me semble incontestable. La démonstration se trouve *sous forme identique*, mais avec des notations diffé-

(*) Le testament de Tartaglia, retrouvé à Venise et publié en 1881 par le prince Boncompagni, dans un ouvrage consacré à la mémoire de Chel-dini, a prouvé que le véritable nom de Tartaglia était Fontana.

C'est dans le *Trattato* en question qu'il parle, sans la faire connaître complètement, de sa méthode pour résoudre les équations du troisième degré. On sait (voyez l'ouvrage de M. Marie, *loc. cit.*) que, selon toute vraisemblance, c'est à Tartaglia que Cardan a pris, par un procédé flétrissable, le secret de la formule que nous enseignons sous le nom de Cardan, mais qui, en bonne justice, devrait s'appeler formule de Tartaglia.

rentes, dans la Géométrie analytique de MM. Sonnet et Frontéra (4e édition, 1877; p. 599 et 600)...

Note. — En citant la source où avait été prise la démonstration en question, je n'avais nullement l'intention d'en attribuer la priorité à M. Buckheim. Je voulais seulement, par cette indication, présente à mon esprit, au moment où j'écrivais cette note, montrer que le calcul donné n'était pas nouveau. Cette manière de mettre en évidence la réalité des racines de l'équation en S est d'ailleurs très ancienne et la propriété, pour cette très petite chose, ne serait pas sans doute facile à établir, en admettant qu'elle en valut la peine.

G. L.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours du 8 juin 1887.

On donne dans un plan un point ω *fixe et deux axes fixes,* Ox, Oy.

Par ω *on fait passer deux droites rectangulaires rencontrant* Ox *en* B *et* D, Oy *en* A *et* C. *Par* A *et* B *on fait passer une parabole* P *tangente aux axes* Ox, Oy *en ces points. Par* C *et* D *on fait passer une parabole* P' *tangente aux axes* Ox, Oy *en ces points. On fait tourner les droites rectangulaires* AB, CD *autour de* ω.

1° Équation des paraboles P *et* P', *des axes et des directrices.*

2° Équation du lieu du point de concours des axes et des directrices.

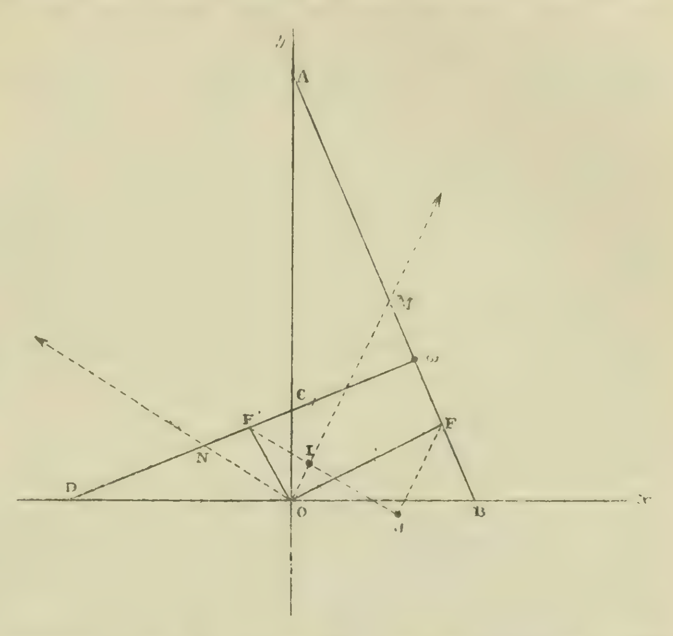
3° L'équation du lieu du point de concours de leurs axes, lieu qui se compose de deux cercles.

4° On prouvera que la distance des foyers est constante.

SOLUTION

Sans entrer dans tous les détails de la solution que comporte cette question très facile, nous indiquerons rapidement la suivante.

Soient M et N les milieux des segments AB, CD ; les droites OM, ON qui sont visiblement rectangulaires représentent respectivement un diamètre de P et un diamètre de P′.



En projetant l'origine O en F sur AB et en F′ sur CD, on sait que ces points sont les foyers de P et de P′. Si nous menons, par F et par F′, des parallèles à OM et à ON, les droites FJ, F′J ainsi obtenues, représentent les axes de P et de P′ et le lieu du point J est donc le cercle décrit sur $O\omega$ comme diamètre.

On voit aussi que $O\omega = FF'$; la distance des deux foyers est donc constante.

La directrice de P′ passant par O, perpendiculairement à ON, on voit que OM représente justement cette directrice et, pour répondre à la deuxième partie, il faut donc trouver le lieu de I.

En posant

$$OI = \rho, \qquad IOx = \theta, \qquad O\omega = h, \qquad \omega Ox = \alpha\,;$$

on a

$$\rho = OF' \cos(\pi - 2\theta),$$
$$OF' = h \cos(\pi - \alpha - \theta).$$

L'équation du lieu est donc

$$\rho = h \cos(\alpha + \theta) \cos 2\theta,$$

ou, si l'on préfère les coordonnées cartésiennes,

$$(x^2 + y^2)^2 = h(x \cos\alpha - y \sin\alpha)(x^2 - y^2)$$

C'est une quartique isotropique unicursale, qu'on pourrait nommer, pour rappeler sa forme, *le trifolium oblique*. Lorsque

ω est situé sur l'un des axes Ox, Oy on a le trifolium droit; on trouve le folium double, en supposant ω situé sur la bissectrice. Toutes ces courbes se construisent, point par point, comme l'indique la figure, au moyen de la règle et de l'équerre.

Nota. — En considérant les droites isotropes doubles passant par ω, la remarque de de la Hire prouve que, à titre singulier, elles font partie du lieu. Aussi la solution analytique de la troisième partie, lorsque l'élimination est dirigée d'une certaine façon, conduit-elle à une équation du quatrième degré, se décomposant en deux facteurs. L'un représente le cercle décrit sur Oω comme diamètre; l'autre, un cercle évanouissant, de centre ω.

Si les résultats précédents sont exacts, et malgré l'explication, contestable peut-être, qu'on vient de lire, l'énoncé de la troisième partie ne nous paraît pas correct. G. L.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1887

Mathématiques spéciales.

3 juin 1887. — I. On représente par

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots \quad (x_m, y_m)$$

les coordonnées des points d'intersection de deux courbes algébriques dont les équations mises sous forme entière sont

$$f(x, y) = 0, \qquad F(x, y) = 0.$$

On suppose que ces points d'intersection sont *simples et situés à distance finie.*

1° Montrer que, pour chaque valeur de i, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - x_i)a_i(x, y) + (y - y_i)b_i(x, y), \\ F(x, y) &= (x - x_i)A_i(x, y) + (y - y_i)B_i(x, y), \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

les coefficients a_i, b_i, A_i, B_i étant des polynômes en x, y.

2° On pose

$$\varphi_i(x, y) = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ A_i & B_i \end{vmatrix}$$

et

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{i=m} C_i \varphi_i(x, y),$$

et l'on demande de déterminer les constantes C_i de manière que le polynôme Φ prenne, pour $x = x$ et $y = y_i$, une valeur donnée u_i.

Montrer que le polynôme Φ ainsi obtenu comprend, comme cas particulier, la formule d'interpolation de Lagrange.

3° Démontrer que tous les polynômes en x et en y qui, pour $x = x$ et $y = y$ prennent la valeur u_i peuvent être mis sous la forme

$$\Phi + Mf + NF,$$

M et N étant des polynômes en x et en y.

II. — Soient

$$f = 0, \qquad F = 0,$$

les équations de deux coniques u et U, et λ_1, λ_2, λ_3 les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le discriminant de la fonction

$$f - \lambda F,$$

trouver la relation entre λ_1, λ_2, λ_3 exprimant la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse inscrire dans la conique u, un quadrilatère circonscrit à la conique U.

ÉCOLE NORMALE

16 juin 1887. — On considère la surface (dite *cylindroïde*) qui, rapportée à des axes rectangulaires, a pour équation :

$$z(x^2 + y^2) - m(x^2 - y^2) = 0.$$

Soit M un point de l'espace, dont les coordonnées sont x'', y'', z'' ; on propose de mener de ce point des normales au cylindroïde :

1° Désignant par α, β, γ les coordonnées du pied de l'une quelconque des normales abaissées du point M sur le cylindroïde, on formera l'équation du quatrième degré (1) ayant pour racines les valeurs de $\frac{\beta}{\alpha}$, l'équation (2) ayant pour racines les valeurs de γ, et l'on montrera comment, des racines de l'une ou de l'autre de ces équations, on déduirait les coordonnées des pieds des normales cherchées ;

2° Sur quel lieu doit se trouver le point M pour que l'équation (1) soit réciproque ? Trouver, en supposant le point M situé sur ce lieu, les coordonnées des pieds des normales ;

3° Sur quel lieu doit se trouver le point M pour que l'équation (2) ait une racine double égale à z' ? En supposant le point M situé sur ce lieu, reconnaître si les racines de l'équation (2), différentes de z', sont réelles ou imaginaires.

4° Que représente l'équation (2) quand on y regarde l'inconnue comme une constante et x', y', z' comme les coordonnées d'un point variable.

QUESTION 21

Solution par M. BARTHE.

Trouver le lieu des points de contact d'une série de surfaces homofocales du second degré avec des plans passant par une droite donnée ou par un point donné (O).

Soit l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

L'équation générale des surfaces homofocales est

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1 = 0. \quad (1)$$

Le plan polaire du point donné $(x_0\ y_0\ z_0)$ par rapport à la surface a pour équation

$$\frac{xx_0}{a^2 - \lambda} + \frac{yy_0}{b^2 - \lambda} + \frac{zz_0}{c^2 - \lambda} - 1 = 0. \quad (2)$$

Pour avoir l'équation du lieu, il suffit d'éliminer λ entre les équations (1) et (2) ou, entre l'une d'elles et la suivante obtenue en retranchant les deux premières.

$$\frac{x(x - x_0)}{a^2 - \lambda} + \frac{y(y - y_0)}{b^2 - \lambda} + \frac{z(z - z_0)}{c^2 - \lambda} = 0. \quad (3)$$

Le lieu est, en général, une surface du sixième degré.

Supposons maintenant que le plan passe par un nouveau point $(x_1\ y_1\ z_1)$, il faut adjoindre au sytème précédent l'équation

$$\frac{xx_1}{a^2 - \lambda} + \frac{yy_1}{b^2 - \lambda} + \frac{zz_1}{c^2 - \lambda} - = 0. \quad (4)$$

ou

$$\frac{x(x - x_1)}{a^2 - \lambda} + \frac{y(y - y_1)}{b^2 - \lambda} + \frac{z(z - z_1)}{c^2 - \lambda} = 0. \quad (5)$$

Le lieu est dans ce cas une courbe.

Laissons de côté le cas général, et démontrons la proposition particulière suivante :

Si l'on considère une série d'ellipsoïdes homofocaux et que, par une droite AB *située dans l'un des plans principaux, on mène des plans tangents à tous ces ellipsoïdes, le lieu des points de contact est une circonférence.*

Supposons la droite située dans le plan des xy, soient $(x_1, 0, 0)$ $(y_1, 0, 0)$ les coordonnées du point de rencontre avec les axes ; d'après ce qui a été vu, on doit éliminer λ entre les trois équations suivantes :

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda}\ 1 = - 0. \quad (1)$$

$$\frac{xx_1}{a^2 - \lambda} - 1 = 0. \qquad (2)$$

$$\frac{yy_1}{b^2 - \lambda} - 1 = 0. \qquad (3)$$

En éliminant λ, on a

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z^2}{c^2 + a^2 + xx_1} - 1 = 0. \qquad (4)$$

et

$$a^2 - xx_1 = b^2 - yy_1. \qquad (5)$$

Il faut maintenant prouver que le plan (5) coupe la surface (4) suivant un cercle.

En effet, l'équation générale des surfaces du second degré passant par l'intersection de (4) et de (5) est

$$yy_1(c^2 - a^2 + xx_1) + yx_1(c^2 - a^2 + xx_1) + z^2xx_1 - xx_1(c^2 - a^2 + xx_1)$$
$$+ (a^2 - b^2 - xx_1 + yy_1)(Ax + By + Cz + D) = 0.$$

Exprimant que cette équation représente une sphère, on a

$$x_1y_1 - Ax_1 = By_1 = x_1y_1$$

et

$$x_1^2 + Ay_1 - Bx_1 = 0$$
$$cx_1 = 0$$
$$cy_1 = 0,$$

d'où $\quad C = 0 \quad B = x_1 \quad A = 0.$

Ce qui prouve que l'on peut faire passer une infinité de sphères, D étant variable, le lieu est donc bien une circonférence.

QUESTIONS PROPOSÉES

226. — On donne cinq points sur une droite. Celle-ci se déplace de manière que quatre de ces points décrivent les quatre faces d'un tétraèdre. Le cinquième point décrit une ellipse (Mannheim).

Lorsqu'un des quatre points se déplace sur la droite, cette ellipse varie. Prouver que le lieu de son centre est une autre ellipse et définir les éléments de cette dernière courbe.

(Amigues.)

227. — Lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle et dans lesquelles la somme algébrique des carrés des demi-axes est égale à K. Interpréter géométriquement l'équation du lieu. Construire la courbe dans l'hypothèse $K < 0$ et discuter ses diverses formes, dans l'autre hypothèse.

(Amigues.)

228. — Le lieu des foyers des paraboles, pour lesquelles un triangle donné ABC est autopolaire, est un cercle (cercle des neuf points).

Les directrices de ces paraboles passent par un point fixe (centre du cercle circonscrit). *(Poujade.)*

229. — On considère les paraboles tangentes à deux droites données OX, OY, en des points variables A et B.

Si les directrices passent par un point fixe P 1° le lieu des foyers est un cercle; 2° la droite AB passe par un point fixe Q. *(Poujade.)*

230. — Démontrer que l'on a :

$$1 + C_m^1 C_p^1 + C_m^2 C_p^2 + \dots + C_m^m C_p^m = C_{p+m}^m,$$

m et p désignant deux entiers positifs tels que $p \geqq m$.

(Roux, élève au lycée de Grenoble.)

Le Directeur Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13932-7.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

SUR QUELQUES CERCLES REMARQUABLES

(CERCLES DE NEUBERG ET DE M'CAY).

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 145).

9. — Théorème VI. — *Si l'on construit sur* BC, CA, AB *les triangles semblables* BCI_a, CAI_b, ABI_c, *les triangles* ABC, $I_aI_bI_c$ *ne sont homologiques que lorsque les triangles* BCI_a, CAI_b, ABI_c *sont isocèles ou ont même angle de Brocard que* ABC. *Le centre d'homologie décrit dans le premier cas l'hyperbole de Kiepert et dans le second cas la droite de l'infini.*

Soient λ, μ, ν les angles du triangle BCI_a.

L'équation de AI_a en coordonnées normales est :

$$\frac{y}{z} = \frac{I_aC \sin(C-\mu)}{I_aB \sin(B-\lambda)} = \frac{\sin\lambda \sin(C-\mu)}{\sin\mu \sin(B-\lambda)} = \frac{\sin C}{\sin B}\cdot\frac{\operatorname{cotg}\mu - \operatorname{cotg} C}{\operatorname{cotg}\lambda - \operatorname{cotg} B}$$

De même pour BI_b, CI_c :

$$\frac{z}{x} = \frac{\sin A}{\sin C}\cdot\frac{\operatorname{cotg}\mu - \operatorname{cotg} A}{\operatorname{cotg}\lambda - \operatorname{cotg} C};$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin B}{\sin A}\cdot\frac{\operatorname{cotg}\mu - \operatorname{cotg} B}{\operatorname{cotg}\lambda - \operatorname{cotg} A};$$

Si ces droites concourent en un même point, les équations précédentes sont simultanées. Or, de leur multiplication on tire :

$$(\operatorname{cotg}\mu - \operatorname{cotg} A)(\operatorname{cotg}\mu - \operatorname{cotg} B)(\operatorname{cotg}\mu - \operatorname{cotg} C)$$
$$= (\operatorname{cotg}\lambda - \operatorname{cotg} A)(\operatorname{cotg}\lambda - \operatorname{cotg} B)(\operatorname{cotg}\lambda - \operatorname{cotg} C).$$

ou bien

$$(\operatorname{cotg}^3\mu - \operatorname{cotg}^3\lambda) - (\operatorname{cotg}^2\mu - \operatorname{cotg}^2\lambda)\Sigma \operatorname{cotg} A$$
$$+ (\operatorname{cotg}\mu - \operatorname{cotg}\lambda)\Sigma \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B = o.$$

Cette équation se décompose en deux facteurs :

$$1^\circ \quad \operatorname{cotg}\mu - \operatorname{cotg}\lambda = o,$$

les triangles semblables construits sur BC, CA, AB sont isocèles;

2° $\cot g^2\mu + \cot g \mu \cot g \lambda + \cot g^2 \lambda - (\cot g \mu + \cot g \lambda) \cot g \omega + 1 = 0$.

Additionnant à cette égalité l'identité suivante :

$$\cot g \mu \cot g \lambda + \cot g \lambda \cot g \nu + \cot g \mu \cot g \nu - 1 = 0,$$

qui a lieu entre les trois angles du triangle BCI_a, on trouve :

$$(\cot g \mu + \cot g \lambda)(\cot g \lambda + \cot g \mu + \cot g \nu - \cot g \omega) = 0,$$

ce qui montre que le triangle BCI_a a même angle de Brocard ω que ABC.

Pour avoir le lieu du centre d'homologie, mettons les droites AI_a, BI_b, CI_c sous la forme

$$y \sin B \cot g \lambda - z \sin C \cot g \mu = y \cos B - z \cos C,$$
$$z \sin C \cot g \lambda - x \sin A \cot g \mu = z \cos C - x \cos A,$$
$$x \sin A \cot g \lambda - y \sin B \cot g \mu = x \cos A - y \cos B,$$

et éliminons $\cot g \lambda$, $\cot g \mu$. En ajoutant on trouve :

$$(x \sin A + y \sin B + z \sin C)(\cot g \lambda - \cot g \mu) = 0.$$

Donc si $\cot g \lambda \neq \cot g \mu$ le lieu est la droite de l'infini

$$x \sin A + y \sin B + z \sin C = 0.$$

Si $\cot g \lambda = \cot g \mu$, les équations des droites AI_a, BI_b, CI seront :

$$\frac{y}{z} = \frac{\sin(C-\mu)}{\sin(B-\mu)}, \quad \frac{z}{x} = \frac{\sin(A-\mu)}{\sin(C-\mu)}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\sin(B-\mu)}{\sin(A-\mu)};$$

le centre d'homologie des triangles ABC, $I_aI_bI_c$ satisfait donc aux équations :

$$y \sin(B-\mu) = z \sin(C-\mu) = x \sin(A-\mu).$$

Les coordonnées de ce point sont donc inversement proportionnelles à $\sin(A-\mu)$, $\sin(B-\mu)$, $\sin(C-\mu)$ et l'on peut poser :

$$\sin A \cos \mu - \cos A \sin \mu = \frac{\rho}{x},$$

$$\sin B \cos \mu - \cos B \sin \mu = \frac{\rho}{y},$$

$$\sin C \cos \mu - \cos C \sin \mu = \frac{\rho}{z},$$

ρ étant une variable d'homogénéité. L'élimination de $\cos \mu$, $\sin \mu$, ρ donne :

$$\begin{vmatrix} \sin A & \cos A & \frac{1}{x} \\ \sin B & \cos B & \frac{1}{y} \\ \sin C & \cos C & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = 0,$$

ou en coordonnées normales :

$$\sum \frac{\sin(B - C)}{x} = 0,$$

et en coordonnées barycentriques :

$$\sum \frac{\sin A \sin(B - C)}{\alpha} = 0, \quad \text{ou} \quad \sum \frac{b^2 - c^2}{\alpha} = 0.$$

C'est l'équation de l'hyperbole de Kiepert.

(A suivre.)

VARIÉTÉS

ESSAI

SUR LA

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 147).

33. Examen du cas où les deux points sont invisibles. — Nous supposons maintenant que les points A et B, qui déterminent la droite qu'il faut prolonger, sont, tout à la fois, inaccessibles et invisibles. Nous accordons seulement que A est à l'intersection de deux droites données α, α'; et, de même, B est déterminé par les segments β, β', qu'on suppose prolongés dans l'espace inaccessible.

Soit Δ une droite tracée dans la partie accessible; elle rencontre AB en un point O′ que nous voulons déterminer.

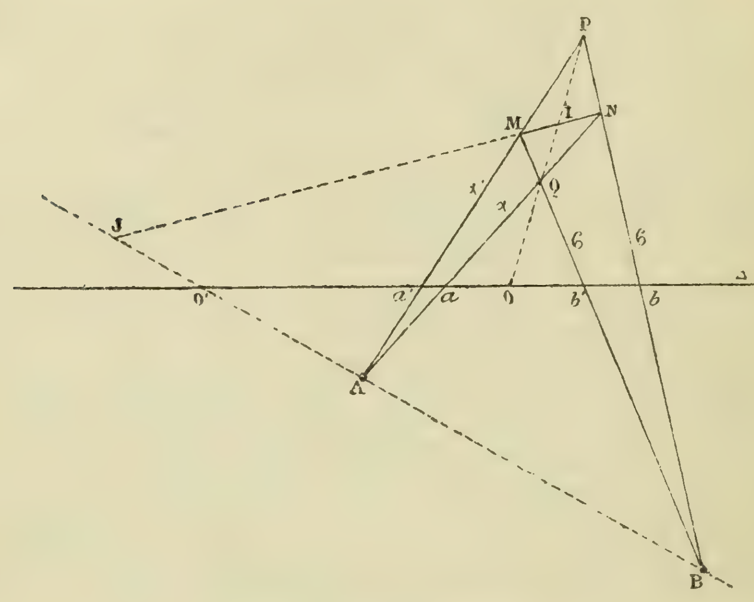


Fig. 172.

A cet effet, nous établirons la relation suivante

$$\frac{Oa.Ob}{Oa'.Ob'} = \frac{O'a.O'b}{O'a'.O'b'} \; (*). \qquad (C)$$

(*) Ce théorème, ou plutôt un de ses corollaires, a été utilisé par Servois pour *trouver un point dans l'alignement des deux points de concours invisibles de deux paires de lignes données de direction;* il vaut mieux dire, croyons-nous, *données de situation.*

Quoi qu'il en soit, la solution de Servois ne fournit qu'un point particulier du prolongement cherché et celui-ci ne se trouve pas complètement déterminé.

Le théorème en question est dû à Carnot (*Géométrie de position*, p. 456).

Bergery (*loc. cit.* p. 109) s'est aussi occupé de ce problème, à propos duquel il dit : « Il peut être d'un grand secours dans l'attaque des places de guerre. Regardons AB comme une portion de la face d'un bastion. Il faudra, pour détruire l'artillerie placée sur cette face, établir dans la campagne une batterie qui l'enfile, et cette batterie devra avoir une de ses extrémités en un point du prolongement de AB. Or, on ne saurait déterminer ce prolongement à l'œil seul, en raison de ce qu'on ne peut apercevoir de loin deux points, ni même souvent un seul point de la face du bastion. Il s'agira donc, en général, de déterminer le prolongement d'une droite invisible AB. Voici comment on pourra faire etc. »

La solution de Bergery est d'ailleurs la même que celle de Servois; elle fournit un point du prolongement, mais non *un point quelconque*

Les triangles $Pa'b$, Qab' et la transversale O'AB donnent

$$\frac{O'b}{O'a'} = \frac{AP.Bb}{Aa'.BP},$$

et

$$\frac{O'a}{O'b'} = \frac{Aa.BQ}{AQ.Bb'};$$

d'où

$$\frac{O'a.O'b}{O'a'.O'b'} = \frac{Aa.Bb.AP.BQ}{Aa'.Bb'.AQ.BP}. \qquad (1)$$

De même, les triangles Aaa', Bbb' et la transversale PQO donnent

$$\frac{Oa}{Oa'} = \frac{Qa.AP}{Pa'.AQ},$$

et

$$\frac{Ob}{Ob'} = \frac{QB.Pb}{Qb'.PB};$$

d'où

$$\frac{Oa.Ob}{Oa'.Ob'} = \frac{Qa.Pb.AP.BQ}{Qb'.Pa'.BP.AQ}. \qquad (2)$$

D'autre part, les triangles ANP, BN'Q, coupés par la transversale Δ, prouvent que l'on a

$$\frac{a'A}{a'P}\cdot\frac{aN}{aA}\cdot\frac{bP}{bN} = 1,$$

et

$$\frac{b'B}{b'Q}\cdot\frac{bN}{bB}\cdot\frac{aQ}{aN} = 1.$$

De ces dernières égalités, on conlut :

$$\frac{Aa.Bb}{Aa'.Bb'} = \frac{Qa.Pb}{Qb'.Pa'}.$$

D'après cela, la comparaison des égalités (1) et (2) établit l'exactitude de (C).

La relation (C) permet de déterminer le point O', quelle que soit la transversale Δ considérée; mais cette détermination, pour être faite avec simplicité, exige encore quelques

---

et si, comme il arrive le plus souvent, le point trouvé est trop éloigné du bastion, le feu de la batterie qui doit enfiler le bastion sera sans effet. Ce n'est donc pas un point particulier du prolongement qu'il faut déterminer, mais un point convenablement choisi, dans une portion déterminée du terrain.

précautions, dans le détail desquelles nous devons entrer, avant d'abandonner le problème que nous avons en vue.

On doit d'abord observer que l'égalité (C) semble faire dépendre la connaissance du point O′ de la résolution d'une équation du second degré, mais il n'y a là qu'une apparence et la raison de la simplification que nous signalons ici tient à ce que, en supposant le point O′ confondu avec O, on obtient une solution évidente de (C). Malgré cela, la détermination du prolongement de AB souffrirait encore certaines difficultés pratiques, si l'on ne faisait pas les observations suivantes.

Une première remarque porte sur ce fait que AB passe par le point J, conjugué harmonique de I par rapport au segment MN; cette remarque a été faite par Servois et elle ne pouvait évidemment lui échapper. Pourtant, ce point peut, dans un grand nombre de cas, être rejeté hors des limites du terrain et la question qui nous occupe ne peut être considérée comme complètement résolue, par cette seule remarque.

Mais voici un corollaire du théorème de Carnot conduisant assez simplement, et dans des conditions pratiques très acceptables, à la solution cherchée.

Soit FG, une transversale quelconque; supposons que Δ

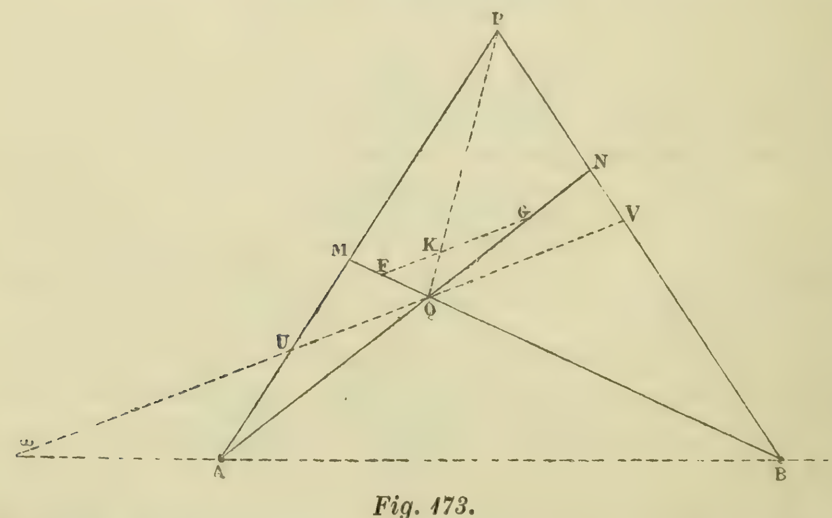


Fig. 173.

(fig. 172), droite que nous supposerons parallèle à FG, se transporte parallèlement à elle même jusqu'à ce qu'elle vienne passer par le point Q *(fig. 173)*; les points a, b' de la première

figure viennent alors coïncider avec Q et les segments Oa, Ob' sont deux infiniments petits donnant la relation

$$\text{Lim}\,\frac{Oa}{Ob'} = \frac{KG}{KF}.$$

D'ailleurs

$$\text{Lim}\,\frac{O'a}{O'b'} = 1\,;$$

l'égalité (C) donne donc

$$\frac{KG}{KF}\cdot\frac{QV}{QU} = \frac{\omega V}{\omega U}\cdot\ (*)$$

C'est cette relation qui constitue le corollaire que nous avions en vue; elle permet de trouver le point ω, point appartenant à une partie arbitraire du prolongement cherché. Celui-ci se trouve donc bien déterminé, si restreinte que soit la partie du terrain accessible sur laquelle il pénètre.

34. La percée d'un bois. — Ce problème de géométrie pratique a été soulevé par quelques-uns (**) de ceux qui ont écrit sur cette matière ; il se rattache d'ailleurs intimement à celui qui vient de nous occuper dans le présent chapitre.

Voici comment on peut poser le problème de la percée d'un bois.

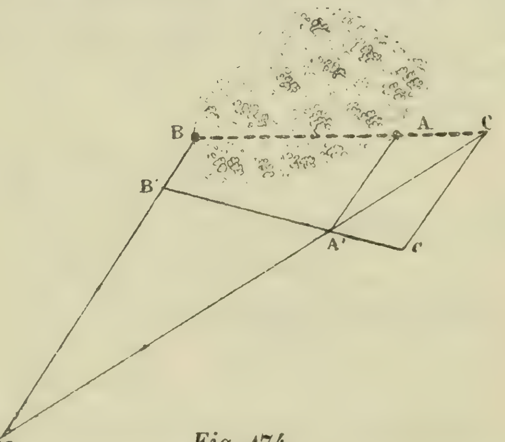


Fig. 174.

On imagine qu'un certain bois doit être traversé par une route, allant du point A au point B ; et l'on propose, pour achever le travail plus rapidement, de faire attaquer la

(*) On voit qu'en supposant KF = KG, on déduit de là le théorème classique, relatif aux diagonales du quadrilatère complet

(**) Voyez Bergery (*loc. cit.* p. 109). Bergery suppose que la direction de la percée est complètement donnée d'un côté du bois ; dans ces conditions, le problème revient absolument à celui qui consiste à prolonger une droite au delà d'un obstacle; mais le problème, dans les termes où nous l'avons posé, présente un intérêt particulier.

percée, simultanément, aux points A et B, en traçant deux alignements, formant une seule et même droite.

Ayant jalonné une droite quelconque B'A'C' dans la partie accessible, traçons trois alignements parallèles, AA', BB', CC'. Toute la question revient à déterminer le point C, qui se trouve sur le prolongement de AB. Une propriété connue donne

$$CC' = \frac{AA'.B'C' - BB'.A'C'}{B'A'}; \qquad (1)$$

cette égalité permet de calculer CC', quand on a chaîné les segments BB', B'A, A'C' et AA'.

Il est vrai que la formule précédente est, relativement, compliquée ; mais on peut, dans la plupart des cas, lui substituer, pour la solution du problème en question, une égalité plus simple que nous allons indiquer.

Le point C' est arbitrairement choisi ; supposons que, au moyen du cordeau, nous prenions $A'C' = A'A$; puis, joignons CA' et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre en M avec BB',

Nous avons

$$CC' = MB'.\frac{A'C'}{B'A'},$$

et, par comparaison avec (1)

$$MB'.A'C' = AA'.B'C' - BB'.A'C'.$$

Mais nous supposons $AA' = A'C'$, cette égalité prouve donc que

$$MB = B'C'.$$

De là une construction très simple pour déterminer le point inconnu C, avec la fausse équerre et le cordeau.

On trace les parallèles AA', BB' et, avec le cordeau, on prend $A'C' = A'A$; puis, toujours avec le cordeau, $BM = B'C'$; la droite MA' et la parallèle à AA', menée par C', concourent au point cherché.

On déterminera, de même un second point sur le prolongement de AB et l'on aura finalement, de part et d'autre du bois, les deux jalonnements qui doivent être prolongés pour exécuter, comme on l'a proposé, deux percées, partant des points donnés A, B, et constituant une seule et même droite.

Remarque I. — On peut avoir besoin d'évaluer, avant de l'entreprendre, le travail nécessaire pour obtenir la percée AB; en d'autres termes, on peut demander la longueur AB.

Cette distance s'obtient en observant que

$$AB = A'B' . \frac{AC}{A'C'} .$$

Remarque II. — Le problème précédent est analogue au *problème du tunnel;* du moins, quand l'obstacle qu'il s'agit de percer est tel que les points A et B peuvent être reliés l'un à l'autre par un circuit rectiligne, se maintenant dans un terrain horizontal. Mais dans le cas, le plus ordinaire, où l'obstacle qu'il s'agit de percer, de A en B, appartient à une chaîne de montagnes, le problème présente alors plus de difficultés; il exige l'emploi des formules trigonométriques et cesse d'être du ressort de la géométrie de la règle et de l'équerre.

35. Les percées concourantes. — On suppose, dit Bergery *(loc. cit.)*, que deux allées pratiquées dans un bois concourent en O à un rond-point, ou à la grille d'un château ; et l'on veut, en partant d'un point pris sur la limite du bois effectuer une percée nouvelle, partant de ce point, pour aboutir en O.

Au fond, le problème revient à mener, par un point, une droite allant passer par le point de concours inaccessible de deux droites données; et ce problème peut, comme l'on sait, se résoudre de bien des façons diverses; notamment par la considération des pôles et polaires, comme l'a montré Bergery.

Fig. 175.

Nous rapporterons d'abord la construction qu'il indique ; bien qu'un peu longue, elle offre l'avantage de résoudre le problème par des alignements, sans avoir recours à la chaîne, ou même au cordeau.

Soient Δ, Δ' les alignements donnés, concourant en O ; il s'agit de mener par C une droite Δ'' allant passer par ce même point O. A cet effet, par C, on mène deux transversales AB', BA' ; les droites AB, A'B' concourent en M. Par M, on trace une troisième transversale quelconque MA"B" ; on obtient alors, comme l'indique la figure, un point C'. La droite CC' étant la polaire de M par rapport aux droites Δ, Δ', on sait que CC' passe par le point O.

Le problème est donc résolu. On observera que les droites AB", BA" donneraient, par leur concours, un point en ligne droite avec CC' ; cette remarque fournit une vérification de la construction précédente.

Voici, pour le même problème, une construction qui nous paraît plus pratique ; elle permet en même temps d'évaluer, *à priori*, le travail de l'entreprise, ou, si l'on préfère, la dépense correspondante.

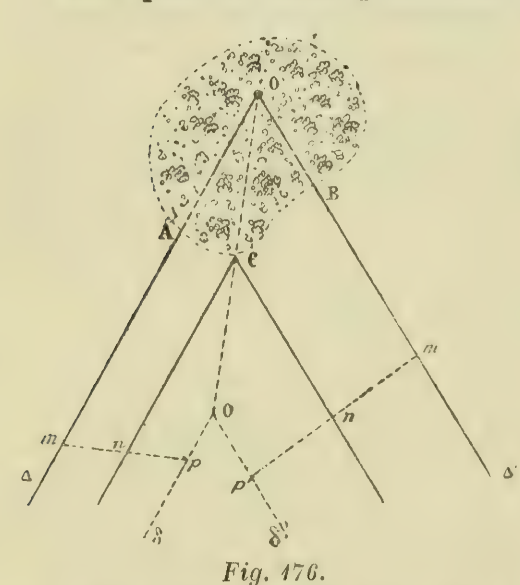


Fig. 176.

Menons, par C, des droites Cn, Cn' respectivement parallèles à Δ et à Δ' ; puis, ayant tracé deux jalonnements arbitraires mnp, $m'n'p'$, prenons sur ceux-ci des points p, p' tels que

$$np = mn, \qquad n'p' = m'n'.$$

Si nous menons alors, par p et p', des droites δ, δ' parallèles à Δ et à Δ', nous obtenons un point O'. La droite O'C passe par O ; de plus, nous avons O'C = CO. Cette double remarque nous paraît résoudre complètement, et simplement, le problème des percées concourantes.

36. La percée centrale. — On suppose qu'une route Δ, déjà tracée, traverse un certain bois U et l'on propose, en partant d'un point C, d'effectuer une percée nouvelle coupant la partie AB, interceptée par U sur Δ, en deux segments égaux.

La solution de ce problème est des plus simples. Sur Δ, avec le cordeau, on prendra deux segments égaux AA′, BB′ les points A′, B′ étant choisis de telle sorte qu'ils soient visibles, l'un et l'autre, du point C. Ayant mené MN parallèlement à Δ, la droite qui joint C au milieu J de MN passe évidemment par le milieu I de AB.

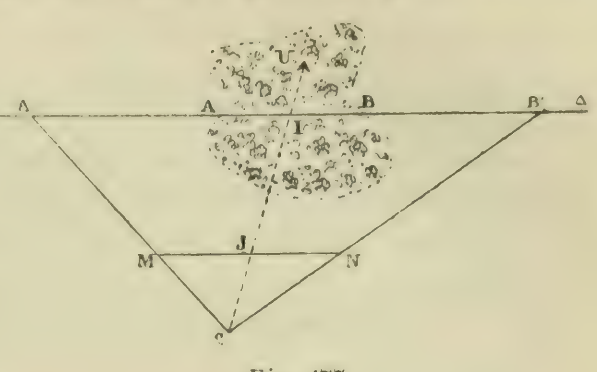


Fig. 177.

Si, généralisant ce problème, on voulait couper AB dans un rapport donné $\frac{p}{q}$; on voit qu'on devrait prendre les segments AA′, BB′ proportionnels à p et à q, puis partager MN dans le rapport $\frac{p}{q}$.

(A suivre).

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Vire

(*Suite*, voir p. 155.)

51. — Si, par un point M pris dans l'intérieur d'un triangle ABC, on mène des parallèles aux côtés, ces parallèles déterminent trois triangles semblables à ABC. Le point M, pour lequel la somme des carrés des rayons des cercles inscrits ou circonscrits à ces triangles est minimum, est le point de concours des médianes.

En désignant par x, y, z les distances de M aux trois côtés, on démontre aisément :

$$\frac{x}{h}+\frac{y}{h'}+\frac{z}{h''}=1.$$

On doit chercher le minimum de

$$\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{h'^2}+\frac{z^2}{h''^2}.$$

Ce minimum a lieu pour

$$\frac{x}{h}=\frac{y}{h'}=\frac{z}{h''}$$

ce qui caractérise le point de concours des médianes.

Remarque. — Le lieu des points M tels que la somme des carrés des rayons considérés est constante est une conique dont le centre est le point de concours des médianes.

A la somme des carrés, on pourrait substituer une fonction symétrique quelconque; cette fonction passerait par un maximum ou un minimum pour $\frac{x}{h}=\frac{y}{h'}=\frac{z}{h''}$, c'est-à-dire pour la même position de M.

52. — Si on a $a+b+c=0$. On a aussi

1° $\Sigma a^4 = \frac{1}{2}(\Sigma a^2)^2$

2° $\frac{\Sigma a^5}{5} = \frac{\Sigma a^3}{3}\cdot\frac{\Sigma a^2}{2}$

3° $\Sigma a^6 = \frac{1}{2}\Sigma a^4 \Sigma a^2 + \frac{1}{3}(\Sigma a^3)^2$

4° $\frac{\Sigma a^7}{7} = \frac{1}{6}\Sigma a^4 . \Sigma a^3$

5° $\frac{\Sigma a^7}{7} = \frac{\Sigma a^5}{5}\cdot\frac{\Sigma a^2}{2}$

6° $\Sigma a^9 = \frac{7}{10}\Sigma a^5 . \Sigma a^4 + \frac{1}{3}\Sigma a^6 \Sigma a^3$

7° $7\Sigma a^5 \Sigma a^4 = 5\Sigma a^7 \Sigma a^2$

Σa^n désignant la somme $a^n+b^n+c^n$.

Toutes ces identités algébriques peuvent se démontrer d'une même manière, en faisant tout passer dans le premier membre, et en vérifiant que ce premier membre est alors divisible par $a+b+c$.

On pourrait en former d'autres pour des puissances d'un degré plus élevé, mais il ne me paraît pas aisé de trouver des formules générales.

53. — On considère toutes les paraboles qui ont même directrice et même paramètre, et sont situées d'un même côté de cette directrice. D'un point fixe O de cette droite on leur mène un couple de tangentes OA, OB. Enveloppe de la corde de contact AB?

Soit F le foyer d'une de ces paraboles, d'après des théorèmes connus:
1° La droite AB passe par F; OF est perpendiculaire sur AB.

Le point F décrit une droite Δ parallèle à la directrice donnée D. L'enveloppe cherchée est donc une courbe telle que le lieu des pieds

des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur ses tangentes est une droite Δ; cette propriété caractérise une parabole, de foyer O, et dont la tangente au sommet est Δ.

54. — On considère le cercle trigonométrique; la tangente à ce cercle menée par l'origine A; un rayon OM faisant avec OA l'angle α; une droite MB parallèle à OA. Déterminer le rayon d'un cercle tangent à AB, à MB et au cercle trigonométrique. Le problème admet cinq solutions différentes; les cinq rayons peuvent être donnés par des formules logarithmiques, sans introduction d'angle auxiliaire.

Soit y le rayon cherché.

1° Le cercle est inscrit dans le triangle mixtiligne MBA, ou inscrit dans l'angle ABM, extérieurement au cercle trigométrique; les deux rayons sont les racines de la même équation :

$$y^2 - 2y(2 + \sin\alpha) + \sin^2\alpha = 0;$$

qui donne

$$y_1 = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$$

$$y_2 = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$$

2° Le cercle est tangent à AB prolongé, il y a deux positions, les rayons sont racines de l'équation

$$y^2 - 2y(2 - \sin\alpha) + \sin^2\alpha = 0,$$

de laquelle on tire

$$y_3 = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)$$

$$y_4 = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)$$

3° Les deux cercles sont tangents en A.

$$y_5 = r\sin\alpha.$$

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. Henri Richaud, la lettre suivante qui intéressera certainement les amis, malheureusement trop peu nombreux, comme il le fait observer, de la théorie des nombres.

« Il serait vraiment à souhaiter que les rares personnes qui s'occupent en France, d'analyse indéterminée fissent, de

l'équation de Fermat, un sujet de recherches qui nous paraît particulièrement digne de fixer leur attention. Les calculs qu'on est obligé de faire, conformément à la méthode si élégante de Lagrange, pour déterminer une première solution $x = p$, $y = q$, en nombres différents de zéro et de l'unité sont, comme l'a fait remarquer M. H. Brocard (*), sinon impraticables, du moins fort laborieux : il importerait donc de les réduire autant que possible. C'est d'ailleurs ce qu'a commencé à faire M. H. Van Aubel (**) dans un travail remarquable présenté en 1885 au Congrès de Grenoble, sous votre présidence. Mais, malheureusement, comme l'a remarqué M. Ed. Lucas, les valeurs de A qui donnent les plus grands nombres, pour les plus petites solutions, échappent à la méthode de l'auteur : il est vrai que, pour ces valeurs de A, on obtient, plus rapidement que ne le fait Lagrange, les valeurs cherchées, grâce aux théorèmes I et II du travail précité. Quoi qu'il en soit, il reste beaucoup à faire et je serai heureux si les quelques corrections, que je vous signale et que vous voulez bien insérer dans votre recueil, sont de nature à gagner la curiosité des chercheurs et à les faire méditer sur la célèbre équation $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, comme l'appelle Jacobi.

P.-S. — J'ai relevé dans la note ci-jointe les erreurs que j'ai pu rencontrer dans la table de la 3e édition, lors du rapprochement que j'en ai fait avec l'*Essai sur la théorie des nombres.*

Je vous donne enfin, à titre de curiosité, les valeurs d'x et d'y satisfaisant à l'équation $x^2 - 1549y^2 = -1$, ayant, pour me rendre compte des progrès réalisés, continué jusqu'à 1600 la table de Legendre.

Pour $x^2 - 1549\,y^2 = -1$ on a :

$x = 155{,}091{,}664{,}786{,}017{,}897{,}306{,}106{,}048{,}533{,}964{,}770.$

$y = 3{,}940{,}603{,}592{,}440{,}589{,}186{,}792{,}668{,}219{,}155{,}493.$

$A = 1549 = 8 \times 193 + 5$ nombre premier.

(*) H. Brocard. *Notes élémentaires sur le problème de Pell; N. C. M.*, t. IV, 1878.

(**) H. van Aubel. professeur à l'Athénée royal d'Anvers. *Quelques notes sur le problème de Pell; A. F.*, Grenoble, 1885.

*Errata à la 3*me *édition de la* Théorie des Nombres *d'Adrien Marie Legendre.*

(Table X, tome I, 2 vol. in-4, Firmin-Didot, 1830.)

A	Valeurs de la 3e édition *(fausses)*. $\frac{x}{y}$	Valeurs de la 1re édition *(bonnes)*.
116	$\frac{9\mathbf{3}01}{910}$	$\frac{9\mathbf{8}01}{910}$
149	$\frac{113582}{930\mathbf{3}}$	$\frac{113582}{930\mathbf{5}}$
171	$\frac{.70}{13}$	$\frac{\mathbf{1}70}{13}$
271	$\frac{115974498\mathbf{8}600}{7044978537}$	$\frac{11597498\mathbf{3}600}{7044978537}$
308	$\frac{\mathbf{2}51}{20}$	$\frac{\mathbf{3}51}{20}$
479	$\frac{2989440}{13\mathbf{9}591}$	$\frac{2989440}{13\mathbf{6}591}$
629	$\frac{\mathbf{185}0}{313}$	$\frac{\mathbf{810}0}{313}$ valeur fausse pour x, 1re édition.

Correction (*) : $\frac{7850}{313}$

667	$\frac{107119097}{4147.68}$	$\frac{107119097}{4147\mathbf{6}68}$
749	$\frac{1084616384.95}{3963102017 6}$	$\frac{108461638\mathbf{4}895}{3963102017 6}$
751	$\frac{72933184667948824 2\mathbf{53}18960}{2661369706772060244567 93}$	$\frac{72933184667948824 2\mathbf{44}18960}{2661369706772060244567 93}$
809	$\frac{4\mathbf{8385202}6\mathbf{04}0}{1\mathbf{52534249}33}$ valeur fausse pour x, 3e édition.	$\frac{4\mathbf{2203688}6\mathbf{19}0}{1\mathbf{48347898}33}$ valeurs de la 1re édition, fausses pour x et pour y.

Correction : $\frac{433.852.026.040}{15.253.424.933}$

823	$\frac{235170..4903644006168}{8197527430497636651}$	$\frac{235170\mathbf{47}4903644006168}{8197527430497636651}$

(*) Correction signalée par M. Catalan dans une *note sur un problème d'analyse indéterminée*, publiée dans les *Atti dell' Academia Pontificia de Nuovi Lincei*, t. XX, Rome, 1866.

ÉCOLE NAVALE

ÉPREUVES ÉCRITES DU CONCOURS D'ADMISSION EN 1887

Arithmétique et algèbre.

I. De deux points O et O' situés à une distance OO' égale à $2a$, comme centres, on trace deux circonférences égales de rayon R; à partir du point M milieu de OO', et dans le sens MO, on porte une longueur MA égale à x, et au point A on mène à la circonférence O la corde BC perpendiculaire à OO'; on joint OB et on achève le trapèze isoscèle OBB'O'.

On demande :

1° De trouver l'expression du volume engendré par la révolution du trapèze OBB'O' autour de OO'. On examinera l'interprétation dont cette expression est susceptible, pour les valeurs négatives de x, lorsque les deux circonférences se coupent;

2° De trouver les valeurs de x correspondant au maximum et au minimum de la fonction

$$(R + a - x)(R - a + x)(a + 2x);$$

3° De classer ces valeurs relativement aux racines de la fonction elle-même, et de déduire de cette classification la condition pour que le volume engendré soit susceptible d'un maximum ou d'un minimum.

II. Démontrer que si l'on désigne par R la partie entière de la racine carrée d'un nombre entier, par r le reste et par n la partie entière du quotient $\frac{2R}{r}$, la racine exacte est comprise entre $R + \frac{1}{n}$ et $R + \frac{1}{n+1}$

Sur une circonférence de rayon égal à l'unité on donne un arc AB égal à φ (en parties du rayon); on partage cet arc en m parties égales et on mène les cordes qui joignent les points de division voisins; sur chacune de ces cordes comme hypoténuse on construit un triangle rectangle isoscèle ADC; démontrer que si m croît indéfiniment le produit des distances des sommets de ces triangles au centre, c'est-à-dire $(OD)^m$ a pour limite $e^{\frac{\varphi}{2}}$ ou $e^{-\frac{\varphi}{2}}$ suivant que les triangles sont rabattus à l'extérieur ou à l'intérieur de l'arc.

(1er juin de 7 h. à 10 h. 1/2.)

Géométrie descriptive.

Étant données les deux droites OA et OB', la première OA située dans le plan horizontal et faisant avec la ligne de terre xy un angle de 40°, la seconde OB' située dans le plan vertical et faisant avec la ligne de terre xy un angle de 50°, on demande :

(*) Questions empruntées au recueil publié par la librairie Morant-Foucart (20, rue de la Sorbonne).

1° De tracer les projections OC, OC′ d'une droite passant par le point O faisant avec OA un angle de 70°, avec OB′ un angle de 45° et située par rapport au plan AOB′ du même côté que Ox;

2° De tracer les projections de l'axe du cône de révolution passant par les droites OA, OB′ et la droite OC OC′ précédemment déterminée.

(2 juin, de 2 h. à 3 h. 1/2.)

Calcul trigonométrique.

Calculer les valeurs de x comprise entre 0° et 360° qui satisfont à l'équation

$$\operatorname{tg}^3(3x+12)^\circ = \frac{23,3382\sqrt{\sin 177^\circ 12' 18''}}{(0,017045)^2 \times \operatorname{tg}^4 84^\circ 30' 48'' \times \sin^7 244^\circ 18' 12''}$$

(2 juin, de 4 h. à 5 h.).

Géométrie et géométrie analytique.

Géométrie.

Énoncer et démontrer succinctement les principaux théorèmes qui permettent d'établir que le rapport de deux pyramides est égal au produit du rapport des surfaces des bases par le rapport des hauteurs.

Application. — Trouver l'expression numérique du volume d'une pyramide dont la base est donnée en mètres carrés, soit $8^{mq}254$ et la hauteur en mètres soit : $4^m,32$ lorsqu'on prend pour unité de volume le tétraèdre régulieur dont la hauteur est égale à 1^m.

Géométrie analytique.

Étant donnée l'équation

$$\lambda(x^2 - ax) - ay(x - y - a) = 0$$

dans laquelle a désigne une quantité constante, positive, et λ un paramètre variable, on demande :

1° De déterminer la nature des diverses courbes que peut représenter cette équation lorsque λ varie de $+\infty$ à $-\infty$.

2° De démontrer qu'elles passent par trois points et que le lieu de leurs centres est une ligne droite.

3° De construire, pour une valeur donnée de λ, le centre de la courbe correspondante et les tangentes aux trois points fixes.

4° De trouver le lieu géométrique de ces courbes où les tangentes sont parallèles à l'axe des x.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE 1887

Mathématiques (3 heures).

I. Inscrire dans un triangle ABC un rectangle DEFG dont un côté FG est placé sur BC, et tel qu'en augmentant la surface de ce rectangle de celle du triangle équilatéral construit sur FG on ait une somme équivalente à un carré donné K^2. Discuter.

II. On considère un triangle ABC, les trois hauteurs AA', BB', CC' qui rencontrent le cercle circonscrit aux points A'', B'', C'', et on demande : 1° d'exprimer les longueurs AA', BB', CC', AA'', BB'', CC'' en fonction des angles A, B, C du triangle ABC, et du rayon R du cercle circonscrit; 2° de montrer que la somme $\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'}$ est une constante.

III. Trouver les valeurs de x qui satisfont à l'équation $\sin x = \sin a + \sin(a + h) + \sin(a + 2h)$. On fera $a = 8°25'37''$ $h = 7°17'26''$.

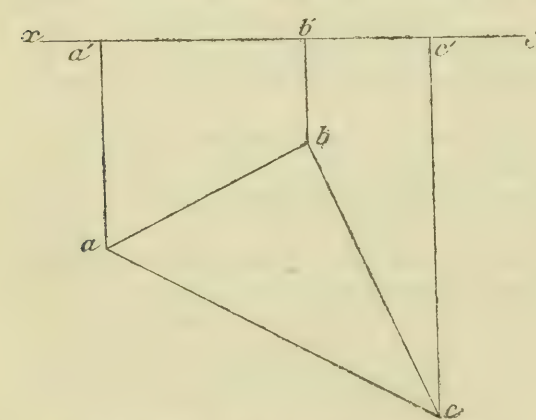
Épure (2 heures 1/2). (*)

Un tétraèdre est placé sur le plan horizontal : un des côtés de la base ab (a est à gauche) est parallèle à la ligne de terre, et distant de cette ligne de 35mm, sa longueur est de 100mm; les deux autres côtés ont pour longueurs $ac = 123^{mm}$, $bc = 110^{mm}$. L'arête $Sa = 130^{mm}$, l'arête $Sc = 125^{mm}$, l'angle dièdre formé par les deux faces abc et Sac est de 70°. Construire ce tétraèdre. A partir du sommet S on prend sur Sa une longueur SO égale à 50mm et du point O comme centre on décrit une sphère passant par le sommet S. Trouver l'intersection de cette sphère avec le tétraèdre.

Dans la mise à l'encre, on supposera enlevée toute la portion du tétraèdre détachée par la sphère.

Épure (2 heures 1/2).

Un tétraèdre SABC a sa base ABC sur le plan horizontal : $aa' = 84^{mm}$; $a'b' = 99^{mm}$; $ab = 112^{mm}$; $bc = 144^{mm}$; $ac = 171^{mm}$. L'arête SA parallèle au plan vertical égale 136mm, et fait avec l'arête AB un angle de 62°.



On demande : 1° de construire le tétraèdre; 2° de mener la droite DE perpendiculaire commune aux deux arêtes opposées SA et BC.

Du point O, milieu de DE, comme centre, on décrit une sphère avec un rayon égal à 22mm; mener à cette sphère deux plans tangents perpendiculaires à l'arête SC, et construire les sections de ces deux plans avec le tétraèdre,

Dans la mise à l'encre on ne conservera que la partie du tétraèdre comprise entre les deux plans.

(*) Question annulée.

QUESTION 134

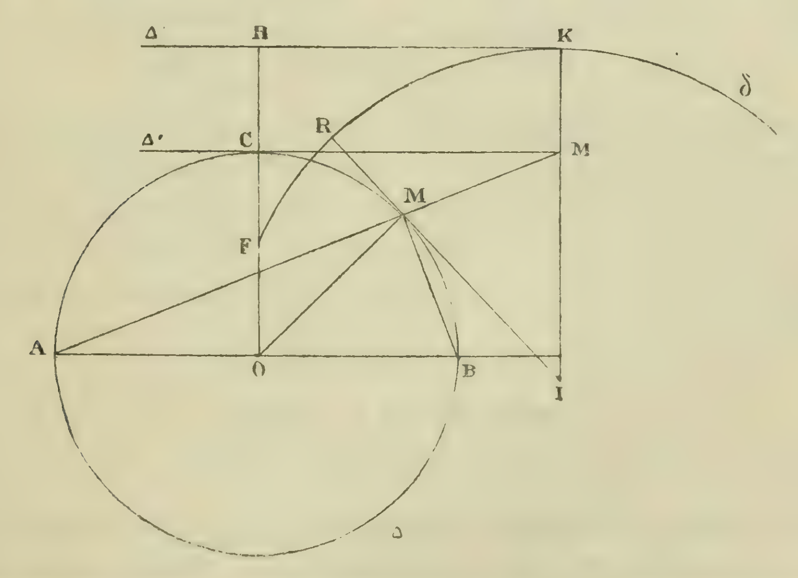
Solution par M. J. Chapron, à Bragelogne.

On considère un cercle Δ, *de centre* O; *soient* AB *un diamètre de ce cercle, et* OC *le rayon perpendiculaire à* AB. *On prend*

$$OF = FC = CH = \frac{R}{2};$$

par le point H *on mène une droite* Δ' *parallèle à* AB, *et par le point* C *une droite* Δ'' *également parallèle à* AB. *Cela posé; par* A, *on trace une transversale mobile, qui rencontre* Δ *en* M, *et* Δ'' *en* M'. *En* M, *on mène la tangente à* Δ, *et cette droite rencontre en* I *la perpendiculaire abaissée de* M' *sur* AB. *Soit* K *le point où* M'I *rencontre* Δ'. *Démontrer : 1° que le cercle* δ *décrit du point* I *comme centre avec* IK *pour rayon, rencontre* MI *en un point dont le lieu géométrique est un cercle; 2° que* δ *passe constamment par un point fixe, le point* F.

1° Soient R un point du lieu, S le point de rencontre de AB et de IK. Les triangles OMB, IMM' ont leurs côtés



perpendiculaires; ils sont semblables, et IMM' est un triangle isocèle. Le triangle IKR l'est aussi. Par suite, MR ou IR − IM

égale $M'K = IK - IM' = \frac{R}{2}$. Dans le triangle OMR, les côtés de l'angle droit ayant une longueur constante, l'hypoténuse OR a une longueur invariable; le lieu est une circonférence de rayon $\frac{R}{2}\sqrt{3}$ concentrique à Δ.

Le lieu serait encore une circonférence de centre O, si les parallèles Δ', Δ'' à AB étaient menées à des distances quelconques, fixes, de ce diamètre; car $MR = M'K$ serait encore une longueur constante.

2° Il faut prouver que IK = IF. Or

$$IK = IS + 3\frac{R}{2}, \quad \text{et} \quad \overline{IF}^2 = \overline{OS}^2 + \left(\frac{R}{2} + IS\right)^2;$$

mais

$$\overline{OS}^2 = \overline{OI}^2 - \overline{IS}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MI}^2 - \overline{IS}^2$$
$$= R^2 + (IS + R)^2 - \overline{IS}^2, \qquad (R = \text{rayon de } \Delta).$$

Donc

$$\overline{IF}^2 = R^2 + (IS + R)^2 - \overline{IS}^2 + \left(\frac{R}{2} + SI\right)^2$$
$$= 9\frac{R^2}{4} + 3R.IS + \overline{IS}^2 = \left(IS + 3\frac{R}{2}\right)^2$$

d'où

$$IF = IS + 3\frac{R}{2}, \qquad \text{ou, enfin,} \qquad IK = IF.$$

Par un calcul semblable, on trouve que δ passe aussi par un point F', situé sur OC, quand les parallèles Δ' et Δ'' à AB sont menées à des distances a et $a + b$ de AB, si l'on a

$$2ab = R^2.$$

QUESTION 158

Solution par E. Vigarié.

Soit ABC *un triangle: 1° Trouver un hexagone circonscrit au cercle inscrit au triangle, sachant que sur chaque côté de* ABC *sont deux sommets consécutifs de l'hexagone et que les diagonales joignant les sommets opposés sont perpendiculaires chacune à la*

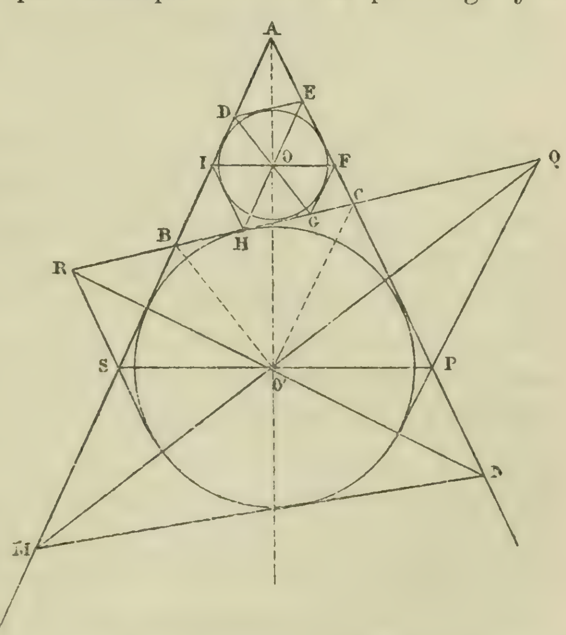
bissectrice de l'angle du triangle sur lesquels se trouvent les extrémités de cette diagonale; 2° La surface de cet hexagone est :

$$\frac{r}{2p}(2cb + 2ac + 2ab - a^2 - b^2 - c^2) \quad (*)$$

r, p, a, b, c, *étant respectivement le rayon du cercle inscrit, le demi-périmètre, et les côtés du triangle* ABC; *3° Si l'on prend un point quelconque sur l'une des diagonales joignant les sommets opposés de cet hexagone, la somme ou la différence des distances de ce point aux deux côtés du triangle auxquels se termine la diagonale est égale au diamètre du cercle inscrit; 4° Traiter les mêmes questions pour les cercles ex-inscrits.*

(E. Lemoine.)

1° L'hexagone DEFGHI dont les côtés sont parallèles à ceux du triangle donné satisfait aux conditions de l'énoncé, car les côtés IH et FG par exemple, si on les prolonge jusqu'à leur rencontre en K, forment un losange AIKF circonscrit au cercle inscrit O dont les diagonales sont perpendiculaires. L'une de ses diagonales IF est diagonale de l'hexagone, l'autre AK est bissectrice de l'angle A du triangle donné.



2° Les diagonales de l'hexagone passant par O et étant partagées par ce point en deux parties égales, les triangles GOH, DOE sont égaux et DE = GH. Donc, dans cet hexagone les côtés opposés sont égaux deux à deux; sa surface sera donc égale

(*) Énoncé rectifié; l'énoncé portait, par erreur, $\frac{r}{p}(\ldots)$.

au produit du demi-périmètre (DE + FG + IH) par le rayon r.

Calculons DE. Les triangles semblables ADE, ABC ont leurs côtés proportionnels à leurs demi-périmètres, donc :

$$\frac{\mathrm{DE}}{a} = \frac{p-a}{p}$$

de même :

$$\frac{\mathrm{IH}}{b} = \frac{p-b}{p}, \qquad \frac{\mathrm{FG}}{c} = \frac{p-c}{p};$$

d'où

$$\mathrm{DE} + \mathrm{IH} + \mathrm{FG} = \frac{a(p-a) + b(p-b) + c(p-c)}{p}$$

$$= \frac{p(a+b+c) - a^2 - b^2 - c^2}{p} = \frac{2p^2 - a^2 - b^2 - c^2}{p}$$

$$= \frac{2ab + 2ac + 2bc - a^2 - b^2 - c^2}{2p}.$$

La surface de l'hexagone a donc pour expression :

$$\frac{r}{2p}(2ab + 2ac + 2bc - a^2 - b^2 - c^2).$$

3° Si l'on prend un point sur l'une des diagonales IF par exemple, les distances de ce point aux côtés AB, AC, ont une somme ou une différence constante suivant que le point considéré est sur la droite IF ou sur son prolongement. Cela résulte d'une propriété connue du triangle isocèle. Dans le triangle isocèle IAF, la hauteur qui est la quantité constante est égale au diamètre du cercle inscrit.

4° Désignons par O′ le centre du cercle ex-inscrit situé dans l'angle A et par r_a son rayon. Si nous menons au cercle O′ des tangentes parallèles aux côtés du triangle, nous obtenons un hexagone concave MNPQRS dont les diagonales passeront par le point O′ et y seront divisées en deux parties égales. La diagonale PS est perpendiculaire à la bissectrice AO′, les deux autres sont perpendiculaires aux bissectrices *extérieures* CO′, BO′.

Comme précédemment, les côtés opposés de cet hexagone sont égaux et sa surface est :

$$r_a(\mathrm{MN} + \mathrm{PN} + \mathrm{PQ}).$$

Les triangles semblables AMN, ABC ont leurs côtés pro-

portionnels à leurs demi-périmètres et on a:

$$\frac{MN}{a} = \frac{AN}{b} = \frac{AM}{c} = \frac{AM + MN + NA}{2p} = \frac{p}{p - a}$$

or

$$PN = CN - CP \qquad \text{et} \qquad CN = AN - b = \frac{ba}{p - a}.$$

Mais O′ est le centre du cercle inscrit au triangle AMN, le calcul fait précédemment montre que

$$CP = AM\,\frac{p - c}{p} = \frac{c(p - c)}{p - a}.$$

Donc:

$$PN = CN - CP = \frac{ab - c(p - c)}{p - a}.$$

De même:

$$PQ = \frac{ac - b(p - b)}{p - a};$$

le demi-périmètre sera par suite:

$$MN + PN + PQ = \frac{pa + ab + ac - c(p - c) - b(p - b)}{p - a}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(a+b+c)(a-b-c) + ab + ac}{p - a} = \frac{a^2 - b^2 - c^2 - 2bc + 2ab + 2ac}{2(p - a)}.$$

L'expression de la surface cherchée sera donc:

$$\frac{r_a}{2(p - a)}(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc + 2ab + 2ac).$$

Si l'on prend un point sur une diagonale, PS par exemple, la somme ou la différence (suivant que le point est sur PS ou sur son prolongement) des distances de ce point aux côtés AB, BC est égale à la hauteur du triangle isocèle SAP, hauteur qui est égale au diamètre du cercle ex-inscrit O′.

On arriverait à des résultats analogues en considérant les autres cercles ex-inscrits.

Nota. — Dans ses *Exercices divers de Mathématiques Elémentaires* (*J. E.* 1883, Exercice VIII), M. E Lemoine a indiqué la construction de l'hexagone dont il est question dans la première partie de l'énoncé.

QUESTIONS PROPOSÉES

255. — Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés et qui soit telle que les tangentes menées d'un autre point forment un angle 2α, aussi donné.

(Ignacio Beyens.)

256. — Par un point quelconque H pris sur la base BC du triangle isocèle ABC, on élève à cette base une perpendiculaire qui coupe AB en B_1 et AC en C_1. Démontrer que les symétriques du point H par rapport aux milieux respectifs de BB_1 et de CC_1 sont en ligne droite avec le sommet A.

(D'Ocagne.)

257. — ABC étant un triangle donné; soit D le point de contact avec BC, du cercle inscrit O. On projette les sommets B, C en E, F sur la bissectrice AO; puis l'on construit les parallélogrammes DEBG, DFCH.

Cela posé : 1° Les points B, G, C, H appartiennent à une circonférence; 2° le centre de cette circonférence et le centre O du cercle inscrit sont également distants du côté BC.

(E. Catalan.)

ERRATA (*)

	Au lieu de :	*Lisez :*
Page 124, ligne 5, en remontant :	$(h_a d_a)^2$	$(h_a - d_a)^2$
ligne 3, en remontant,	$2ha$	$2h_a$
ligne 2, en remontant,	$\frac{a}{2}$	$\frac{a^2}{2}$.

(*) Communiqués par M. Galopeau.

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15118-7.

SUR LA CUBIQUE

AUX PIEDS DES NORMALES ISSUES D'UN POINT A UNE QUADRIQUE

Par M. **A. Aubry**, élève au Lycée Louis-le-Grand
(classe de M. Niewenglowski).

(*Suite*, voir p. 169.)

4. — Tout cône ayant son sommet sur la cubique C et passant par cette cubique est, comme l'on sait, du second ordre; puisque ce cône passe en particulier par les points à l'infini sur C, on voit qu'il contient les parallèles aux axes de E menées par son sommet, et que, par suite, il est capable d'une infinité de trièdres trirectangles inscrits. Considérons celui de ces cônes qui a son sommet au point P; soit T ce cône. Soient E_0 l'une des surfaces homofocales à E passant par le point P, PI la normale en P à cette surface et π le plan tangent. Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport à une famille de quadriques homofocales étant une droite perpendiculaire à ce plan, le lieu des pôles du plan π est PI; le pôle du plan π par rapport à E se trouve donc sur PI, soit I ce point: il est clair qu'il appartient à C, d'après la définition même de cette courbe. On voit que le cône T passe par les normales en P aux surfaces homofocales à E qui passent par ce point P; il contient d'ailleurs PO, ainsi que les parallèles aux axes de E. Ce cône ne change pas quand l'on substitue à E une quadrique qui possède les mêmes focales. Donc :

Théorème. — *Les normales issues, d'un point* P, *à une série de quadriques homofocales sont situées sur un cône du second ordre.*

5. — Comme chacun sait, ces résultats s'expliquent aisément par le calcul; aussi ne m'arrêterai-je point à les démontrer de nouveau. Supposons que E soit, par exemple, un ellipsoïde; rapportons-le à ses axes principaux; il a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

α, β, γ désignant les coordonnées du point P, la courbe C a pour équations

$$\frac{x-\alpha}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y-\beta}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z-\gamma}{\frac{z}{c^2}};$$

et l'on peut prendre, pour coordonnées d'un de ses points M :

$$x = \frac{a^2\alpha}{a^2+\lambda}, \quad y = \frac{b^2\beta}{b^2+\lambda}, \quad z = \frac{c^2\gamma}{c^2+\lambda}.$$

A $\lambda = 0$, correspond le point P; et, à $\lambda = \infty$, le point O. Le plan polaire du point M a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2+\lambda} + \frac{\beta y}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma z}{c^2+\lambda} - 1 = 0;$$

ce plan enveloppe une développable de la troisième classe. L'équation précédente est d'ailleurs l'équation du plan polaire du point P par rapport à une surface homofocale à E. De là, on conclut que *la polaire réciproque de la courbe* C, *par rapport à la surface* E, *est une développable de la troisième classe, qui demeure la même pour toutes les quadriques homofocales à* E.

6. — Parmi les surfaces homothétiques et concentriques à E, considérons son cône asymptote S; la cubique C, qui passe par le sommet O, rencontre le cône S en quatre autres points. On peut donc, d'un point quelconque, mener quatre normales à un cône du second degré; leurs points d'incidence sont d'ailleurs sur la sphère décrite sur OP comme diamètre. La courbe C est donc tangente à cette sphère au point O, attendu qu'une cubique gauche perce une quadrique en six points, distincts ou confondus. Cela ressort d'ailleurs de ce que l'équation en λ

$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2\gamma^2}{(c^2+\lambda)^2} - h = 0$$

a deux racines qui augmentent indéfiniment quand h tend vers zéro, et de ce fait, qu'à une valeur infinie de λ, correspond, sur C, le point O.

Les valeurs de λ, qui correspondent aux pieds des normales au cône, sont données par l'équation

$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2\gamma^2}{(c^2+\lambda)^2} = 0.$$

Posons $a^2 + \lambda = \frac{1}{\rho}$; cette équation pourra s'écrire, en la rendant entière,

$$a^2\alpha^2[\rho(b^2 - a^2) + 1]^2[\rho(c^2 - a^2) + 1]^2 + \ldots = 0.$$

La somme des racines est

$$-2\frac{b^2 - a^2 + c^2 - a^2}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} = 2\left[\frac{1}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 - c^2}\right];$$

l'abscisse du point M_i étant

$$\frac{a^2\alpha}{a^2 + \lambda_i} = a^2\alpha\rho_i,$$

l'abscisse du centre de gravité G du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ a pour valeur

$$\frac{1}{2}a^2\alpha\left[\frac{1}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 - c^2}\right].$$

Or les asymptotes L, L′, L″ de C ont pour équations

$$\text{L} \qquad x = x_1 = \frac{a^2\alpha}{a^2 - c^2} \qquad y = y_1 = \frac{b^2\beta}{b^2 - c^2}$$

$$\text{L}' \qquad y = y_2 = \frac{b^2\beta}{b^2 - a^2} \qquad z = z_2 = \frac{c^2\gamma}{c^2 - a^2}$$

$$\text{L}'' \qquad z = z_3 = \frac{c^2\gamma}{c^2 - b^2} \qquad x = x_3 = \frac{a^2\alpha}{a^2 - b^2}.$$

L'abscisse $\frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{1}{2}a^2\alpha\left[\frac{1}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 - c^2}\right]$ du centre du parallélipipède construit sur L, L′, L″ est précisément égale à l'abscisse du point G; les autres coordonnées de ces deux points sont aussi égales.

Donc, *le centre du parallélipipède construit sur les asymptotes de la cubique* C, *coincide avec le centre de gravité du tétraèdre qui a pour sommets les pieds des normales menées, du point* P, *au cône asymptote de* E.

Les paramètres directeurs de la tangente au point M_i étant

$$\frac{dx_i}{d\lambda_i} = -\frac{a^2\alpha}{(a^2 + \lambda_i)^2}, \qquad \frac{dy_i}{d\lambda_i} = -\frac{b^2\beta}{(b^2 + \lambda_i)^2},$$

$$\frac{dz_i}{d\lambda_i} = -\frac{c^2\gamma}{(c^2 + \lambda_i)^2},$$

la relation

$$\frac{(a^2 + \lambda_i)}{{}^2\alpha^2} + \frac{(b^2 + \lambda_i)}{b^2\beta^2} + \frac{(c^2 + \lambda_i)}{c^2\gamma^2} = 0,$$

ou
$$\alpha \frac{dx_i}{d\lambda_i} + \beta \frac{dy_i}{d\lambda_i} + \gamma \frac{dz_i}{d\lambda_i} = 0,$$
montre que cette droite est perpendiculaire à OP, dont les paramètres directeurs sont α, β, γ.

En conséquence, *les tangentes à la cubique* C *aux points où elle rencontre le cône asymptote de* E *sont parallèles à un même plan, qui est perpendiculaire à la droite* OP.

On remarquera l'analogie qui existe entre les deux propriétés de la cubique C, que nous venons de signaler, et les propriétés de l'hyperbole d'Apollonius dont on a fait usage pour construire le centre de cette courbe (Niewenglowski, *Journal de Math. spéc.*, 1884).

NOTE SUR LA CARDIOÏDE ET LA TRISECTRICE DE MACLAURIN

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

Soit C une cardioïde ayant pour point de rebroussement le point R, pour foyer triple le point F et pour sommet le point S. Ces points sont en ligne droite et on a RS = 4RF.

M. de Longchamps a remarqué que *la polaire réciproque de la cardioïde* C *par rapport au cercle de centre* F *et de rayon* FS *est une tristectrice de Maclaurin* T. Nous ferons, pour notre part, observer que *la transformée par rayons vecteurs réciproques de la cardioïde* C *par rapport au cercle de centre* R *et de rayon* RS *est une parabole* P *de foyer* R *et de sommet* S. Nous ne saurions dire si cette remarque est nouvelle ; en tout cas, nous ferons observer qu'elle permet de déduire, des propriétés de la parabole, des propriétés corrélatives pour la cardioïde, et ensuite, par la remarque de M. de Longchamps, pour la trisectrice. Nous ne nous étendrons pas sur ce sujet qu'il serait bien facile de développer. Nous nous contenterons de donner un exemple d'application de cette méthode. Prenons cette propriété bien connue de la parabole :

Le lieu des symétriques du foyer d'une parabole par rapport aux tangentes à cette courbe est la directrice.

Transformant par rayons vecteurs réciproques relativement au cercle de centre R et de rayon RS, on a ce théorème :

Le lieu des centres des cercles qui passent par le point de rebroussement d'une cardioïde et qui sont tangents à cette courbe, est le cercle qui a pour centre le foyer triple de la courbe et qui passe par le point de rebroussement.

Transformant à son tour cette propriété par polaires réciproques relativement au cercle de centre F et de rayon FS, on a cette propriété de la trisectrice de Maclaurin :

Soit F *le symétrique du point de rebroussement d'une trisectrice de Maclaurin par rapport au milieu de la distance du sommet de cette courbe à son asymptote. L'enveloppe des directrices des paraboles tangentes à la trisectrice, tangentes à son asymptote et ayant pour foyer le point* F, *est le cercle de centre* F *qui est tangent à l'asymptote.*

Toute propriété de la parabole conduira ainsi à une propriété corrélative (plus ou moins simple) de la cardioïde et de la trisectrice de Maclaurin. Il y a là une source d'exercices intéressants sur l'application des deux classiques méthodes de transformations par rayons vecteurs et par polaires réciproques.

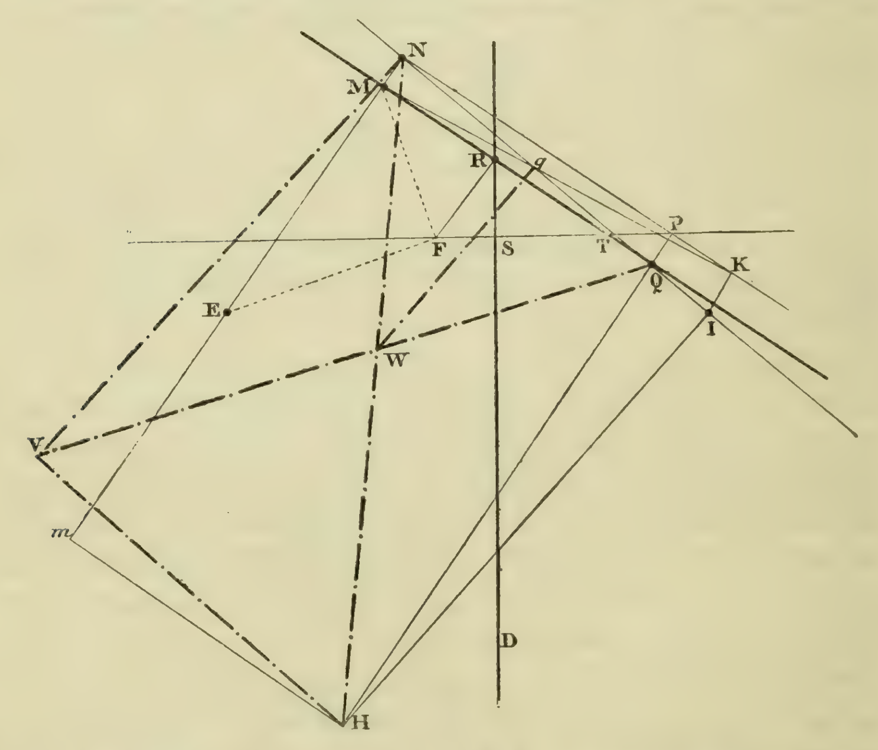
On peut encore déduire des propriétés de la trisectrice de Maclaurin d'une autre remarque. La construction de cette courbe indiquée par M. de Longchamps dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (1886, p. 205) est la suivante : *Étant données les droites* D *et* FP *perpendiculaires entre elles et les points* F *et* P, *tels que* SP = 3FS, *on tire* FR *quelconque*, RQ *perpendiculaire à* FR, PQ *perpendiculaire à* RQ. *Le lieu du point* Q *est la trisectrice de Maclaurin.*

Puisque MRQ est droit, RQ enveloppe une parabole de foyer F et de sommet S, et cette droite touche son enveloppe en un point M tel que RM = TR. La trisectrice est donc la podaire de cette parabole relativement au point P, et comme FP = 4FS, on voit que *la trisectrice de Maclaurin est la podaire d'une parabole relativement au point symétrique du foyer par rapport à la directrice de cette parabole.* Les propriétés

générales des podaires donneront par cette remarque des propriétés de la trisectrice. Nous allons faire voir ici, comment on se trouve ainsi conduit à une construction simple *par la règle et l'équerre* (condition posée par M. de Longchamps) du centre de courbure de la trisectrice.

Pour le centre de courbure des podaires, plusieurs constructions générales ont été indiquées ; entre autres, une par M. Mannheim (*Cours de Géométrie descriptive de l'Ecole Polytechnique*, 1re édition, p. 197); une autre, par nous-même (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, 1880, p. 301). Nous appliquerons ici ces deux constructions après avoir légèrement modifié celle de M. Mannheim, de façon à n'avoir besoin pour l'effectuer que de la règle et de l'équerre.

Élevons en M une perpendiculaire à MT; c'est la normale



à la parabole. Si elle coupe en N la perpendiculaire élevée en P à PQ, QN est la normale à la trisectrice en Q. En F élevons à MF une perpendiculaire qui coupe en E la normale à la parabole, et portons sur cette droite le segment $Em = ME$; le point m est le centre de courbure de la parabole répondant

au point M. Soit enfin H le point où la perpendiculaire élevée en m à Mm coupe la droite PQ. Les modes de détermination du centre de courbure q de la trisectrice, répondant au point Q seront les suivants :

1° *D'après la construction générale de M. Mannheim, — abaisser du point* H *la perpendiculaire* HI *sur* NQ, *et du point* I *la perpendiculaire* IK *sur* NP; *la droite* MK *coupe la normale* QN *au centre de la courbure* q.

2° *D'après notre construction générale, — en* N *élever à* NQ *la perpendiculaire* NV, *et abaisser du point* H *sur cette droite la perpendiculaire* HV. *Du point* W *où* VQ *coupe* NH, *abaisser sur la normale* NK *une perpendiculaire dont le pied est le centre de courbure* q.

On pourrait, à titre d'exercice de géométrie, démontrer la coïncidence des points q obtenus par ces deux constructions.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite,* voir p. 175).

CORRESPONDANCE DE POINTS ET DE DROITES

27. Point et droite harmoniquement associés (M, μ). — Si on prend les points μ', μ'', μ''' conjugués harmoniques des points M′, M″, M‴ où les droites AM, BM, CM coupent les côtés du triangle, ces points μ', μ'', μ''' sont sur une même droite que nous noterons par la lettre μ et que nous appellerons avec M. de Longchamps (*J. E.*, 1886) *droite harmoniquement associée* au point M (*). La droite μ corres-

(*) La droite μ a été aussi nommée *polaire trilinéaire* de M, M étant dit *pôle trilinéaire* de μ. Ces expressions crées par M. le colonel Mathieu (*N. A. M.*, 1865), qui trouvent une interprétation dans la théorie des cubiques, ont été adoptés par plusieurs auteurs et notamment par M. J. Neuberg (*J. S.*, 1886, p. 8, et *Mémoire sur le tétraèdre*). Nous adopterons

pondant au point M (α, β, γ)

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}$$

a pour équation :

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0.$$

Nous avons déjà, dans ce qui précède, rencontré souvent la droite μ, nous aurons dans la suite, occasion d'indiquer plusieurs applications de la présente association.

28. Points et droites associés *(sens général)*. — A un point M (A, B, C) on associe une droite Δ, correspondant à l'équation :

$$\alpha f(A, B, C) + \beta f(B, C, A) + \gamma f(C, A, B) = 0$$

Il suffira pour construire Δ : 1° de déterminer le point M' (associé à M) et dont les coordonnées sont :

$$f(A, B, C), \qquad f(B, C, A), \qquad f(C, A, B)$$

2° De prendre la droite μ' harmoniquement associée au point M'.

3° Enfin, la transversale réciproque μ'_0, de μ'.

La droite μ'_0, ainsi obtenue, n'est autre que Δ.

29. Examen d'un cas particulier d'une droite et d'un point associés. — Considérons la droite Δ représentée par l'équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

et associons lui le point M dont les coordonnées sont proportionnelles à

$$\frac{a^2}{A(B - C)}, \qquad \frac{b^2}{B(C - A)}, \qquad \frac{c^2}{C(A - B)};$$

le point M ainsi déterminé se trouve sur le cercle circonscrit à ABC. Donc :

A toute droite remarquable Δ du plan du triangle correspondra un point M du cercle circonscrit, la correspondance

---

ici le terme proposé par M. de Longchamps ; ce terme, dans la géométrie du triangle, nous paraît rappeler, mieux que tout autre, le genre d'association de la droite μ et du point M.

du point et de la droite étant déterminée par la loi géométrique suivante :

Soit A′ le point où Δ rencontre BC, la parallèle à Δ menée par A rencontre le cercle circonscrit en A″; la droite A′A″ et les droites analogues B′B″, C′C″ se coupent sur le cercle circonscrit, au point cherché M (*).

Ainsi, à une droite Δ, correspond un point M; la réciproque n'est pas exacte. Cependant, si l'on prend sur le cercle circonscrit un point quelconque M et si l'on considère son point inverse M_2 (situé à l'infini), une droite quelconque, passant par M_2, a pour transversale réciproque une droite qui fournit le point M, quand on lui applique la loi géométrique, énoncée ci-dessus.

CORRESPONDANCE DE DEUX DROITES (**)

30. Correspondance générale des deux droites. — Supposons que nous sachions faire correspondre 1° Un point M′ à un point M ; 2° une droite μ à un point M, et réciproquement. Alors nous pouvons faire correspondre : à une droite donnée μ un point M, à celui-ci un point M′ ; enfin à ce dernier point une droite μ'. Donc à une droite Δ nous saurons faire correspondre une droite Δ′, toutes les fois que nous saurons établir une correspondance entre deux points et aussi entre un point et une droite. Cette correspondance des droites Δ, Δ′ une fois établie on pourra chercher la loi de correspondance qui unit directement ces droites. Nous allons faire l'application de ces notions générales.

31. Transversales réciproques. (μ, μ_0). — Soit μ une droite et M son point harmoniquement associé ; à ce point M correspond son réciproque M_0 et à M_0 correspond une transversale μ_0, harmoniquement associée. De la correspondance des points et droites harmoniquement associés et des

(*) Voir : G. de Longchamps. *J.-E.*, 1886 p. 270-273. Ce théorème a été donné par M. Mckensie (*Educational Times, question* 6871). On en trouve une démonstration dans *Mathematical questions and solutions* (Vol. XL p. 66 et vol. XLIII, 1885, p. 109).

(**) Pour tout ce qui se rapporte à la correspondance des deux droites voir G. de Longchamps. — *J. E.*, 1886, pp. 243-250.

points réciproques on déduit donc l'association des droites μ, μ_0. Elles ont été appelées (*) par M. de Longchamps *Transversales réciproques*. Nous les noterons par les lettres μ et μ_0 (**).

On déduit facilement de ce qui précède la loi qui unit directement les deux transversales réciproques ; il suffit d'observer que les deux droites μ, μ_0 coupent les côtés du triangles en des *points isotomiques*.

A une droite μ, ayant pour équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

correspond une transversale réciproque μ_0, dont l'équation est

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0.$$

32. — Transversales inverses. (μ, μ_2). — Considérons une transversale μ et son point harmoniquement associé M. Prenons le point inverse M_2 et la droite μ_2 harmoniquement associée à ce point. Les deux transversales μ et μ_2 sont appelées *droites* ou *transversales inverses* : nous les noterons par les lettres μ et μ_2. La loi géométrique qui unit directement ces droites est facile à trouver; si μ coupe les côtés du triangle en α, β, γ, les isogonales $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$, (§ 3) de $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, donnent trois points α', β', γ', situés sur une même droite qui n'est autre que μ_2 (***).

(*) *A. E. N.*, 1866.

(**) Ces droites remarquables ont des applications nombreuses qui ont été développées par M. G. de Longchamps dans diverses notes. Outre le mémoire fondamental, déjà cité, on peut consulter :

1° *Sur les conchoïdales* (*N. C. M.*, 1879, p. 145) ;

2° *Sur les cubiques unicursales* (*N. C. M.*, 1879, p. 403) ;

3° *Transversales réciproques et applications* (*J. E.*, 1884, p. 272) ;

4° *Courbes diamétrales et transversales réciproques* (*J. S.*, 1882, p. 25) ;

5° *Applications nouvelles des transversales réciproques* (*J. S.*, 1884 ;

6° *Sur l'Hypocycloïde à trois rebroussements* (*J. S.*, 1885, p. 131) ;

7° *Sur les courbes parallèles et quelques autres courbes remarquables* (*J. S* ; p. 131) ;

8° *Détermination des points d'inflexion dans les cubiques circulaires droites*, (*A. F.* ; congrès de Nancy, 1886) ;

On peut aussi se reporter à la *Géométrie analytique*, (t. I ; p. 18) et au *Supplément au cours de mathématiques spéciales*, (p. 101) du même auteur.

(***) Cette proposition a été énoncée pour la première fois par M. le colonel Mathieu (*N. A. M.* 1865). Voir aussi *E.* 1885.

A une droite μ ayant pour équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

correspond une transversale inverse représentée par

$$\frac{\alpha}{Aa^2} + \frac{\beta}{Bb^2} + \frac{\gamma}{Cc^2} = 0$$

33. Droite de Newton, associée d'une droite donnée. — Dans d'autres cas, la correspondance entre deux transversales peut s'établir directement :

Si dans un triangle ABC, on mène une transversale Δ, elle détermine un quadrilatère complet, et l'on sait que les milieux des diagonales de ce quadrilatère sont sur une même droite Δ' que M. de Longchamps appelle *Droite de Newton, associée à* Δ, ou, plus brièvement encore, la *Newtonienne* de Δ.

L'équation de Δ étant

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

celle de Δ' sera

$$\frac{\beta + \gamma - \alpha}{A} + \frac{\alpha + \gamma - \beta}{B} + \frac{\alpha + \beta - \gamma}{C} = 0.$$

La correspondance entre les points M et M' harmoniquement associés aux droites Δ et Δ' est facile à trouver.

Les coordonnées (α, β, γ) de M sont :

$$\frac{1}{A}, \quad \frac{1}{B}, \quad \frac{1}{C}$$

celles de M' $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont données par les formules :

$$\alpha'\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) = \beta'\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right) = \gamma'\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)$$

elles montrent que *le point réciproque de* M' *est le point anticomplémentaire de* M. *(A suivre.)*

SUR LE TRIFOLIUM

par M. **G. de Longchamps.**

Cette quartique unicursale est caractérisée par les propriétés suivantes :

1° Elle est isotropique; c'est-à-dire qu'elle n'admet pas d'autres directions asymptotiques que celles du cercle.

1° Elle possède un point triple et, en ce point triple, elle présente deux branches rectangulaires.

D'après cela, en prenant pour origine le point triple O, et pour axes de coordonnées les bissectrices des angles formés par les deux tangentes en O qui sont rectangulaires, l'équation du trifolium est

$$(x^2 + y^2)^2 = (Ax + By)(x^2 - y^2).$$

En posant :

$$A = h\cos\alpha, \qquad B = h\sin\alpha,$$

l'équation polaire du trifolium est

$$\rho = h\cos(\omega + \alpha)\cos 2\omega.$$

On voit donc que la courbe est bien déterminée, quand on donne les paramètres A, B. On peut observer que le trifolium coupe les axes de coordonnées en des points P, Q tels que

$$OP = h\cos\alpha = a, \qquad OQ = h\sin\alpha = b.$$

En menant par ces points P, Q des parallèles aux axes, celles-ci se coupent en un point M dont les coordonnées sont, par conséquent, A et — B. A chaque point M, pris dans le plan d'un angle droit, correspond donc un trifolium ; et réciproquement.

Pour la commodité du langage, nous dirons que M est le *point caractéristique* du trifolium.

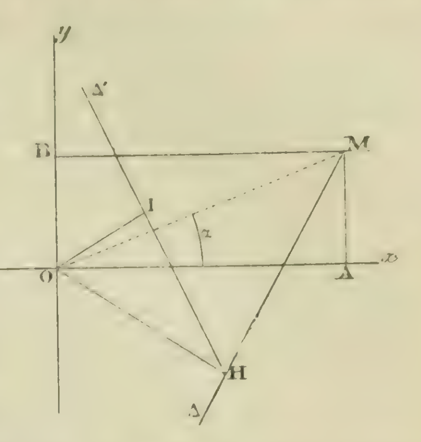
Lorsqu'il est situé sur l'un des axes de coordonnées, la courbe correspondante est le trifolium droit (*C. M. S.*, t. II, p. 512. — *Journal*, 1886, p. 254 ; et 1887, p. 68). En plaçant le point M sur la bissectrice de yOx, on obtient le folium double (*Journal*, 1885, p. 251 ; et 1887, p, 67). Dans les autres cas, la quartique n'ayant pas d'axe de symétrie, on peut dire que la courbe est *un trifolium oblique*.

M. Brocard *(loc. cit.)* a considéré le folium double et le trifolium droit, comme des podaires d'une hypocycloïde à trois rebroussements, relativement à deux points pris sur l'un des axes de cette courbe. Il en a déduit, naturellement, une construction correspondante, pour les normales à ces courbes.

Nous allons étendre au trifolium oblique, avec des modifications convenables, les résultats obtenus par M. Brocard pour le trifolium droit et le folium double.

1. Construction par points du trifolium oblique. — Nous désignerons toujours par M le point caractéristique du trifolium proposé et nous poserons, comme nous l'avons fait tout à l'heure,

$$OM = h, \qquad MOx = \alpha.$$



Par M traçons une droite mobile Δ; soit H la projection de O sur Δ. Si l'on mène par H, Δ' formant avec Δ et l'un des axes un triangle isocèle, le lieu du point I, projection de O sur Δ', est un trifolium.

En effet, soit

$$OI = \rho, \qquad IOx = \omega;$$

la construction indiquée donne sont égaux; on a

$$\rho = OH \cos 2\omega. \qquad (1)$$

D'autre part, le triangle OHM donne

$$OH = h \cos(\alpha + \omega). \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent

$$\rho = h \cos(\alpha + \omega) \cos 2\omega.$$

Ainsi le lieu de I est le trifolium.

Nous allons déduire de cette construction (*) un théorème qui généralise celui de M. Brocard, rappelé plus haut.

(A suivre.)

BOURSES DE LICENCE (1887)

— Dans un plan, rapporté à deux axes rectangulaires, on considère le système de cercles S défini par l'équation

$$x^2 + y^2 + ax + by + Aa + Bb + C = o,$$

où A, B, C sont des constantes données, a, b des paramètres variables. Démontrer qu'à chaque point M du plan, correspond un point M', tel

---

(*) On voit que cette construction nous est inspirée par la composition du dernier concours de l'Ecole Polytechnique (V. *Journal*, p. 162.)

que par les deux points M, M′ on puisse faire passer une infinité de cercles S. On montrera comment les coordonnées de l'un s'expriment au moyen des coordonnées de l'autre. On prouvera que la droite MM′ passe par un point fixe I et que le produit IM × IM′ est constant. Enfin, on cherchera à remplacer la définition analytique des cercles S par une définition géométrique qui mettra en évidence les propriétés qui précèdent.

— Les constantes A, B, C étant données, on propose de déterminer des constantes $A_1B_1C_1$ de façon que l'expression

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\frac{B_1}{(x-b)^2}+\frac{C_1}{(x-c)^2}$$

soit le carré d'une fraction rationnelle en x. A quelle condition cela est-il possible? Les constantes A, B, C sont supposées différentes.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Catalan.

... Le théorème démontré par M. Griess est, en partie, dans mon petit mémoire intitulé : *Quelques théorèmes d'Arithmétique* (Académie de Belgique, 1884); mais j'avais supposé p entier, positif. La généralisation indiquée par M. Griess est curieuse; peut-être la démonstration proposée pourrait-elle être simplifiée...

QUESTIONS ÉNONCÉES (*)

SÉRIES

1. $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}+\ldots\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}+\ldots$$

Série divergente; on la compare à la série harmonique multipliée par π.

(*) Sous ce titre nous publierons désormais, dans chaque numéro, les énoncés d'un certain nombre de questions posées aux examens de l'École Polytechnique, mais choisies parmi celles qui semblent mériter d'être, plus spécialement, signalées à l'attention des candidats.

A l'occasion, nous ajouterons à l'énoncé quelques mots d'indication; mais, comme par le passé, nous continuerons, dans la partie consacrée aux *Questions d'examens*, l'exposition des exercices qui, par leur difficulté relative, ou par l'intérêt particulier qu'ils présentent, méritent des développements plus complets.

Nous rappelons, à ce propos, à nos lecteurs, que le recueil des

2. $$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \ldots + \frac{1}{1+x^n} + \ldots$$

Série évidemment divergente pour $x \leqslant 1$; convergente, pour $x > 1$. Ce dernier point s'établit, si l'on veut, en la comparant à la progression $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^n} + \ldots$

3. $$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \quad + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Série connue, convergente.

4. $$\frac{1}{2\mathrm{L}^p 2} + \frac{1}{3\mathrm{L}^p 3} + \ldots + \frac{1}{n\mathrm{L}^p n} + \ldots \; (*)$$

Pour $p = 1$ la série est divergente, c'est la série de M. Bertrand; elle est divergente, *à fortiori*, pour $p < 1$. Dans le cas où p est supérieur à l'unité la série est convergente. On peut le reconnaître, autrement que nous ne l'avons fait (*loc. cit.*), de la manière suivante.

On a

$$\frac{1}{2(\mathrm{L}2)^p} = \frac{1}{2(\mathrm{L}2)^p}$$

$$\frac{1}{3(\mathrm{L}3)^p} + \frac{1}{4(\mathrm{L}4)^p} < \frac{1}{2(\mathrm{L}4)^p}$$

$$\frac{1}{5(\mathrm{L}5)^p} + \ldots + \frac{1}{8(\mathrm{L}8)^p} < \frac{1}{2(\mathrm{L}8)^p}.$$

D'où il résulte que la somme des termes de la série proposée est plus petite que celle de la série

$$\frac{1}{2(\mathrm{L}2)^p}\left(\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots\right)$$

laquelle est convergente, pour $p > 1$. La convergence de la série en question se trouve donc établie, dans cette même hypothèse, $p > 1$.

5. $$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \ldots$$

Série harmonique, multipliée par 2.

---

questions posées au dernier concours de l'École Polytechnique est publiée par la librairie Croville-Morant-Foucart, 20, rue de la Sorbonne. Ils trouveront, dans cette publication, en très grand nombre, d'autres énoncés intéressants. G. L.

(*) Voyez *Journal*, 1886, p. 164; et 1887, p. 19.

6. $$\sin x + \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2^2} + \dots + \sin \frac{x}{2^n}.$$

Série convergente. — On la compare à la série $\frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2^2} + \dots$

7. $$\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} + \dots + \frac{1}{n^2 - 1} \dots$$

Série convergente, parce que $\lim n^2 u_n = 1$; elle est aussi sommatoire en vertu de l'identité

$$\frac{2}{n^2 - 1} = \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{n + 1}.$$

8. — Si $\lim \dfrac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$ est égale à 1, la série est convergente.

(V. *Supplément*, p. 39, ex. 18).

EXERCICES ÉCRITS (*)

1. — On donne une circonférence Γ et l'on joint un point M, mobile sur cette circonférence, aux extrémités A, B d'une corde fixe; ayant mené une tangente Δ, parallèle à BM, la droite AM rencontre Δ en un certain point I ; trouver le lieu décrit par ce point.

2. — Dans ces mêmes conditions, une droite Δ′ tangente à Γ, et parallèle à AM, rencontre Δ en un point M′; on joint MM′ et l'on propose de trouver le lieu décrit par le point J, milieu de MM′.

(*) Sous ce titre, nous indiquerons, chaque mois, une ou plusieurs questions, pouvant servir d'exercice utile à la préparation de la composition écrite proposée aux examens de l'École Polytechnique, ou à ceux de l'École Normale. Le numéro suivant fera connaître les résultats principaux de cet exercice.

Dans l'intervalle, les abonnés pourront, s'ils le veulent, nous adresser leurs solutions; elles leur seront renvoyées, annotées.

Nous donnerons d'abord quelques problèmes très simples à la portée de tous; nous en proposerons ensuite, dans le courant de l'année, de plus difficiles. G. L.

QUESTIONS D'EXAMEN

18 (*). — *On donne un paraboloïde hyperbolique équilatère, et une ellipse dans un de ses plans directeurs. A cette ellipse, on mène une tangente, et on considère une génératrice du paraboloïde qui lui soit perpendiculaire : lieu de la perpendiculaire commune à la tangente et à la génératrice.*

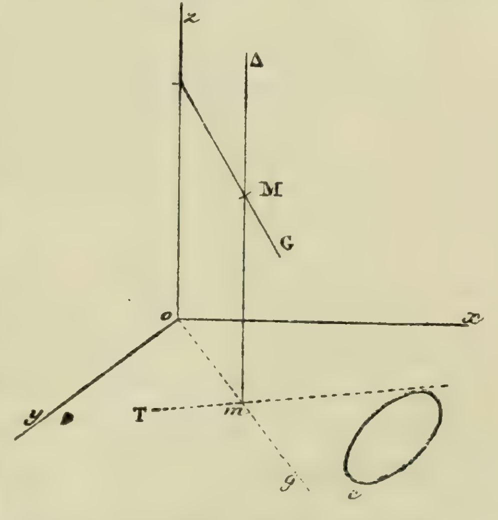
Je vais démontrer que ce lieu se compose :

1° *D'un cylindre droit, ayant pour base une podaire de l'ellipse :*

2° *De deux paraboloïdes hyperboliques, égaux entre eux et égaux au paraboloïde donné ;*

3° *D'un plan.*

Prenons pour origine le sommet du paraboloïde, pour axe des x, l'axe de la surface et pour plans yox et zox les plans directeurs du paraboloïde (*). Soit c l'ellipse donnée, dans le plan yox. Il y a lieu de considérer successivement les génératrices qui sont parallèles au plan xoy et celles qui sont parallèles au plan zox.



Si G est une génératrice parallèle à xoy, il lui correspond toujours une tangente rectangulaire T. La perpendiculaire commune à G et à T est parallèle à oz ; soit d'ailleurs og la projection de G sur xoy : elle coupe T en m, et m est la trace de la perpendiculaire commune. Or,

(*) La solution qui suit nous a été adressée par M. Georges Maupin, élève au lycée de Rennes.

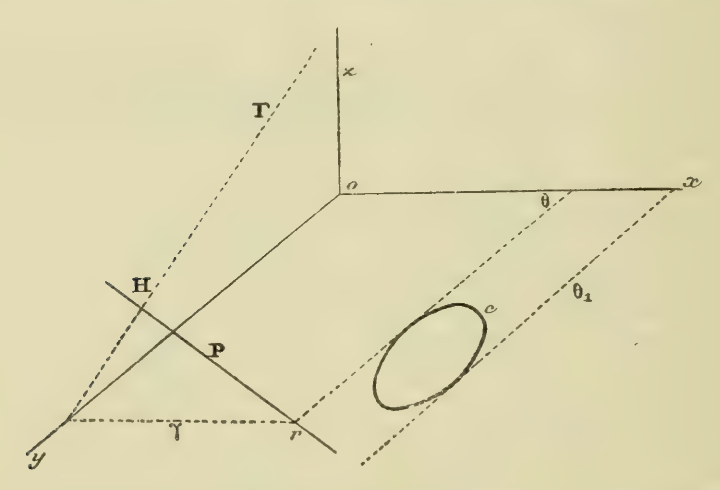
(**) Dans ce système d'axes, son équation est $yz = ax$; mais elle ne nous sera pas utile.

le lieu du point m est visiblement la podaire de o par rapport à l'ellipse ; on sait que ce lieu est une quartique. Ainsi, le lieu de Δ est un cylindre du quatrième ordre ;

2° Considérons maintenant une génératrice Γ parallèle à zox (*fig. 2*) : supposons qu'il lui corresponde une tangente θ à l'ellipse c. L'angle droit formé par Γ et θ a un côté dans le plan xoy ; donc, il se projette sur ce plan suivant un angle droit : or la projection γ de Γ est parallèle à ox, donc θ sera perpendiculaire à ox.

Ainsi, la tangente θ est menée à l'ellipse c parallèlement à oy. Il y a deux tangentes parallèles à oy, je les désignerai par θ et θ_1.

Cherchons le lieu correspondant à θ : γ et θ se coupent en r, menons par ce point rH perpendiculaire à Γ ; cette



droite P représente la perpendiculaire commune P. Or, supposons que le paraboloïde donné glisse d'abord parallèlement à lui-même, le long de ox, de manière que oy vienne s'appliquer sur θ ; puis, qu'on lui imprime une rotation d'amplitude $\frac{\pi}{2}$, autour de θ. On voit alors que la génératrice Γ sera confondue avec P. Ainsi à toute génératrice du paraboloïde correspondra une génératrice du lieu ; le paraboloïde sera donc confondu avec le lieu de P ; etc.

3° Nous avons dit (2°) qu'une génératrice Γ se projette parallèlement à ox : il y a exception pour la génératrice oz. Cette

génératrice est projetée suivant le point o, elle est perpendiculaire à toutes les tangentes à c, et le lieu des perpendiculaires communes, qui lui correspondent, est le plan xoy.

(A suivre.)

QUESTION 99

Solution par M. E. FESQUET, au lycée de Nîmes.

On donne dans le plan une droite fixe DD′ *et deux points fixes* O *et* A. *Par le point* O *on mène deux cercles tangents tous deux à la droite fixe* DD′ *et à une autre droite quelconque issue du point fixe* A, *On demande d'étudier le lieu décrit par le second point M d'intersection de ces deux cercles, quand la droite* AB *tourne autour du point* A.

Ce lieu peut évidemment se définir ainsi : étant donnés une droite fixe DD′ et deux points fixes O et A, trouver le lieu du symétrique du point O par rapport à la bissectrice de l'angle formé par DD′ et une droite mobile, issue de A. Menons Ox perpendiculaire à DD′.

Soient $OM = \rho$ et $MOx = \omega$. Le triangle FOE donne

$$OE = \frac{\rho}{2\cos\omega}.$$

Soit $OC = a$; on a

$$CE = a + \frac{\rho}{2\cos\omega}.$$

D'autre part, le triangle BCE donne :

$$BC = a\cot\omega + \frac{\rho}{2\sin\omega}.$$

L'équation de AB rapportée aux axes Cx et CD est donc

$$y - a\cot\omega - \frac{\rho}{2\sin\omega} = x\,\mathrm{tg}\left(2\omega - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ou, en exprimant que cette droite passe par le point fixe A (α, β),

$$\beta - a\cot\omega - \frac{\rho}{2\sin\omega} + \alpha\cot 2\omega = 0.$$

Telle est l'équation du lieu en coordonnées polaires, ox étant l'axe polaire et o le pôle. L'équation en coordonnées rectilignes est, en prenant pour axes ox et oy,

$$\beta - a\frac{x}{y} - \frac{x^2 + y^2}{2y} + \frac{\alpha(x^2 - y^2)}{2xy} = 0,$$

ou

$$x(x^2 + y^2) + 2x(ax + \beta y) - \alpha(x^2 - y^2) = 0.$$

Le lieu est donc une cubique Γ, ayant un point double à l'origine ; elle passe par les ombilics du plan ; c'est une *cubique circulaire* ayant pour asymptote réelle la droite qui correspond à l'équation

$$x + \alpha = 0.$$

Construisons Γ, en la considérant comme une courbe unicursale. A cet effet, posons

$$y = tx;$$

Nous avons alors

$$x = -\frac{\alpha t^2 - 2\beta t + 2a - \alpha}{1 + t^2},$$

$$y = -t\frac{\alpha t^2 - 2\beta t + 2a - \alpha}{1 + t^2}.$$

Considérons l'équation en t :

$$\alpha t^2 - 2\beta t + 2a - \alpha = 0.$$

Pour qu'elle ait ses racines réelles, il faut que

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha > 0$$

L'équation $\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha = 0$, si l'on considère α, β comme des coordonnées courantes, représente un cercle ayant pour centre O et passant par C. Nous désignerons ce cercle par u.

Il y a maintenant divers cas à distinguer.

1° Le point A est extérieur au cercle u ; on a :

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha > 0$$

Le point O est un point double réel. On voit facilement que la courbe à la forme d'une *branche strophoïdale*. Elle devient

une véritable strophoïde oblique, lorsque les tangentes au nœud sont rectangulaires; ce qui a lieu quand OC = o.

2° Le point A est sur le cercle u. Le point O est un point de rebroussement de première espèce. La courbe est une *cissoïde oblique.*

3° Supposons enfin le point A intérieur au cercle u. O est alors un point isolé. La courbe a la forme d'une *branche serpentine.*

Si le point A est sur DD′, on a $\alpha = 0$; le lieu se décompose : on a l'axe Oy et le cercle $x^2 + y^2 + 2ax - 2\beta y = 0$, ce qui était évident à priori.

Remarque. — Le lieu que nous venons de considérer contient des points répondant à des cercles imaginaires conjugués. Il serait facile de distinguer ces points, de ceux qui répondent à des cercles réels.

Nota. — Autres solutions par MM. Taratte, élève en mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis ; Marchis, lycée de Rouen ; Fabre, lycée Henri IV; F. Michel au lycée de Montpellier.

QUESTION 132

Solution par M. L. Sirven, élève de Mathématiques spéciales au Lycée d'Orléans.

On considère des paraboles P *qui sont tangentes à l'origine à l'axe* OX *et dont les directrices enveloppent la parabole fixe* $y^2 - 2px = 0$ *(axes rectangulaires).*

Démontrer :

1° Que l'équation générale des paraboles P *est* $(y - \lambda x)^2 - 2p\lambda^3 y = 0$, λ *désignant un paramètre variable;*

2° Que l'enveloppe de ces paraboles a pour équation $2x^3 = 27py^2$*;*

3° Que le lieu des foyers est une cissoïde;

4° On propose enfin de trouver l'enveloppe des axes des paraboles P.

Ce lieu est l'hypocycloïde à trois rebroussements.

L'équation focale d'une parabole, dont (α, β) est le foyer, est, en axes rectangulaires,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x \cos\varphi + y \sin\varphi + \theta)^2,$$

ou, en ordonnant,

$$(x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2 - 2x(\alpha + \theta\cos\varphi) - 2y(\beta + \theta\sin\varphi) + \alpha^2 + \beta^2 - \theta^2 = 0.$$

J'écris que ces paraboles sont tangentes en O à Ox, d'où les deux relations

$$\alpha + \theta\cos\varphi = 0, \qquad (1)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - \theta^2 = 0. \qquad (2)$$

De plus la directrice $x\cos\varphi + y\sin\varphi + \theta = 0$ est constamment tangente à $y^2 - 2px = 0$ d'où une troisième relation, obtenue en écrivant que l'équation aux ordonnées d'intersection a une racine double,

$$p\sin^2\varphi - 2\theta\cos\varphi = 0. \qquad (3)$$

Résolvant (1) et (3) en α et θ j'obtiens

$$\alpha = -\frac{p\sin^2\varphi}{2}, \quad \theta = \frac{p\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}. \qquad (4)$$

Et alors en tenant compte de $\beta^2 = \theta^2 - \alpha^2$, on conclut

$$\beta = \frac{p}{2}\frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi}$$

et, par suite,

$$\beta + \theta\sin\varphi = p\sin^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi. \qquad (5)$$

Revenons à l'équation générale des paraboles P. En tenant compte des relations 1, 2, 5, on a

$$(x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2 = 2py\sin^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi;$$

en posant $\mathrm{tg}\,\varphi = \lambda$ on a précisément, pour l'équation générale cherchée,

$$(y - \lambda x)^2 - 2p\lambda^3 y = 0. \qquad (P)$$

2° *Enveloppe des paraboles* P. — Il suffit d'écrire que l'équation (P) admet une racine double en λ.

J'applique la formule connue

$$(BB' - 9AA')^2 = 4(B^2 - 3AB')(B'^2 - 3A'B)$$

qui exprime que l'équation

$$Ax^3 + Bx^2 + B'x + A' = 0$$

a une racine double.

On obtient $\qquad 2x^3 = 27py^2$

et, en outre, l'axe des x, résultat évident puisque cet axe est tangent aux paraboles.

Cette courbe, bien connue, est symétrique par rapport à l'axe des x et se trouve située tout entière à droite de l'axe des y; elle a une tangente de rebroussement, l'axe des x, et deux branches paraboliques.

3° *Lieu des foyers.* — On obtient ce lieu en éliminant θ et φ entre les relations (1), (2), (3), car α, β sont les coordonnées du foyer.

De (4) on tire

$$\theta^2 = \frac{p^2 \sin^4 \varphi}{4 \cos^2 \varphi},$$

et

$$\sin^2 \varphi = -\frac{2\alpha}{p},$$

d'où

$$\theta^2 = \frac{p\alpha^2}{p + 2\alpha}.$$

En remplaçant dans (2), on a le lieu cherché

$$x^2 + y^2 = \frac{px^2}{p + 2x} \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{-2x^3}{p + 2x}.$$

On reconnaît, sous cette dernière forme, une cissoïde dont l'asymptote a pour équation

$$x = \frac{p}{2}.$$

4° *Enveloppe des axes des paraboles* P. — On trouve aisément, par les méthodes connues, l'équation de l'axe :

$$\lambda^3(p + x) - \lambda^2 y + \lambda x - y = 0.$$

Pour obtenir l'enveloppe demandée il suffit d'écrire que cette équation, du troisième degré en λ, admet une racine commune avec sa dérivée

$$3\lambda^2(p + x) - 2\lambda y + x = 0.$$

L'équation et sa dérivée sont du premier degré en x et y. Je résous donc par rapport à x et y et j'obtiens l'enveloppe au moyen des formules unicursales suivantes :

$$\frac{x}{p} = -\frac{\lambda^2(3 + \lambda^2)}{(\lambda^2 + 1)^2}, \quad \frac{y}{p} = -\frac{2\lambda^3}{(\lambda^2 + 1)^2}.$$

On reconnaît là les égalités qui définissent l'hypocycloïde à trois rebroussements, comme l'a montré M. G. de Longchamps (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1884, p. 170).

On peut observer que l'x d'un point de la courbe est toujours

négatif et que l'hypocycloïde est située à gauche de la droite oy.

Nota. — Ont résolu la question : MM. F. Michel et Valabrègue, au lycée de Montpellier ; Bèche, professeur à l'école normale de Tulle ; Fabre, élève au lycée Henri IV ; Giat, élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas) ; Hugon, à Poligny ; Voignier ; Marchis, au lycée de Rouen ; Paul Bourgarel, à Antibes.

M. Fabre démontre, par des considérations purement géométriques, et très simples, que le lieu des foyers des paraboles considérées est une cissoïde.

QUESTION PROPOSÉE

231. — Démontrer les relations combinatoires suivantes (*) :

1°
$$1 - \frac{1}{k+1} C_{n,1} + \frac{1}{2k+1} C_{n,2} \ldots \mp \frac{1}{nk+1} = \frac{1.2\ldots n}{(k+1)(2k+1)\ldots(nk+1)} \cdot k^n \quad (**)$$

2°
$$C_{2n,n} + C_{2n-2,n-1} \cdot C_{2,1} + C_{2n-4,n-2} \cdot C_{4,2} + \ldots \ldots + C_{2n,n} = 4^n.$$

3°
$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} C_{p,1} + \frac{1}{n-1} C_{p,2} - \ldots = (-1)^p \frac{1}{(n+1) C_{n,p}}.$$

4° Si n est premier avec 6, on a
$$C_{2n-4,n-2} = \mathfrak{M}(n^2 - n).$$
(*E. Catalan*).

(*) Tirées des *Mélanges Mathématiques*.

(**) On pourra déduire, de ce résultat, le développement, en fractions simples, de la fraction rationnelle
$$\frac{1.2\ldots n}{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}.$$
Comparez (*Alg.* § 527). G. L.

Le Directeur Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16488-7.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 175).

---

34. Droites associées *(sens général)*. — Tout ce que nous avons dit pour les points, peut se répéter pour les droites :

Prenons une droite Δ

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

et associons-lui une droite Δ' ayant pour équation :

$$\alpha f(A, B, C) + \beta f(B, C, A) + \gamma f(C, A, B) = 0.$$

La droite Δ' se construira facilement toutes les fois que l'on saura déterminer les deux points M et M′ ayant respectivement pour coordonnées :

$$f(A, B, C), \quad f(B, C, A), \quad f(C, A, B);$$

et

$$A, \quad B, \quad C.$$

En effet, M′ est le point harmoniquement associé à la transversale réciproque de Δ; si l'on construit la droite μ harmoniquement associée à M, puis, sa transversale réciproque, on obtiendra la droite Δ'.

35. Droites Brocardiennes (μ, μ_2, μ_3). — Considérons une droite μ ayant pour équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0;$$

elle coupe les côtés du triangle respectivement en A′, B′, C′; menons

par A′ une parallèle $A'A_1$ à CA
— B′ — — $B'B_1$ à AB
— C′ — — $C'C_1$ à BC

Les trois points A_1, B_1, C_1 sont sur une même droite, que,

---

(*) Cette droite, appellée quelquefois la *Médiane* du quadrilatère complet, pourrait, comme nous l'avons observée déjà, être appelée la *Newtonienne de* Δ.

par analogie avec les points Brocardiens, nous noterons par μ_δ et que nous appellerons la *Brocardienne directe* de μ. Elle a pour équation :

$$\frac{\alpha}{B} + \frac{\beta}{C} + \frac{\gamma}{A} = o.$$

Si nous effectuons la construction précédente dans le sens inverse, c'est-à-dire en menant, par A', une parallèle à BA, etc... nous obtiendrons une seconde droite μ_ρ qui est la *Brocardienne rétrograde* de μ : Elle est représentée par l'équation :

$$\frac{\alpha}{C} + \frac{\beta}{A} + \frac{\gamma}{B} = o.$$

36. Droites algébriquement associées (μ, μ_a, μ_b, μ_c). — Étant donnée une droite μ qui coupe les côtés du triangle en A', B', C'; si l'on prend les conjugués harmoniques de ces points et si on les joint deux à deux, on obtient trois droites μ_a, μ_b, μ_c qui sont les *droites algébriquement associées* à μ. Ces quatre droites associées qui correspondent à l'équation :

$$\pm \frac{\alpha}{A} \pm \frac{\beta}{B} \pm \frac{\gamma}{C} = o$$

forment un quadrilatère complet, dont les diagonales sont les côtés du triangle de référence. Ces droites sont d'ailleurs harmoniquement associées aux points

$$\pm A, \quad \pm B, \quad \pm C.$$

37. Triangles réciproques. — Si l'on considère sur les côtés d'un triangle, des points M', M'_0; M'', M''_0; M''', M'''_0 respectivement isotomiques, les deux triangles M'M''M''', $M'_0M''_0M'''_0$ sont appelés par M. de Longchamps (*J. E.*, 1887, p. 224) *triangles réciproques*.

Deux triangles réciproques M'M''M''', $M'_0M''_0M'''_0$ sont équivalents (*); si donc les trois points M'M''M''' sont sur une même droite μ, c'est-à-dire si la surface du triangle est nulle, les points M'_0, M''_0, M'''_0 sont une droite μ_0 qui est la transversale réciproque de μ. On obtient ainsi une généralisation curieuse du théorème des transversales réciproques.

(*) Voyez : *J. E.*, 1877; pp. 224, 375.

On a vu par les différentes constructions que nous avons données jusqu'ici, et par les citations faites, l'importance des *points et des transversales réciproques;* nous allons encore indiquer quelques-unes de leurs propriétés et de leurs applications.

1° La transversale réciproque est parallèle à la droite qui joint les milieux du quadrilatère complet formé par la transversale proposée avec le triangle. Ces points milieux, et les points où la transversale réciproque rencontre les côtés du triangle, forment deux systèmes homothétiques; le centre de gravité est le centre de cette homothétie, dont le rapport est celui de 2 à 1.

On sait qu'à un point correspond une conique tangente a trois droites fixes (Théorème de Magnus, § 2), ce point et cette conique donnent lieu à la relation suivante :

2° A un point M, correspond une conique Γ inscrite au triangle ABC qui sert de base à la transformation; le point M, le centre de gravité G de ABC et le centre de Γ sont trois points en ligne droite; de plus, le rapport des distances du centre de gravité à ces deux points, rapport pris dans l'ordre que nous venons d'indiquer, est celui de 2 à 1. En d'autres termes : *le centre de* Γ *est le point complémentaire de* M.

De là on déduit cette conséquence importante :

3° A un point à l'infini de la première figure correspond une parabole dont l'axe est parallèle à la direction donnée.

Pour montrer encore une fois l'importance de la méthode de transformation par points réciproques, nous ferons observer combien il est difficile ordinairement de savoir ce que deviennent, après une transformation, les angles et surtout les propriétés métriques d'une figure donnée; si, le plus souvent, on transforme simplement les propriétés descriptives des figures, il n'en est pas de même des autres. Cette difficulté, par suite de la propriété que nous venons de rappeler, se trouve comme annulée dans la méthode de transformation de M. G. de Longchamps. *(A suivre.)*

SUR LE TRIFOLIUM

par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 203.)

Théorème. — *Le trifolium est la podaire de l'hypocycloïde à trois rebroussements, lorsque le pôle de la podaire est pris sur le cercle inscrit à l'hypocycloïde.*

Pour le démontrer, cherchons l'enveloppe des droites Δ', considérées tout à l'heure.

La question se présente alors sous la forme suivante :

On donne un angle droit yOx, un point fixe M et le cercle U décrit sur OM comme diamètre. Par M on fait passer une transversale mobile qui rencontre U en H et par H on trace une droite Δ' symétrique de MH par rapport à la parallèle à Oy menée par H. L'enveloppe de Δ' est une hypocycloïde à trois rebroussements.

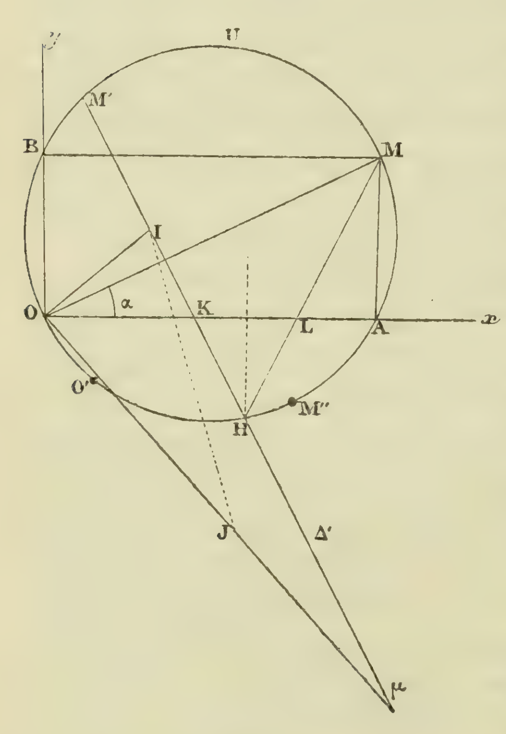


Fig. 1.

Autrement. Lorsqu'une parabole mobile est constamment inscrite dans un angle droit yOx, si la corde des contacts passe par un point fixe, l'axe de la courbe enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. (*)

On peut d'abord établir, très simplement, par le calcul, cette proposition.

(*) Cette remarque a été faite également par MM. Brocard et Neuberg (*Mathesis*, p. 183.)

On trouve que l'équation générale des droites Δ', a, b désignant les coordonnées de M, est

$$y + tx + (b - at)\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 0.$$

En prenant la dérivée par rapport à t, on a, d'abord,

$$x = \frac{a(t^4 + 4t^2 - 1) - 4bt}{(t^2 + 1)^2},$$

puis

$$-y = \frac{4at^3 + b(t^4 - 4t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}.$$

Il est facile de reconnaître que ces formules représentent l'hypocycloïde à trois rebroussements.

Mais on peut le voir, plus élégamment, par des considérations géométriques.

Cherchons la relation qui existe entre les arcs $OH = u$, $OM' = v$.

On a
$$MLx = \alpha + OMH,$$
et
$$HKx = OHM' + HOx = OHM' + \frac{\pi}{2} - MLx.$$

En observant que, d'après la construction, $MLx = HKx$, on a
$$2MLx = OHM' + \frac{\pi}{2};$$
et, par suite,
$$2OMH + 2\alpha = OHM' + \frac{\pi}{2},$$
ou, finalement,
$$2u - v = \pi - 4\alpha. \qquad (1)$$

Les arcs u et v sont comptés, en sens contraire, à partir de l'origine O; nous pouvons changer cet origine, de façon à faire disparaître la constante qui entre dans la relation précédente.

Soit O' la nouvelle origine; posons
$$OO' = \theta, \quad O'H = U, \quad O'M' = V.$$

Nous avons :
$$u = U + \theta, \quad v = V - \theta$$
et la relation (1) devient
$$2(U + \theta) - (V - \theta) = \pi - 4\alpha,$$
ou
$$2U - V = 0,$$
si l'on pose
$$3\theta = \pi - 4\alpha.$$

Ayant pris $AM'' = AM$, puis $OO' = \frac{1}{3}OM''$, le point O'

représente la nouvelle origine et l'on peut considérer Δ' comme une corde mobile dans un cercle fixe, les arcs O'H O'M' vérifiant toujours la relation

$$O'M' = 2O'H,$$

et le point O' étant fixe.

Dans ces conditions, on sait (*) que Δ' enveloppe une hypo-

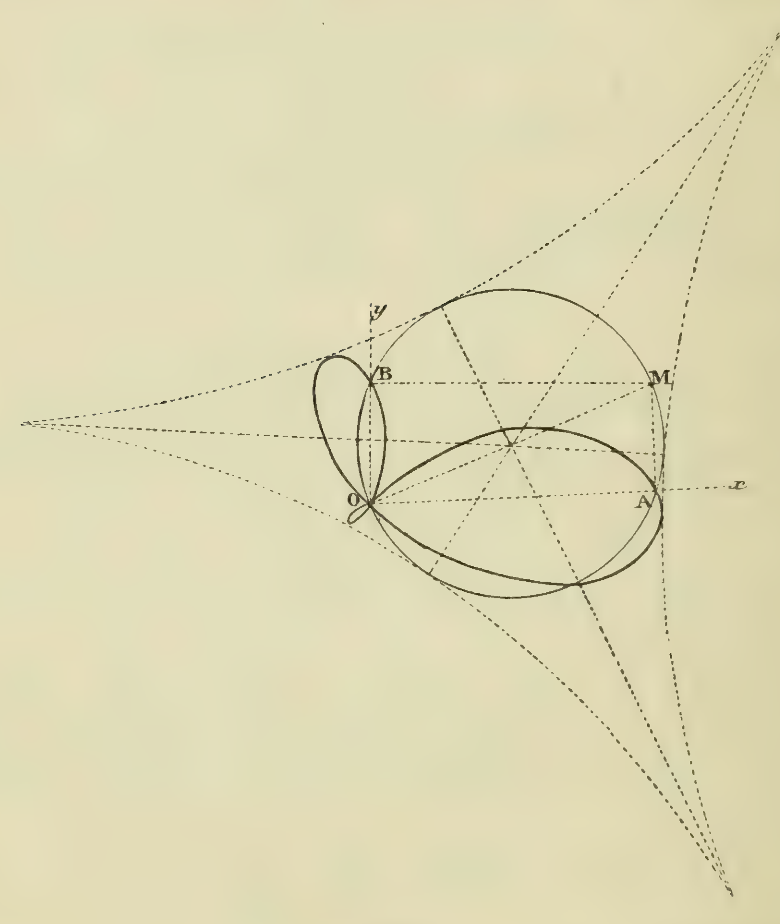


Fig. 2.

cycloïde à trois rebroussements; U est le cercle inscrit à cette courbe, O' est l'un des sommets. La figure ci-dessus montre quelle est la disposition de l'hypocycloïde et du trifolium qui correspond au point O, pris sur U.

(*) V. *Journal* 1884, p. 176, § 10, alinéa 6e.

2. Construction de la normale au trifolium. — Du théorème précédent on déduit, naturellement, la construction de la normale au trifolium.

On sait en effet (*loc. cit.*, alinéa 7[e]) qu'en prolongeant (*fig. 1*) M'H d'une longueur Hμ = M'H, μ est le point de contact de HM' avec l'hypocycloïde. Par conséquent, par application d'un principe classique (*C. M. S.*, t. II, p. 33, § 31), la droite IJ qui va, de I, au milieu J de Oμ, est la normale au trifolium.

QUESTIONS ÉNONCÉES

DÉRIVÉES

1. — Dérivée de

$$y = \text{arc tg}\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}, \qquad y' = \pm 1$$

On peut tirer de là, en effet, par un calcul évident

$$\pm y = \frac{\pi}{4} - x.$$

2. — Dérivée de

$$y = \mathrm{L}\,\frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}, \qquad y' = \frac{-2}{\cos x}$$

3. — Dérivée de

$$y = a^{\mathrm{L}g_a \,\text{arc tg}\, \frac{\sin x}{\cos x}}, \qquad y' = 1$$

En prenant les logarithmes on voit que $y = x$; on vérifie, par le calcul direct, que l'on a bien $y' = 1$.

4. — Dérivée de

$$y = \text{arc tg}\,\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad y' = \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

5. — Dérivée de

$$\mathrm{L}g_a \,\text{arc sin}\, 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

$$y = a \qquad\qquad y' = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

En prenant les logarithmes des deux membres, dans le système de base a, et en posant $x = \sin\varphi$, on trouve

$$y = 2\varphi = 2 \text{ arc sin } x.$$

6. — Dérivée d'ordre n de

$$y = (x - a)^n(x - b)^n.$$

On applique la formule de Leibniz

$$d^n(uv) = vd^nu + C'_ndvd^{n-1}u + \ldots + C^n_nud^nv,$$

et l'on a

$$\frac{d^ny}{dx^n} = n\,!\left\{(x - b)^n + \frac{n}{1}(x - b)^{n-1}(x - a) + \frac{n(n-1)}{1.2}(x - b)^{n-2}(x - a)^2 + \ldots + (x - a)^n\right\}.$$

7. — Dérivée d'ordre n de

$$y = \text{L}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

On a

$$y' = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = (x + i)^{-\frac{1}{2}}(x - i)^{-\frac{1}{2}}$$

et on applique la formule de Leibniz.

8. Dérivée de

$$y = \text{arc sin } x + \text{arc tg}\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}.$$

On trouve $y' = 0$; la fonction y est constante. On peut le vérifier facilement par un changement de variable, en posant $x = \sin\varphi$.

9. — Dérivée d'ordre n de

$$y = \text{arc tg } x.$$

Cet exercice rentre dans celui qui porte le n° 6 en observant que

$$y' = (x + i)^{-1}(x + i)^{-1}.$$

EXERCICES ÉCRITS

3. — On donne une ellipse Γ rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

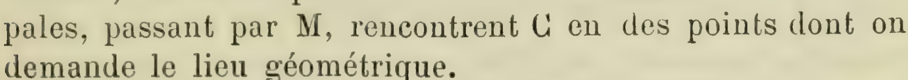
et l'on considère, dans son plan, une droite Δ représentée par l'équation

$$A\frac{x}{a} + B\frac{y}{b} - 1 = 0.$$

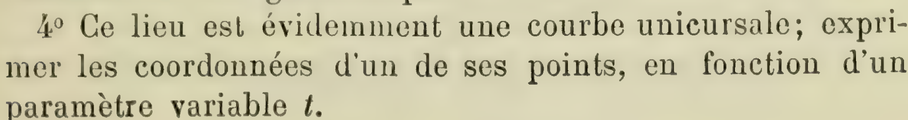
1° On demande l'équation du cercle qui passe par l'origine et par les points communs à Γ et à Δ.

2° En déduire l'équation générale des cercles C qui, passant par le centre de Γ, sont tangents à cette courbe.

3° Soit M ce point de contact; les cordes principales, passant par M, rencontrent C en des points dont on demande le lieu géométrique.



4° Ce lieu est évidemment une courbe unicursale; exprimer les coordonnées d'un de ses points, en fonction d'un paramètre variable t.



Notes sur les exercices 1 et 2.

1. — En prenant A pour origine, AB pour axe polaire, on a

$$\rho = OM + MI = OM + \frac{KH}{\sin V} = 2R\sin(V + \omega + R\frac{1 - \cos\omega}{\sin V},$$

$$\rho = \frac{R}{\sin V}[1 - \cos(2V + \omega)].$$

Le lieu est donc un limaçon de Pascal. On le démontre géométriquement de la manière suivante.

Soit C le point diamétralement opposé à B; on considère le cercle AOC qui coupe AI en D. La longueur DI est constante et égale à $\frac{R}{\sin V}$.

D'ailleurs, le diamètre du cercle AOC est $\frac{AO}{\sin V} = \frac{\sin V}{R} = DI$. Concluons donc que *le lieu demandé est une cardioïde.*

On observera que l'angle en I étant constant, *on peut considérer la cardioïde comme une podaire oblique* relativement au cercle Γ, le pôle des rayons vecteurs étant en A. En considérant deux positions infiniment voisines du point mobile I, on voit aussi que la normale en I à la cardioïde passe par le centre du cercle circonscrit au triangle AHI.

Dans cette solution, on préconise l'adoption des coordonnées polaires pour arriver rapidement à l'équation du lieu et, aussi, l'emploi

des considérations géométriques : tant, pour reconnaître la simplicité du résultat, que pour vérifier les calculs qu'on a faits.

Cette observation s'applique à l'exercice 2.

2. — Abaissons de O, centre de Γ, une perpendiculaire sur AB ; M'O et MO'' sont deux droites parallèles, parce qu'elles sont les bissectrices de deux angles dont les côtés sont parallèles et de même direction. Soit O' le milieu de OO''. Posons O'J = ρ, JOO' = φ nous avons

$$2\rho = OM' + O''M = OM' + 2R\cos\varphi,$$

ou

$$\rho = R\cos\varphi + \frac{OM'}{2}.$$

Le lieu est un limaçon de Pascal, etc.

Remarque. — Cette construction, points par points, du limaçon, telle qu'elle résulte des remarques précédemment faites et de cette observation évidente que M' décrit un cercle, rentre dans une génération des courbes qui peut se définir ainsi : Étant données deux courbes U, V et deux pôles fixes O, O' ; on mène, par ces points, deux droites mobiles parallèles Δ, Δ'. Soient M un point commun à Δ et à U et M' un point commun à Δ' et à V ; trouver le lieu W décrit par le point J milieu de MM'.

On pourra noter que la normale à W peut se construire, très simplement, par la considération des sous-normales.

QUESTIONS D'EXAMEN

19. — *La série* U

$$U = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots,$$

est-elle convergente? Calculer sa valeur à 0.01 *près.*

La série est évidemment convergente, car elle a ses termes, à partir du troisième, plus faibles que ceux de la progression géométrique V,

$$V = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Pour avoir la valeur de U à 0.01 près, il suffit de chercher, dans V, quel est le terme de cette suite qui donne

$$\frac{1}{2^{x+1}} + \frac{1}{2^{x+2}} + \cdots < \frac{1}{100}. \qquad (1)$$

Si l'on détermine le plus petit nombre entier x qui vérifie

cette inégalité, en prenant les x premiers termes de U, la somme de ces termes représente, évidemment, la valeur de U à 0.01 près.

L'inégalité (1) peut s'écrire

$$\frac{\frac{1}{2^{x+1}}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{100},$$

ou

$$2^x > 100.$$

On a donc

$$x > \frac{2}{\log 2};$$

comme $\log 2 = 0.30103$, on voit qu'en prenant les sept premiers termes de la série U on obtient, avec certitude, sa valeur à 0.01 près.

20 (*). — *Intégrer la différentielle*

$$dy = \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \cdot$$

On divise, haut et bas, par $\cos 4x$ et en posant

$$\operatorname{tg} x = z,$$

on a

$$y = \int \frac{zdz}{1 + z^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(z^2)}{1 + (z^2)^2}.$$

ou, finalement, $y = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tg}^2 x) + C^{te}$.

21. — *Un jardin a la forme d'un rectangle* ABCD, *un ruisseau coule le long de* CD*; combien faudra-t-il payer pour arroser le jardin?*

Soient $CA = a$, $CD = b$ les dimensions du rectangle; prenons sur CD un élément dx. Pour arroser le rectangle qui correspond à cet élément on doit payer une somme représentée par

$$dx \int_0^a ydy = \frac{1}{2} a^2 dx.$$

(*) Question proposée dans les *Annals of Mathematics* de l'Université de Virginie; n° de juin 1887, p. 95.

La dépense totale est

$$\int_0^b \frac{1}{2} a^2 dx = \frac{1}{2} a^2 b.$$

22. *Développement de cos* mx, *en fonction de cos* x.

La formule de Moivre, comme l'on sait, donne le développement de $\cos mx$ en fonction de $\cos x$ et des puissances paires de $\sin x$; en remplaçant, dans ce développement, $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, on a, finalement, l'expression de $\cos mx$ en fonction de $\cos x$. Mais ce calcul ne donne pas, sous forme explicite, les coefficients des termes en $\cos^m x$, $\cos^{m-2} x$, ...; voici comment on peut obtenir immédiatement ces coefficients.

Les formules bien connues qui donnent en fonction de $\cos x$ les valeurs des fonctions

$$\cos 2x, \quad \cos 3x, \ldots; \quad \frac{\sin 2x}{\sin x}, \quad \frac{\sin 3x}{\sin x}, \ldots;$$

et l'égalité

$$\cos mx = \cos (m-1) x \cos x - \sin (m-1) x \sin x, \qquad (1)$$

prouvent que $\cos mx$ ne renferme que les puissances m, $m-2$, etc., de $\cos x$. Il suffit d'admettre la loi pour les fonctions

$$\cos (m-1)x, \quad \text{et} \quad \frac{\sin (m-1)x}{\sin x}$$

et l'on vérifie, d'après (1), qu'elle subsiste pour $\cos mx$.

Dans le cas où m est pair, on voit aussi que le premier terme de $(-1)^{\frac{m}{2}} \cos mx$ est égal à l'unité, et que si m est impair le premier terme de $(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos mx$ est égal à $\cos x$. Posons donc (m *pair*)

$$\cos x = z,$$

et

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \cos mx = 1 - A_1 z^2 + A_2 z^4 \ldots. \qquad (2)$$

et proposons-nous de déterminer les coefficients A_1, A_2, ...

L'égalité (2) donne d'abord

$$-(-1)^{\frac{m}{2}} m \sin mx = \sin x \left\{ 2A_1 z - 4A_2 z^3 \ldots \right\},$$

puis, par une nouvelle différentiation,

$$\left\{\begin{aligned} -(-1)^{\frac{m}{2}} m^2 \cos mx = {} & z(2A_1 z - 4A_2 z^3 + \ldots\} \\ & + (z^2 - 1)\left\{1.2A_1 - 3.4A_2 z^2 + \ldots\right\} \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

Comparant (2) et (3), on a

$$A_1 = \frac{m^2}{1.2} \quad \text{ou} \quad A_1 = \frac{m.m}{1.2}$$

$$A_1(4 - m^2) + 3.4A_2 = 0, \qquad A_2 = \frac{(m+2)m.m(m-2)}{4!}.$$

. . . .

La loi observée sur les premiers coefficients se généralise sans difficulté, grâce aux formules (2) et (3), pour les coefficients quelconques. On trouve ainsi

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \cos mx = 1 - \frac{m.m}{2!}\cos^2 x + \frac{(m+2)m.m(m-2)}{4!}\cos^4 x$$
$$- \frac{m+4)(m+2)m.m(m-2)m-4)}{6!} = \cos^6 a + \ldots \qquad (m \text{ pair.})$$

Un calcul semblable donne

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \cos mx = \frac{m}{1}\cos x = \frac{(m+1)m(m-1)}{3!}\cos^3 x$$
$$+ \frac{(m+3)(m+1)m(m-1)(m-3)}{5!}\cos^5 x \ldots \qquad (m \text{ impair.})$$

et,

$$\sin mx = \cos x \left\{ \frac{m}{1}\sin x - \frac{(m+2)m(m-2)}{3!}\sin^3 x \ldots \right\} \quad (m \text{ pair.})$$

$$\sin mx = \frac{m}{1}\sin x - \frac{(m+1)m(m-1)}{3!}\sin^3 x \ldots \qquad (m \text{ impair.})$$

On trouvera une autre démonstration de ces formules dans la *Trigonométrie de Serret* (3e édition, 1862, p. 203).

On trouve aussi (*Nouvelles Annales*, 1847, p. 400) une démonstration très ingénieuse de la formule en question, démonstration indirecte il est vrai, et reposant sur l'identité

$$\left.\begin{array}{l} a^n + b^n \equiv (a+b)^n - \frac{n}{1}ab(a+b)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-4} \\ \ldots + (-1)^p a^p b^p \frac{n}{1} \cdot \frac{n-2p+1}{2} \cdots \frac{n-p-1}{p}(a+b)^{n-2p} + \ldots, \end{array}\right\} (1)$$

dans laquelle n est entier et positif.

Comme beaucoup d'identités, celle-ci peut se démontrer en observant qu'elle est vraie pour $n = 1$, pour $n = 2, \ldots$ puis

en établissant qu'étant reconnue exacte pour $n = K$ elle est encore vraie pour $n = K + 1$ (*).

Si, dans cette identité, on suppose

$$a = \cos\varphi + i \sin\varphi, \qquad b = \cos\varphi - i \sin\varphi$$

on a

$$\cos n\varphi = 2^{n-1}\cos^n\varphi - n.2^{n-3}\cos^{n-2}\varphi\,\frac{n(n-3)}{1.2}\,2^{n-5}\cos^{n-4}\varphi$$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\,2^{n-7}\cos^{n-6}\varphi + \ldots,$$

formule dans laquelle on peut supposer n pair ou impair.

QUESTIONS 78 ET 79

Solution par M. X. BARTHE.

1° Soit ABCD *un quadrilatère inscriptible. Désignons par* A_1 *la surface du triangle* BCD, *et par* P_1 *la puissance du point* A *par rapport à un cercle quelconque* Δ *situé dans le plan du quadrilatère. Désignons de même par* B_1 *et* P_2 *les quantités analogues pour le point* B, *etc. Prouver que l'on a la relation*

$$A_1P_1 - B_1P_2 + C_1P_3 - D_1P_4 = 0.$$

Déduire, de là, les propriétés du quadrilatère inscriptible.

(X. A.)

Prenons deux axes rectangulaires quelconques, passant par le centre du cercle Δ; et soient x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4 les coordonnées des quatre sommets du quadrilatère.

Puisque ces points sont sur un même cercle leurs coordonnées satisfont à la relation

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

(*) A cet effet, comme l'indique M. Mention *loc. cit.*, on multiplie par $a + b$ les deux membres de (1).

ou, en développant,

$$(x_1^2+y_1^2)\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} - (x_2^2+y_2^2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + \ldots = 0. \quad (1)$$

Considérons le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} R^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ R^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ R^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ R^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix},$$

dans lequel R désigne le rayon de Δ; il est évidemment nul. Développons-le par rapport aux éléments de la 1re colonne, on a

$$R^2\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} - R^2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + \ldots = 0. \quad (2)$$

Retranchant (2) de (1) on obtient la propriété énoncée; elle généralise, comme on le voit, le théorème de Möbius.

2° *Un quadrilatère* $A_1A_2A_3A_4$ *est inscrit dans un cercle* O*; soit* O' *le cercle passant par* A_1A_2 *et tangent au côté* A_1A_4. *Le côté* A_2A_3 *rencontre ce cercle en un second point* I*; démontrer que l'on a*

$$\frac{A_1A_3}{A_2A_4} = \frac{IA_3}{A_1A_4}.$$

En appliquant la relation précédente, on a

$$A_2A_3 . IA_3 \times \text{surf}\, A_1A_2A_4 = \overline{A_1A_4}^2 \times \text{surf}\, A_1A_2A_3. \quad (1)$$

Les triangles $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ ayant un angle égal sont entre eux comme les côtés qui comprennent cet angle; donc

$$\frac{\text{surf}\, A_1A_2A_3}{\text{surf}\, A_1A_2A_4} = \frac{A_2A_3 . A_1A_3}{A_1A_4 . A_2A_4}.$$

Multipliant les égalités précédentes, membre à membre, on a la relation demandée.

QUESTION 113

Solution par M. P. Giat, élève au Lycée Saint-Louis.

On donne un point fixe O *et deux autres points : l'un,* A *fixe; et l'autre* B, *mobile, mais restant à une distance invariable du*

point O. *On demande le lieu des sommets et des foyers des ellipses qui ont pour centre le point* O *et qui, en outre, sont telles que* A *et* B *soient les extrémités de deux diamètres conjugués.*

(E. V.)

1° *Équation des ellipses.* — La distance du point B au point O étant invariable, nous représenterons les coordonnées de ce point par $r \cos \varphi$ et $r \sin \varphi$, en prenant pour axe des x la droite OA et, pour axe des y, la perpendiculaire à cette droite, menée par le point O. Soit $OA = a$.

L'équation d'une conique ayant pour centre l'origine et passant par le point A est

$$x^2 - a^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0. \tag{1}$$

OA et OB étant deux diamètres conjugués, on a

$$B \operatorname{tg} \varphi + 1 = 0;$$

d'où, en posant $\operatorname{cotg} \varphi = \lambda$:

$$B = -\lambda.$$

Ensuite, comme le point B est sur la conique, on a

$$r^2 \cos^2\varphi - a^2 - 2\lambda r^2 \sin \varphi \cos \varphi + Cr^2 \sin^2 \varphi = 0,$$

d'où
$$C = \frac{a^2(1 + \lambda^2) + r^2\lambda^2}{r^2}.$$

En remplaçant B et C par leurs valeurs dans l'égalité (1) on aura l'équation cherchée

$$x^2 - 2\lambda xy + \frac{\lambda^2(a^2 + r^2) + a^2}{r^2} y^2 - a^2 = 0. \tag{2}$$

2° *Lieu des sommets.* — Il suffit, pour avoir le lieu des sommets, d'éliminer λ entre (2) et l'équation des axes de la conique, équation qui est

$$\frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{-\lambda}{1 - \dfrac{\lambda^2(a^2 + r^2) + a^2}{r^2}}. \tag{3}$$

A cet effet, ordonnons ces deux équations par rapport à λ; nous avons

$$\lambda^2y^2(a^2 + r^2) - 2r^2\lambda xy + r^2x^2 + a^2y^2 - a^2r^2 = 0,$$
$$\lambda^2xy(a^2 + r^2) - r^2\lambda(x^2 - y^2) + xy(a^2 - r^2) = 0.$$

Il nous suffit d'écrire que le résultant de ces deux équa-

tions est nul. Nous avons ainsi, après simplifications, l'équation

$$(a^2 + r^2)(x^2 + y^2 - a^2)^2x^2$$
$$+ (x^2 + y^2)[(x^2 + y^2)(a^2y^2 - r^2x^2) + a^2r^2(x^2 - y^2)] = 0,$$

ou, en développant,

$$(x^2 + y^2)^3 - r^2(x^2 + y^2)^2 - 2a^2x^2(x^2 + y^2) + a^2x^2(a^2 + r^2) = 0. \quad (4)$$

Nous voyons, sur cette équation, que le lieu est une courbe du sixième degré, symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées et possédant un point double à l'origine; les tangentes en ce point étant confondues et verticales.

Pour construire cette courbe, nous poserons

$$x^2 + y^2 = t^2,$$

ce qui revient à couper par des cercles ayant pour centre l'origine. Nous aurons alors

$$x^2 = \frac{t^4(t^2 - r^2)}{a^2(2t^2 - a^2 - r^2)},$$

$$y^2 = \frac{t^2(t^2 - a^2)(r^2 + a^2 - t^2)}{a^2(2t^2 - a^2 - r^2)}.$$

Les valeurs de x^2 et y^2 doivent d'abord être positives; posons donc :

$$(t^2 - r^2)(2t^2 - a^2 - r^2) > 0,$$

et $$(t^2 - a^2)(r^2 + a^2 - t^2)(2t^2 - a^2 - r^2) > 0.$$

On voit ainsi qu'il n'y aura aucun point de la courbe dans l'espace compris entre les deux cercles

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = \frac{a^2 + r^2}{2}$$

ainsi que dans les espaces compris :

1° entre les cercles

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + r^2}{2};$$

2° à l'extérieur du cercle

$$x^2 + y^2 = a^2 + r^2.$$

Cela posé, nous distinguerons trois cas :

1er Cas $a > r$. — On en déduit

$$\frac{a^2 + r^2}{2} > r^2 \quad \text{et} \quad \frac{a^2 + r^2}{2} < a^2.$$

Pour $\quad t^2 = r^2 \qquad x = 0 \quad$ et $\quad y^2 = r^2$;

$\qquad\quad t^2 = a^2 \qquad y = 0 \quad$ et $\quad x^2 = a^2$.

Enfin pour $\quad t^2 = a^2 + r^2, \quad y = 0, \quad x^2 = a^2 + r^2$.

Les tangentes en ces points sont évidemment : pour les deux premiers, parallèles à Ox et, pour les quatre derniers

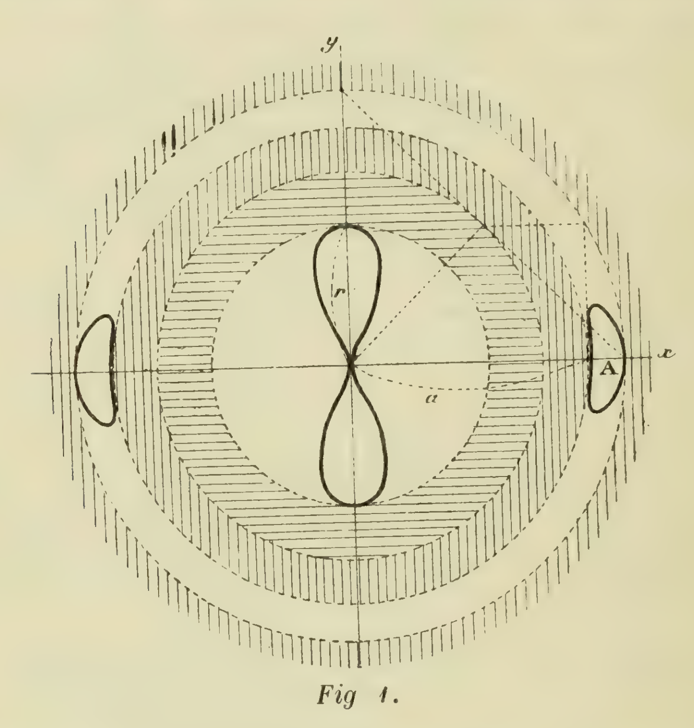


Fig 1.

perpendiculaires à Ox. On peut, avec ces données, construire la courbe; elle a la forme indiquée par la figure (1).

2[me] Cas. $a = r$. — L'équation (4) devient dans ce cas :

$$(x^2 + y^2 - a^2)[(x^2 + y^2)^2 - 2a^2x^2] = 0.$$

Donc *le lieu se compose de trois cercles;* l'un, ayant pour centre l'origine, et pour rayon a; les autres, passant par l'origine et ayant pour centres respectifs $\begin{cases} y = 0, \\ x = \pm \dfrac{a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

3[me] Cas. $a < r$. — On en déduit $a^2 < \dfrac{a^2 + r^2}{2} < r^2$ et la courbe a dans ce cas la forme (2).

3° *Lieu des foyers.* — Pour trouver les foyers de la conique (2)

nous allons exprimer que la droite $x - \alpha = i(y - \beta)$ est tangente à cette conique.

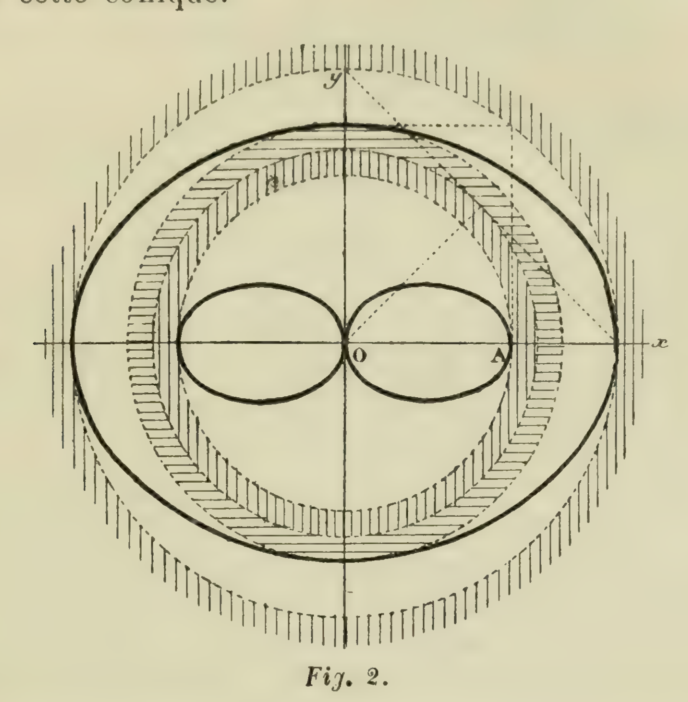


Fig. 2.

L'équation aux ordonnées des points d'intersection de cette droite avec la conique est :

$$(\alpha - i\beta + iy)^2 - 2\lambda y(a - i\beta + iy) + \frac{\lambda^2(a^2 + r^2) + a^2}{r^2} y^2 - a = 0$$

ou en ordonnant

$$y^2\left[\frac{\lambda^2(a^2 + r^2) + a^2}{r^2} - 1 - 2\lambda i\right] + 2y[i(\alpha - i\beta) - \lambda(\alpha - i\beta)] + (\alpha - i\beta)^2 - a^2 = 0.$$

On a donc, en exprimant que les deux racines de cette équation sont confondues :

$$[i(\alpha - i\beta) - \lambda(\alpha - i\beta)]^2 = [(\alpha - i\beta)^2 - a^2]\left[\frac{\lambda^2(a^2 + r^2) + a^2}{r^2} - 1 - 2\lambda i\right]$$

ou, après simplifications :

$$[\lambda^2(\alpha^2 - \beta^2 - a^2 - r^2) + (\alpha^2 - \beta^2 - a^2 + r^2)] - 2i[\lambda^2\alpha\beta - r^2\lambda + \alpha\beta] = 0.$$

Par conséquent :

$$\lambda^2(\alpha^2 - \beta^2 - a^2 - r^2) + (\alpha^2 - \beta^2 - a^2 + r^2) = 0, \qquad (5)$$

$$\lambda^2 - \lambda\frac{r^2}{\alpha\beta} + 1 = 0. \qquad (6)$$

En éliminant λ entre ces deux équations, nous aurons le lieu des foyers des coniques (2).

Pour faire cette élimination, remplaçons dans l'équation (5) λ^2 par $\lambda \frac{r^2}{\alpha\beta} - 1$, nous en déduisons

$$\lambda = -\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 - a^2 - r^2}.$$

D'où, en transportant dans l'équation (6) ;

$$\frac{4\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2 - a^2 - r^2)^2} + \frac{2r^2}{\alpha^2 - \beta^2 - a^2 - r^2} + 1 = 0;$$

ou en simplifiant, et en rendant α, β coordonnées courantes

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 - r^4 = 0.$$

En écrivant cette équation sous la forme

$$[(x - a)^2 + y^2][(x + a)^2 + y^2] = r^4,$$

on voit donc que le lieu cherché est un ovale de Cassini ayant pour foyers le point A et son symétrique par rapport à l'origine O ; le produit des distances d'un point de cette courbe aux foyers est égal à r^2.

Dans le cas particulier où $a^2 = r^2$, nous avons la lemniscate de Bernoulli.

Le résultat remarquable auquel conduit la recherche analytique du lieu des foyers peut se prévoir à priori, en observant que le produit des rayons vecteurs joignant un point de l'ellipse aux foyers est égal au carré du demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit au point considéré.

Nota. — MM. Marchis, élève au lycée de Rouen et Hugon à Poligny ont résolu la même question, mais leurs solutions renferment certaines parties incomplètes.

QUESTION 125

Solution par M. Charles Martin, élève au Lycée Louis-le-Grand.

Une parabole de forme invariable glisse entre deux droites rectangulaires. Ox, Oy ; *trouver le lieu décrit par l'extrémité du diamètre qui passe par l'origine. — La courbe est du*

huitième degré ; mais elle peut se mettre, en coordonnées polaires, sous la forme remarquable :

$$\frac{p}{\rho} = 1 - \cos 4\omega.$$

Déduire, de cette équation, les points d'inflexion que présentent les quatre branches de la courbe.

(G. L.)

Prenons pour axes les droites rectangulaires Ox, Oy, l'équation de la parabole inscrite dans l'angle xOy est :

$$(bx - ay)^2 - ab(2bx + 2ay - ab) = 0 \qquad (1)$$

$bx + ay - ab = 0$ étant l'équation de la corde de contact, calculons le paramètre de cette parabole. Introduisant la longueur λ, il vient :

$$(bx - ay + \lambda)^2 - 2ab[b(1 - \lambda)x + a(1 + \lambda)y] + a^2b^2 - \lambda^2 = 0.$$

Exprimons que les droites :

$$bx - ay + \lambda = 0 \quad \text{et} \quad 2ab[b(1 - \lambda)x + a(1 + \lambda)y] + \lambda^2 + a^3b^2 = 0$$

sont rectangulaires ; et prenons les pour axes ; on a pour expression du paramètre

$$\frac{2a^2b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}} = p.$$

On a donc la condition :

$$4a^4b^4 = p^2(a^2 + b^2)^3 \qquad (2)$$

Le lieu cherché s'obtient en éliminant a et b entre les équations (1), (2) et l'équation

$$bx - ay = 0. \qquad (3)$$

L'élimination donne :

$$b^4x^4y^4 = p^2(x^2 + y^2)^3$$

courbe du huitième degré, formée de quatre branches paraboliques. L'origine est un centre. Passons aux coordonnées polaires, on a :

$$\frac{p}{\rho} = 2 \sin^2 2\omega, \qquad \text{ou} \qquad \frac{p}{\rho} = 1 - \cos 4\omega.$$

Or :

$$p\left(\frac{1}{\rho}\right)'' = 4^2 \cos 4\omega.$$

Donc

$$p\left[\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''\right] = p[1 + 15 \cos 4\omega] = 0,$$

les points d'inflexion correspondent à :

$$\cos 4\omega = -\frac{1}{15} \qquad \rho = \frac{15}{16}.$$

Nota. — Ont résolu cette question MM. F. Michel (lycée de Montpellier) ; Paul Bourgarel, à Antibes ; A. Bèche, professeur à l'école normale de Tulle ; Ferval, élève au lycée Henri IV, classe de M. Macé de Lépinay ; Vacquant, ancien élève de mathématiques spéciales à Lille ; Hugon, à Poligny ; Lucien Marchis, à Rouen ; Giat, élève au lycée Saint-Louis, classe de M. Ed. Lucas.

M. Bèche a calculé les angles ω qui correspondent aux points d'inflexion ; il donne, pour le premier point, $\omega_1 = 23^\circ\ 27'\ 20''$; de cette valeur, on déduit évidemment les autres, puisque les branches sont symétriques par rapport aux axes et par rapport à leurs bissectrices.

QUESTIONS 169, 170 ET 171

Solution par E. Lemoine, ancien élève de l'École polytechnique.

---

169. — *On considère une parabole* P *inscrite aux points* A *et* B *dans l'angle* ACB, *si l'on désigne par* M *un point mobile sur* P *on a constamment :* $\overline{MBA}^2 = 4MCB \times MCA$.

170. — *Soit* BC *un diamètre d'une ellipse* E ; *on considère l'extrémité* A *d'un demi-diamètre conjugué de* BC, *puis on prend sur* E *(explicitement sur l'arc* AC *pour éviter toute ambiguïté sur les signes) un point* M ; *démontrer que l'on a constamment :*

$$\frac{1}{MAC} - \frac{1}{MAB} = \frac{2}{MBC}.$$

171. — *Soit* BC *un diamètre fixe dans une hyperbole donnée* H ; *par les extrémités* B *et* C *on mène des parallèles aux asymptotes, parallèles qui se coupent en* A.

Démontrer que si M *est un point mobile sur* H, *le rapport* $\frac{MAB.MAC}{MBC}$ *a une valeur constante.*

169. — Appelons α, β, γ les distances du point M respectivement à BC, AC, AB et appelons a, b, c les longueurs respectivement de BC, AC, AB.

L'équation en coordonnées homogènes de la parabole tangente à CD en B et à CA en A est (ABC étant le triangle de référence),

$$c^2\gamma^2 = 4ab\alpha\beta$$

ou

$$\left(\frac{1}{4}\,c\gamma\right)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\,a\alpha\right)\left(\frac{1}{2}\,b\beta\right),$$

d'où l'on conclut :

$$\overline{\text{MBA}}^2 = 4\text{MCB} \times \text{MCA};$$

et 169 est démontré.

Les trois paraboles qui touchent deux côtés d'un triangle aux extrémités du troisième ont des propriétés remarquables déjà étudiées par MM. Artzt, Brocard, E. Lemoine, etc.

170. — L'équation de l'ellipse E circonscrite à ABC et telle que la médiane partant de A soit le diamètre conjugué du diamètre CB est :

$$\frac{2}{a\alpha} + \frac{1}{b\beta} + \frac{1}{c\gamma} = 0,$$

ou, si α, β, γ sont les distances de M, point de l'ellipse, aux trois côtés

$$\frac{2}{2\text{MBC}} + \frac{1}{2\text{MAC}} - \frac{1}{2\text{MAB}} = 0,$$

ou

$$\frac{1}{\text{MAC}} - \frac{1}{\text{MAB}} = \frac{2}{\text{MBC}};$$

et 170 est démontré.

171. — H a pour équation (ABC étant encore le triangle de référence)

$$a^2\alpha^2 + ab\alpha\beta + ac\alpha\gamma + 2bc\beta\gamma = 0.$$

d'où

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \frac{2bc\beta\gamma}{a\alpha} = 0,$$

d'où

$$2\text{S} + \frac{4\left(\frac{b\beta}{2}\right)\left(\frac{c\gamma}{2}\right)}{\left(\frac{a\alpha}{2}\right)},$$

en appelant S l'aire de ABC; d'où

$$\frac{\text{S}}{2} = \frac{\text{MAC}.\text{MAB}}{\text{MBC}},$$

et 171 est démontré.

Remarques. — *a*) Les trois paraboles P relatives au triangle ABD se coupent deux à deux sur les médianes à l'intérieur du triangle, elles divisent ces médianes dans le rapport de 1 à 8.

b) Les trois ellipses E, relatives au triangle ABD, se coupent deux à deux sur les médianes à l'extérieur du triangle, elles divisent ces médianes dans le rapport de 1 à 2.

c) Les trois hyperboles H relatives au triangle ABC se coupent, deux à deux, sur les médianes à l'extérieur du triangle, elles divisent les médianes dans le rapport de 1 à 3.

Nota. — Ont résolu ces questions : MM. J. Berthon (lycée de Lyon) A. Levy (lycée de Nancy, classe de M. Hervieux); Roux (lycée de Grenoble); Georges Naudin (lycée d'Angoulême); J. Noulet (collège de Manosque).

QUESTION PROPOSÉE

232. — Les cercles tangents à l'axe non transverse d'une hyperbole équilatère, qui ont leur centre sur cette courbe, découpent sur l'axe transverse des segments égaux.

(d'Ocagne.)

ÉRRATUM

Page 208, ligne 7 :

Au lieu de:	*Lisez:*
égale à 1	plus grand que 1.

Le Directeur Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 19602-7.

Nous avons appris, au moment où le n° de novembre était déjà sous presse, une nouvelle qui nous consterne. Notre maître et ami, M. Bourget, fondateur de ce journal, Recteur de l'Académie de Clermont, est mort subitement dans cette ville, le 11 octobre dernier.

Nous l'avions vu, encore plein de vie et de vigueur, il y a bien peu de temps, et nous étions loin de prévoir un pareil malheur. Le temps et la force nous manquent pour parler dignement de cet homme qui n'a jamais connu que des amis; nous compléterons, à loisir, les trop courts renseignements qui suivent; et nous raconterons, comme il convient, à nos lecteurs, cette vie noblement et laborieusement remplie.

Justin Bourget était ancien élève de l'École Normale, dont il était sorti en 1845, Agrégé des sciences mathématiques. Il débuta dans l'Enseignement secondaire et, c'est au milieu des occupations si absorbantes de cet enseignement qu'il trouva le temps d'écrire sa remarquable thèse sur l'attraction des parabaloïdes (1852). Nommé professeur dans l'Enseignement supérieur, il resta longtemps attaché, comme professeur de mécanique, à la Faculté de Clermont qu'il ne quitta que pour venir à Paris (en 1867) diriger l'école préparatoire de Sainte-Barbe. S'il ne l'avait pas fondée, M. Blanchet avait porté la prospérité de cette école à un si haut point qu'il semblait difficile de lui succéder : M. Bourget se montra digne de son prédécesseur et maintint l'école au rang où il l'avait trouvée. C'est pendant cette direction, en 1877, qu'il fonda le *Journal de Mathématiques élémentaires*. En 1878, le ministre de l'instruction publique, M. Bardoux, qui avait pu l'apprécier à Clermont, l'enleva à Sainte-Barbe et le nomma Recteur de l'Académie d'Aix. Il obtint peu apres le poste de Clermont où il vient de mourir, à 65 ans, entouré de l'estime de ses amis et de l'affection de sa nombreuse famille. Nos lecteurs, tous ses anciens élèves, tous ceux qui l'ont connu s'associeront aux compliments de respectueuse condoléance que nous adressons ici à sa veuve et à ses enfants.

L. Lévy.

VARIÉTÉS

ESSAI

SUR LA

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 225.)

43. La distance au point invisible et inaccessible. — La détermination de la distance d'un point donné à un point inaccessible peut se traiter de mille façons différentes; toutes les relations métriques qui existent entre les éléments d'une figure, ou presque toutes, fournissent, en effet, autant de solutions de ce problème.

Cette observation s'applique, dans une certaine mesure, au

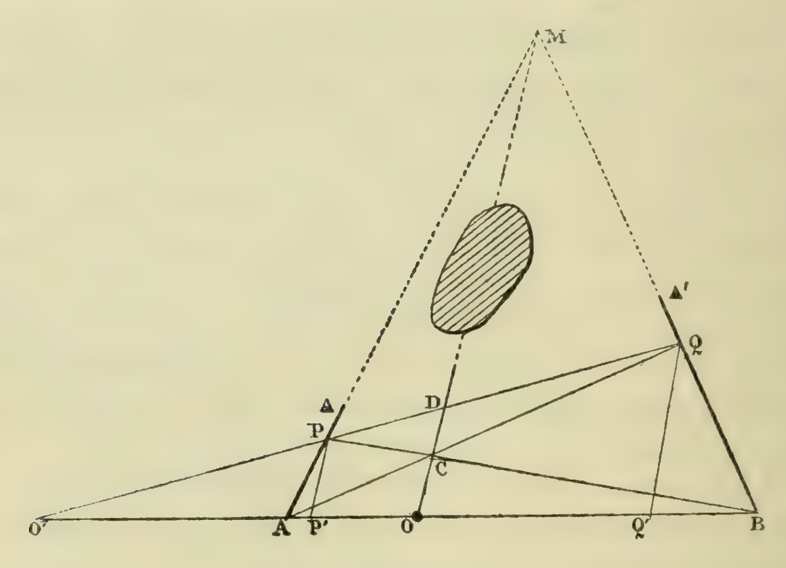


Fig. 186.

problème, plus difficile, que nous abordons maintenant et dans lequel on suppose que le but, étant, tout à la fois, inaccessible et invisible, se trouve simplement déterminé par deux jalonnements Δ, Δ', partant des points A et B. Ces ali-

gnements, bien entendu, sont supposés accessibles sur une certaine longueur, à partir de ces points.

Nous nous bornerons à la solution qu'on va lire et qui nous paraît, surtout quand on s'accorde la table des inverses, d'une pratique sûre et rapide. Un seul côté de ce problème a été soulevé par Servois lorsqu'il s'est proposé, et nous reviendrons nous-même sur ce point, quand nous traiterons, dans un chapitre suivant, certains problèmes d'Artillerie, de *viser un but invisible*. Mais, pour que la question ainsi posée, soit complètement résolue ,il faut pouvoir déterminer: 1° la direction du projectile, et 2° la longueur de la distance qu'il doit parcourir.

Voici comment on peut répondre à cette double question.

Soit O le point d'où il faut viser le point inaccessible et invisible M; on détermine d'abord, par un des procédés connus, le point O′, conjugué harmonique de O, par rapport à AB. Si l'on trace les alignements OPQ, PB et AQ, on obtient un certain point C. La droite OC est la polaire de O′ par rapport aux droites MA, MB; OC passe donc par le point M; c'est la ligne de visée.

Proposons-nous maintenant de déterminer la longueur de OM, et, à cet effet, ayant mené PP′ et QQ′ parallèlement à OC, démontrons l'égalité

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'} - \frac{1}{OC}.$$

Le théorème de Gergonne donne

$$\frac{OC}{OM} + \frac{PC}{PB} + \frac{QC}{QA} = 1. \qquad (1)$$

Mais on a $$\frac{PC}{PB} = 1 - \frac{CB}{PB} = 1 - \frac{CO}{PP'}, \qquad (2)$$

et $$\frac{QC}{QA} = 1 - \frac{CA}{QA} = 1 - \frac{CO}{QQ'}. \qquad (3)$$

Les égalités (1), (2) et (3) donnent

$$\frac{OC}{OM} + 1 - \frac{CO}{PP'} - \frac{CO}{QQ'} = 0.$$

On a donc $$\frac{1}{OM} = \frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'} - \frac{1}{CO}.$$

Cette égalité permet de calculer OM, quand on a relevé les

longueurs CO, PP′ et QQ′; le calcul se fait d'ailleurs rapidement quand on fait usage de la table des inverses.

Remarque. — Si l'obstacle qui rend le point M invisible quand on se place en O permet de chaîner OD, on peut encore abréger le calcul que nous venons d'indiquer en observant que, la ponctuelle (O, C, D, M) étant harmonique, on a

$$\frac{1}{\overline{OM}} = \frac{2}{\overline{OD}} - \frac{1}{\overline{OC}}.$$

D'ailleurs, on peut toujours réaliser la construction indiquée, dans les limites accessibles du terrain, en effectuant celle-ci, au besoin, de l'autre côté de AB. Mais, dans ce cas, la formule employée pour le calcul de OM devrait être modifiée conformément à ce principe, que si quatre points, situés en ligne droite et formant une division harmonique, sont placés dans l'ordre A, B, C, D, on a

$$\frac{2}{\overline{AC}} = \frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

Comme l'observe avec raison Bergery (*loc. cit.*, p. 422), ce problème se rencontre fréquemment dans certaines opérations pratiques, quand il s'agit, par exemple, de mesurer la largeur d'un bois, d'un groupe de maisons; ou encore, l'épaisseur d'une montagne, c'est-à-dire, la distance de deux points opposés, pris sur sa base, etc.

Il va, sans dire, que les deux alignements Δ, Δ′ peuvent être indifféremment choisis de part et d'autre de O, comme dans la figure que nous avons considérée, ou du même côté; on adoptera l'une ou l'autre de ces deux dispositions, suivant la nature du terrain et les dimensions de l'obstacle placé entre O et M.

44. Examen d'un cas particulier. (La solution de l'équerre). — Dans le problème précédent, nous avons supposé que l'on pouvait, par le point O, tracer une base sur laquelle il était possible de trouver deux positions A et B d'où l'on apercevait le but M. Mais, dans la pratique, les points A et B en question ne sont pas nécessairement placés en ligne droite avec O; de plus, la méthode que nous avons indiquée exige des jalonnements assez multipliés. On opère plus rapidement avec l'équerre, en procédant comme il suit :

Élevons en A et B des perpendiculaires à MA et à MB ; nous obtenons ainsi un certain point C ; traçons, par O, des parallèles OB′, OA′ aux directions MB, MC. Ces parallèles se déterminent, en même temps que l'on jalonne les droites BC, AC, en plaçant l'équerre sur BC, par exemple, en un point B″ tel que OB″ soit perpendiculaire sur BC. Si, par les points B′, A′, nous élevons des perpendiculaires à B′O et à A′O, elles se coupent en C′ et la droite CC′ coupe AB en un point O′ qui est situé en ligne droite avec les points M et O.

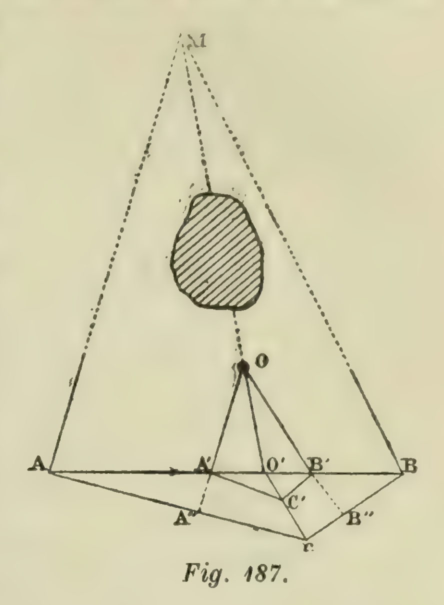


Fig. 187.

En effet, les deux quadrilatères MBAC, OB′A′C′, ayant leurs côtés parallèles, et deux de leurs diagonales AB, A′B′ confondues en direction, sont homothétiques ; le centre d'homothétie O′ est donc situé sur cette droite AB.

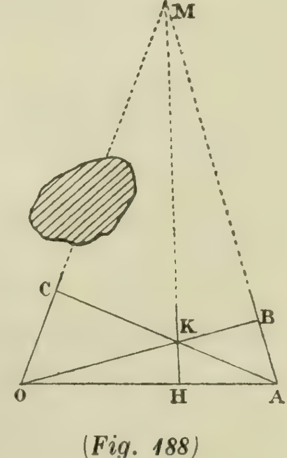
Ainsi, la droite OO′ donne la ligne de visée vers le but invisible.

Quant à la distance inconnue MO, elle est donnée par l'égalité

$$MO = OO' \cdot \frac{CC'}{O'C'}.$$

45. Solutions diverses. — Nous résumons rapidement, dans ce paragraphe, quelques solutions du présent problème, solutions qui se font remarquer, parmi beaucoup d'autres, par un caractère particulier de simplicité.

1° Le théorème des trois hauteurs d'un triangle, théorème que nous avons utilisé déjà (§ 25) pour un autre problème, s'applique remarquablement bien à celui qui nous occupe ici.



(Fig. 188)

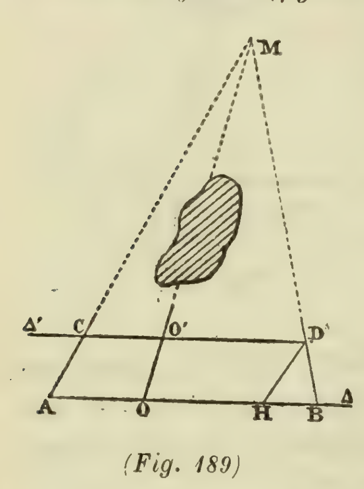
Jalonnons OA dans la partie accessible et, avec l'équerre

abaissons sur OA et sur AM les perpendiculaires MH, OB qui se coupent en K. Sur l'alignement AK, ainsi obtenu, on abaisse de O une perpendiculaire OC; OC représente la ligne de visée vers le point invisible.

Quant à la distance OM, elle est donnée par l'égalité

$$OM = \frac{OH.OA}{OC}.$$

2° Soit toujours *(fig. 189)* O le point d'où il faut viser le but M caché par un obstacle. On jalonnera les parallèles AB et CD; A et B désignant deux points d'où l'on peut apercevoir le but. On partagera CD au point O′, dans le rapport $\frac{AO}{BO}$; cette opération peut se faire par le chaînage des longueurs AO, AB, CD et par le calcul de CO′ au moyen de la formule



(Fig. 189)

$$CO' = AO\left(\frac{CD}{AB}\right).$$

La ligne de visée OO′ se trouve ainsi déterminée; quant à la distance OM, elle résulte de la formule

$$OM = OO' \frac{1}{1 - \left(\frac{CD}{AB}\right)}.$$

Dans la pratique, on peut toujours s'arranger de façon que le rapport $\frac{CD}{AB}$, qui entre dans la formule précédente. soit égal à $\frac{1}{2}$, ou à $\frac{3}{4}$, ... en un mot, de la forme $\frac{n}{n+1}$. Alors on a

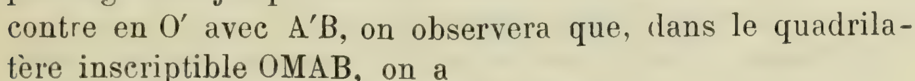
$$OM = (n+1)OO',$$

formule bien commode pour calculer OM.

Pour réaliser cette disposition favorable des parallèles AB et CD, on prendra, sur Δ, de A en B, $n+1$ fois la longueur du cordeau ; et, de A en H, n fois seulement cette même longueur. Ayant tracé HD parallèlement à AC, c'est par le point D qu'on jalonnera la droite Δ′ parallèlement à Δ.

3° Traçons, dans la partie accessible, un alignement Δ passant par le point O et cherchons, sur Δ, un point A d'où l'on peut apercevoir M ; puis menons AO′ perpendiculairement à AM. Ayant relevé, avec la fausse équerre, l'angle OAM, on se transporte sur AO′ en un point B que l'on détermine de telle sorte que, de ce point, on aperçoive OM sous un angle égal à OAM. Alors, la ligne de visée est perpendiculaire à OB.

Pour évaluer OM ; ayant prolongé MO jusqu'à sa rencontre en O′ avec A′B, on observera que, dans le quadrilatère inscriptible OMAB, on a



$$O'O(O'O + OM) = O'B . O'A.$$

Cette égalité permet de calculer OM. *(A suivre.)*

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

Si un cercle passe par un point fixe A, et que l'extrémité du diamètre qui passe par A décrive une certaine courbe fixe C ; le cercle mobile a, pour enveloppe, la podaire de C par rapport à A.

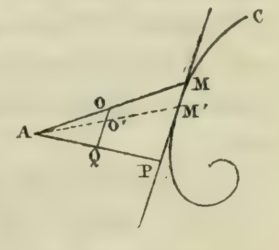


Fig. 1.

En effet, dans le mouvement en question, le centre O du cercle décrit une courbe homothétique à C, la tangente en O, au lieu décrit par ce point, est donc parallèle à la tangente M, à C. Si AM, AM′ sont deux positions voisines de AM ; O, O′ les milieux de AM, AM′ ; les deux cercles ayant un point commun en A, auront

un second symétrique de A par rapport à OO′; ce sera le pied P de la perpendiculaire abaissée de A sur MM′. A la limite, MM′ est la tangente en M à C, et, par suite, le lieu de P, ou l'enveloppe du cercle mobile, sera la podaire de C par rapport à A.

Cette remarque très simple, et très connue, peut donner un certain nombre de résultats intéressants.

Exemple. — *Soient* O *un cercle donné,* BAC *un angle fixe qui a son sommet sur la circonférence* O. *D'un point* M, *quelconque, du cercle fixe, on abaisse les perpendiculaires* MD, ME *sur les côtés de* BAC. *La droite* DE *est la droite de Simson de* M*; elle forme un triangle* ADE *avec les côtés de l'angle* A*; le cercle circonscrit à ce triangle enveloppe un limaçon de Pascal, dont le point de rebroussement est* A, *et dont le cercle générateur est* O.

En effet le cercle circonscrit à ADE, a pour diamètre AM; donc, d'après la remarque précédente, son enveloppe est la podaire du cercle O par rapport à A.

Inversement : Si un cercle mobile, passant par un point fixe, a pour enveloppe une courbe P, l'extrémité du diamètre qui passe par A, décrit une courbe C, telle que P est la podaire de A par rapport à C. Donc, le centre de ce cercle a pour lieu une courbe semblable à C.

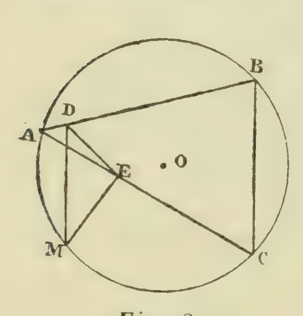


Fig. 2.

De là on conclut que, si l'on connaît l'enveloppe d'un cercle mobile dans les conditions précédentes, on peut en déduire le lieu de son centre.

On prouve très aisément que les courbes C, dont les podaires sont des cercles, par rapport à un point A, sont des coniques à centre, qui ont pour foyer A, et, pour centre, le centre du cercle.

On démontre, en géométrie élémentaire, que certains cercles mobiles, dans les conditions indiquées, enveloppent des cercles; il en résulte, tout de suite, que le lieu des centres de ces cercles est une conique ayant pour foyers le point fixe et le centre du cercle enveloppe.

Par exemple, de ce théorème, dû à M. Mannheim :

Un cercle étant inscrit dans un angle, si on lui mène une tangente BC, *le cercle circonscrit au triangle* ABC *formé par les trois tangentes touche un cercle fixe inscrit dans l'angle donné.*

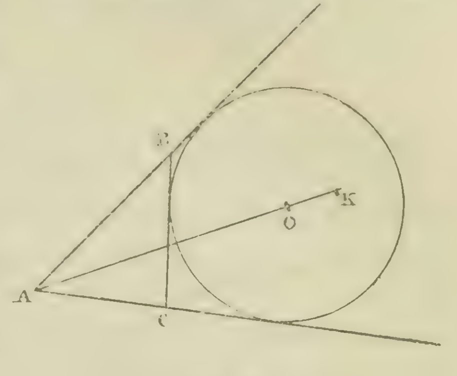


Fig. 3.

Je déduis ce théorème :

Un angle étant donné de position, et une droite BC *étant mobile dans cet angle, de manière que le triangle* ABC *ait un perimètre constant, le lieu géométrique du centre des cercles circonscrits aux triangles* ABC *est une hyperbole qui a pour foyer* A, *et dont l'axe est la bissectrice de l'angle* A.

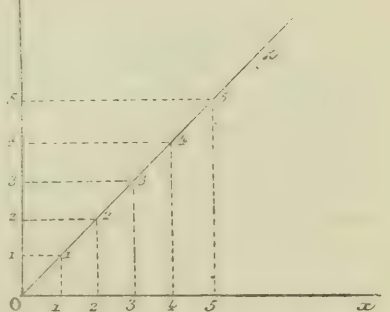
CORRESPONDANCE

Nous avons reçu, de M. d'Ocagne, la lettre suivante :

« Au sujet du calcul des expressions de la forme

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

pour lequel vous avez dressé une table des inverses, qui figure en partie dans le numéro de septembre du journal, je vous signalerai un tableau graphique que j'ai fait connaître pour les calculs de ce genre, à propos de la formule des lentilles (*Journal de physique théorique et appliquée*, 2e série, E. IV, 1885, p. 554).



Soient : Ox et Oy deux axes rectangulaires portant des graduations égales; Oz la bissecitrce de l'angle de ces axes, graduée de telle façon que le point de division dont les coordonnées sont : $x = n$, $y = n$, soit coté n.

En joignant le point de l'axe Ox, coté x, au point de l'axe Oy, coté y, on a une droite qui coupe l'axe Oz au point dont la cote z vérifie l'égalité

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

La démonstration étant évidente, je n'y insiste pas.

Pour calculer y, connaissant z et x, on tire la droite qui joint le point z au point x et on lit la cote du point où cette droite coupe Oy. C'est là le cas du problème que vous aviez en vue.

Cette représentation graphique se prête à une discussion remarquablement simple, de la théorie des lentilles.

Pour n'avoir pas à tracer de droite sur le tableau graphique, il suffit d'être muni d'un transparent sur lequel on aura tracé une droite d'un trait fin.

Les dimensions à donner au tableau graphique dépendent des limites entre lesquelles peuvent varier les données et de l'approximation qu'on veut obtenir. »

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

(CONCOURS DE 1887) (*).

Mathématiques élémentaires.

— On donne deux cercles S et Σ ayant pour centres les points O et ω, pour rayons r et ρ ; le cercle S est supposé intérieur au cercle Σ, et le point ω intérieur au cercle S.

1° Démontrer que tous les cercles T tangents extérieurement au cercle S et orthogonaux au cercle Σ touchent un troisième cercle fixe.

2° On prend une droite DD' perpendiculaire à la ligne des centres ωO, et un point P sur cette ligne des centres. Soient ωA, ωB, les tangentes menées du point ω à l'un des cercles T, A' et B' les points d'intersection de la droite DD' avec les bissectrices des angles AωO et BωO ; démontrer que les points A' et B' forment une division homographique quand le cercle T varie ;

3° Étudier les variations de l'angle A'PB' ;

(*) Une solution de cette question paraîtra dans le numéro de janvier ochain.

4° Soient T_1, T_2, T_3,..... T_n, une suite de cercles T orthogonaux au cercle Σ, le premier aux points A_1 et A_2, le second aux points A_2 et A_3, le troisième aux points A_3 et A_4,..... le $n^{ième}$ aux points A_n et A_{n+1}; démontrer que la condition nécessaire et suffisante, pour que le point A_{n+1} coïncide avec le point A_1, est que l'on puisse satisfaire à une relation de la forme

$$\text{tang}\,\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2r\rho}\sqrt{(\rho^2 + d^2 - r^2)^2 - 4d^2\rho^2}$$

le nombre k étant entier, et d désignant la distance ωO.

ÉCOLE FORESTIÈRE

(CONCOURS DE 1887)

Composition en mathématiques.

— Si a et b sont deux nombres premiers entre eux : 1° des deux expressions $11a + 2b$ et $18a + 5b$, l'une étant divisible par 19, l'autre l'est également. 2° Elles ne peuvent admettre d'autre facteur commun que 19.

— Trouver au moyen de l'identité de la division trois équations qui permettent de déterminer les coefficients du reste de la division d'un polynôme entier fixe par le produit

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

où α, β, γ sont trois quantités distinctes.

Résoudre et discuter ces équations, et en conclure les conditions nécessaires et suffisantes pour que la division se fasse exactement.

— Une droite étant donnée par ses projections, trouver celles de sa projection sur le plan bissecteur du second dièdre formé par les plans horizontal et vertical. — Prouver qu'elles restent les mêmes si la ligne de terre prend différentes positions parallèles entre elles, les données ne changeant pas d'ailleurs.

Trigonométrie et calcul logarithmique.

— Calculer les côtés et les diagonales d'un parallélogramme dont on connaît le périmètre $2p$ et l'angle aigu α des diagonales, supposé égal a l'angle aigu de deux côtés adjacents.

— On donne dans un triangle une médiane

$$m = 2741^{m},633$$

et les angles suivant lesquels elle partage l'angle du triangle au sommet duquel elle passe.

$$\alpha = 27^\circ 34' 15'',61$$
$$\beta = 39^\circ 52' 23'',87$$

On demande les trois côtés et les trois angles.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPECIAL

(AVRIL 1887)

ALGER

— I. Résultante de deux forces parallèles, inégales et de sens contraires. II. Examiner le cas où les forces sont parallèles, égales et de sens. contraires.

— Soit un carré ABCD. — 1° On diminue le côté AB de 2^m et le côté AC de 1^m. ; on construit sur les restes, comme côtés, un rectangle R. — 2° On augmente le côté AB de 4^m ; on diminue le côté AC de 5^m ; on construit un rectangle R' avec les lignes obtenues, comme côtés. — Déterminer le côté du carré de manière que le rapport de la surface du rectangle R à celle du rectangle R' soit égale à un nombre donné m.

LYON

— Dans un cercle donné, on mène deux rayons OA et OB comprenant entre eux un angle de 60°. Du milieu O' de l'arc AB, comme centre, on décrit un autre cercle tangent aux deux rayons OA et OB. Les aires de ces deux cercles ont une partie commune, dont on demande le rapport à l'aire du secteur OAO'B.

RENNES

— Trouver l'angle de deux droites, en Géométrie descriptive.

— Résoudre et discuter l'équation.

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} (a - x) = l.$$

POITIERS

— Énoncer et démontrer les théorèmes qui permettent de trouver l'expression du volume d'un parallélipipède droit.

— Réduction de $1 + \operatorname{tang} a$ en un produit.

BESANÇON

— Pour quelles valeurs de la variable x l'inégalité

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} > 1$$

est-elle vérifiée?

— Volume engendré par un pentagone régulier convexe tournant autour d'un de ses côtés (en supposant connu le rayon du cercle circonscrit au pentagone).

CLERMONT

— Établir la formule qui donne la surface totale d'un tronc de cône de révolution, à bases parallèles.

— Dans un tronc de cône on connait : 1° l'arête a ; 2° l'angle α de cette arête avec le plan de la grande base; 3° la surface totale πK^2 ? Calculer les rayons x et y des deux bases.

Le problème est-t-il possible quelle que soit la surface donnée, les autres données restant les mêmes?

Application : $\alpha = 60°$; $K^2 = \frac{13a^2}{8}$.

NANCY

— Énoncer et établir les relations trigonométriques qui lient les angles et les côtés d'un triangle quelconque.

— On donne un demi-cercle AOB, et l'on mène les tangentes Ax, By, en A et B.

1° Prouver que la portion CD d'une troisième tangente, comprise entre Ax et By est vue du point O sous un angle droit;

2° Déterminer AC et BD de telle sorte que le volume engendré par ABCD, tournant autour de AB, soit égal à p fois le volume de la sphère engendrée par la rotation du demi-cercle.

LILLE

Mathématiques.

— Étant donnée l'équation : $(m-5)x^2 - 4mx + (m-2) = 0$, où m est donné et x l'inconnue, on demande :

1° Pour quelles valeurs de m l'équation aura ses racines réelles ;

2° Pour quelles valeurs de m elle aura les deux racines de signes contraires.

— Calculer deux angles x et y connaissant leur somme $x + y = K$ et le rapport de leurs sinus $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b}{c}$.

$$\text{Application} \left\{ \begin{array}{l} K = 145° 12' 40'', \\ \frac{b}{c} = \frac{4125}{3516}. \end{array} \right.$$

MONTPELLIER

— On donne les trois dimensions a, b, c, d'un parallélépipède rectangle, et l'on demande de trouver une quantité x telle que le parallélépipède rectangle, ayant pour dimensions $a+x$, $b+x$, $c+x$, ait une surface donnée S.

— Résoudre un triangle dont on connaît la surface et les angles.

CHAMBÉRY

— La hauteur AB d'un rectangle ABCD étant égale à 1 mètre, trouver une longueur DE, moindre que DC, telle que les volumes engendrés par le quadrilatère AEBC tournant 1° autour de AD; 2° autour de BC, soient dans le rapport de 26 à 19.

— Démontrer qu'un plan mené par deux arêtes opposées d'un parallélipipède oblique, partage ce parallélipipède en deux parties équivalentes.

BESANÇON

SESSION DE JUILLET 1886

— Conditions de sensibilité d'une balance.

— On donne deux droites AB, CD dans l'espace : trouver sur AB les points d'où l'on voit CD sous un angle droit. Expliquer et construire l'épure, en Géométrie descriptive, lorsque l'on donne les projections *(ab, a'b')*, *(cd, c'd')*, des deux droites données.

MARTINIQUE

— Démontrer que si une droite A et un plan M sont perpendiculaires à un plan P, la droite A et le plan M sont parallèles.

— O étant un cercle de rayon donné R, et AB un diamètre de ce cercle, déterminer la distance OI, de manière qu'en élevant IE perpendiculaire à AB et menant, en E, la tangente EF prolongée jusqu'à sa rencontre avec AB, on ait

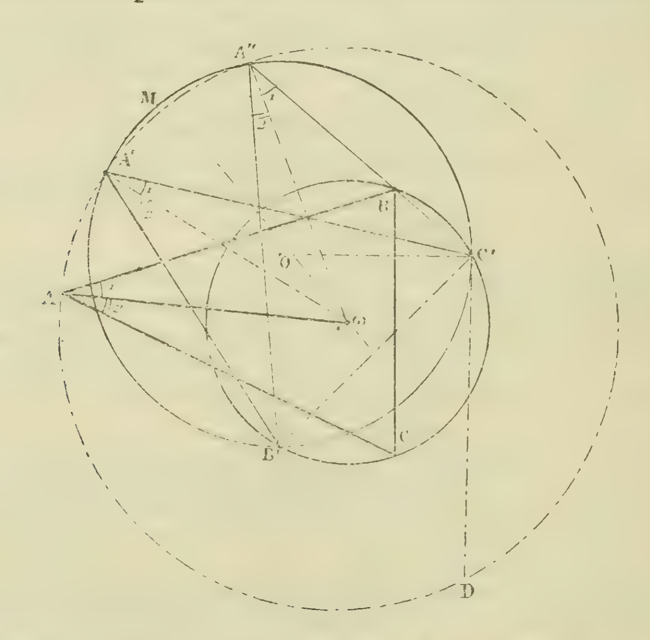
$$EF = EI + IB.$$

QUESTION 153

Solution par M. E. Bordage, professeur au Collège de Nantua.

Un angle constant BAC *tourne autour de son sommet fixe* A; *trouver la position de l'angle pour laquelle il intercepte, sur un cercle donné dans son plan, une corde de longueur connue.*

Supposons la question résolue. Soit BC la corde de lon-



gueur donnée : joignons le sommet A de l'angle au centre ω du cercle donné. Cette distance Aω est une quantité connue. On voit aussi que le sommet A de l'angle $\widehat{BAC}$ est situé sur le *segment capable* de l'angle $\widehat{BAC}$, décrit sur BC comme base. Nous déduisons de là une construction bien simple.

Nous prendrons une corde B'C' ayant une position quelconque mais qui soit égale à BC. Sur cette corde B'C', nous décrirons un segment capable de l'angle donné $\widehat{ABC}$. Soit B'MC' ce segment. De ω comme centre, avec un rayon égal à la distance Aω nous décrirons une circonférence. Supposons, pour le moment, que cette circonférence rencontre en A' et A" le *segment capable* de $\widehat{BAC}$ décrit sur B'C'. Joignons les points A', B', C' et A", B', C'. Les deux angles B'A'C', B'A"C', ainsi obtenus répondent à la question; car ils ont la grandeur donnée pour $\widehat{BAC}$; leur sommets sont à des distances égales à Aω. De plus, B'C' = BC.

Il ne reste plus qu'à faire tourner l'un des rayons ωA', ωA" autour du centre ω, jusqu'à ce que l'un des points A' ou A" soit venu coïncider avec A (ce qui revient à faire, de chaque côté de Aω, des angles 1 et $\widehat{2}$, respectivement égaux aux angles $\widehat{1}$ et $\widehat{2}$ en A' et A"). Le problème sera ainsi résolu.

Il y a deux solutions ou deux points A" quand la circonférence de rayon Aω coupe le segment capable ; une seule, quand cette circonférence est tangente au segment ; il n'y en a aucune, quand elle ne le rencontre pas.

QUESTION 200

Solution par M. Pangaut (Joseph), élève à l'Institut Sainte-Marie (Besançon).

Du point milieu D *du côté* BC *du triangle* ABC, *on élève la perpendiculaire* DEF *et on la prolonge jusqu'à sa rencontre avec les deux autres côtés* AB, AC, *aux points* F, E. *On pose* DE = a, DF = b *et angle* ABC = α *et on propose de démontrer que la surface du triangle* ABC *est donnée par la formule*

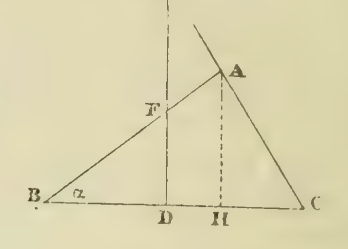
$$\frac{2ab^2 \cot g\, \alpha}{a + b}.$$

Montrer que si l'angle BAC *est droit, la surface* S *du triangle est exprimée par :*

$$\frac{2ab\sqrt{ab}}{a + b}.$$

(G. Russo).

1° Menons la hauteur AH $= h$. Les triangles semblables BFD et BAH, CAH, CED, donnent :



$$\frac{b}{h} = \frac{BD}{BH} \quad \text{et} \quad \frac{a}{h} = \frac{DC}{HC},$$

d'où

$$\frac{h-b}{b} = \frac{a-h}{a} = \frac{DH}{BD}.$$

On tire de là

$$h = \frac{2ab}{a+b},$$

et, par suite,

$$S = BD \times h = b \cot \alpha \times \frac{2ab}{a+b} = \frac{2ab^2 \cot \alpha}{a+b}.$$

2° Si $\widehat{BAC}$ est droit, on a toujours $h = \frac{2ab}{a+b}$. De plus, l'angle E est égal à α.

Par suite

$$BD = b \cot \alpha, \qquad DC = a \operatorname{tg} \alpha, \qquad BD = \sqrt{ab}\ ;$$

d'où, finalement,

$$S = \frac{2ab\sqrt{ab}}{a+b}.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. Henri Martin (lycée Condorcet Ignacio Beyens, à Cadix; Edmond Bordage, professeur au collège de Nantua; G. Bourdier (lycée de Grenoble); O. Pommès (collège de Condom) d'Hardiviller (collège de Beauvais); Henry Galopeau (lycée d'Angoulême); E. Quintard, à Arbois et X...

M. G. Russo, dans une note qu'il nous adresse, généralise, comme il suit, la question présente posée par lui :

« *Sur le côté* BC *du triangle* ABC *on prend le point* D *de telle sorte que*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}.$$

Par D, *on élève sur* BC *la perpendiculaire* DEF, *les points* F *et* E *étant les intersections de cette perpendiculaire avec les côtés* AB, AC. *Or, si l'on pose* $DE = a$, $DF = b$ *et* $ABC = \alpha$, *la surface* S *du triangle* ABC *est donnée par la formule :*

$$S = \frac{(m+n)^2 ab^2 \cot \alpha}{2m(am+bn)}.$$

Si l'angle A *est droit, cette relation devient*

$$S = \frac{(m+n)^2 ab\sqrt{abmn}}{2mn(am+bn)}.$$

QUESTION 203

Solution par M. J PANGAUT, élève à l'Institut de Sainte-Marie (Besançon).

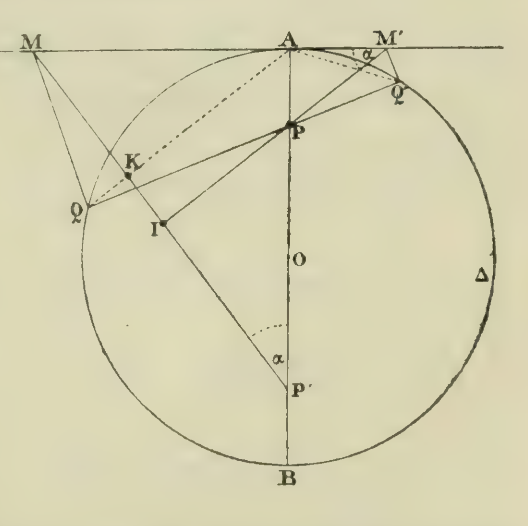
On donne un cercle Δ *et, à l'intérieur de ce cercle, un point fixe* P. *Soit* Δ' *une tangente fixe, perpendiculaire en* A *au diamètre qui passe par* P.

1° Autour de P, *on fait tourner une transversale qui rencontre* Δ *aux points* Q *et* Q'*; en ces points on élève à* QQ' *des perpendiculaires qui rencontrent* Δ' *aux points* M, M' *et l'on projette le point* M *sur* PM', *ou le point* M' *sur* PM.

Trouver le lieu décrit par ces projections.

2° On joint AQ *et* AQ' *et l'on projette* M' *sur* AQ', *ou* M *sur* AQ; *le lieu de ces projections est une circonférence tangente à* Δ *au point* A *et passant par le point* P', *symétrique de* P *par rapport au centre de* Δ (G. L.)

1° Prolongeons MI jusqu'à sa rencontre en P' avec le diamètre. Les triangles MP'A PAM', semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires, donnent :



$$\frac{AM}{AP'} = \frac{AP}{AM'},$$

ou $AM' \times AM' = AP \times AP'$.

Mais les quadrilatères semblables (*) APQM et APQ'M' donnent

$$AM \times AM' = PQ \times PQ' = AP \times PB$$

Donc $AP \times AP' = AP \times PB$

ou $AP' = PB$.

(*) Cette remarque est exacte et intéressante, mais elle ne nous semble pas évidente. On peut observer, pour établir la similitude en question : 1° que les triangles PM'Q', MPA sont semblables, 2° que les angles QMP = QAP, et APM' = AQ'M' sont égaux.

L'égalité des angles QAP, AQ'M' résulte, d'ailleurs, de ce que M'Q' rencontre Δ en un point, diamétralement opposé à Q. G. L.

Le point P′ est donc symétrique de P par rapport au centre et le lieu du point I est une circonférence de rayon OP et de centre O.

2° AQ est parallèle à IM′. En effet : $\widehat{AQP} = \widehat{M'AQ'}$, car ils ont même mesure. Or $\widehat{M'AQ'} = \widehat{IPQ}$.

Donc $\widehat{AQP} = \widehat{IPQ}$ et les droites AQ, IM′ sont parallèles.

Ainsi MP′ est perpendiculaire à AQ et le lieu du point K est une circonférence de diamètre AP; par conséquent tangente à Δ en A.

Nota. — Solutions diverses par MM. Léon Crabit (Lycée du Havre); Cotoni (Lycée d'Alger); Miniur (Ecole normale des Sciences de Gand); J. Moulet (Collège de Manosque); Henri Martin (Lycée Condorcet); Louis Prince (Lycée de Grenoble); E. Quintard, à Arbois; J. Chapron.

QUESTION 204

Solution par M. J. Pangaut, élève à l'Institut Sainte-Marie (Besançon).

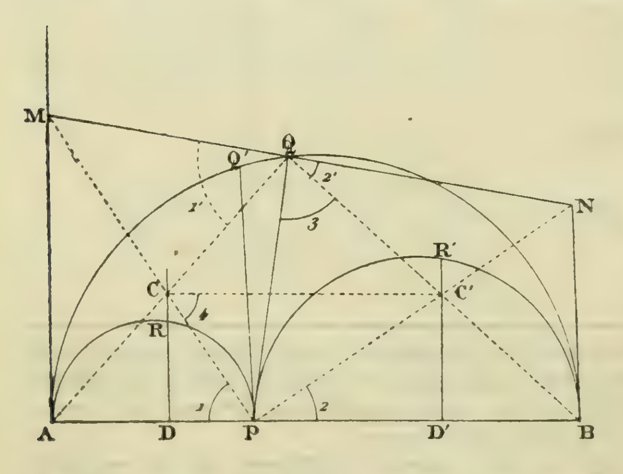
On considère un cercle et un diamètre AB, *un point* P *sur* AB *et les tangentes aux points* A *et* B. *Par* P *on mène une semi-droite mobile qui rencontre le cercle en* Q *et, par le point* Q *on trace une droite perpendiculaire à* PQ *qui rencontre les tangentes fixes en* M *et en* N. *Trouver le lieu décrit par le point de concours des diagonales : 1° du quadrilatère* APQM*; 2° du quadrilatère* PQBN ? (G. L)

Les quadrilatères APQM, PBQN sont inscriptibles; on a donc

$\widehat{1} = \widehat{1'}$, $\widehat{2} = \widehat{2'}$,

et, par suite,

MPN = AQB = 1^dr^.



Le quadrilatère PQCC′ est donc, lui aussi, inscriptible et l'on a $\widehat{4} = \widehat{3}$; mais $\widehat{1} = \widehat{3}$ parce que ces angles ont pour compléments les angles égaux $\widehat{2}$ et $\widehat{2'}$. Ainsi $\widehat{1} = \widehat{4}$; donc CC′ est parallèle à AB.

D'après cela, le lieu du point C est une ellipse de petit axe h, dont le grand axe, perpendiculaire au milieu de AP, est égal à $\sqrt{h.h'} = PQ'$.

Posons $AP = h$, $PB = h'$ et décrivons les demi-circonférences de diamètre h et h'. Puis menons C'D' et CD perpendiculaires sur AB. Les triangles ACD et CDP semblables respectivement à BC'D' et à PC'D' donnent:

$$AD \times D'B = DP \times PD' = \overline{CD}^2 = \overline{C'D'}^2.$$

d'où
$$\frac{AD}{PD'} = \frac{PD}{D'B} = \frac{AD + PD}{PD' + D'B} = \frac{h}{h'}.$$

D'autre part

$$\frac{\overline{CD}^2}{\overline{RD}^2} = \frac{DP \times PD'}{DP \times AD} = \frac{PD'}{AD} = \frac{h'}{h},$$

Donc
$$\frac{CD}{RD} = \frac{\sqrt{h.h'}}{h}.$$

On peut appliquer, sans démonstration nouvelle, ce résultat au lieu décrit par le point C'; ce lieu est une ellipse dont les axes sont égaux : l'un, à h'; l'autre, à $\sqrt{hh'}$.

Nota. — Solutions diverses par MM. Rogier (lycée de Marseille); Minuir (école normale de sciences de Gand); Henri Martin (lycée Condorcet); Bécla (collège de Beauvais); D. Cotoni (lycée d'Alger); J. Chapron, à Bragelogne; A. Troille (lycée de Grenoble); E. Quintard, à Arbois.

QUESTION 205

Solution par M. l'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy.

Résoudre l'équation

$$a(a + x)(a + 2x)(a + 3x) = b(b + x)(b + 2x)(b + 3x).$$

(G. L.)

On a successivement :

$$(a^2 + 3ax)(a^2 + 3ax + 2x^2) = (b^2 + 3bx)(b^2 + 3bx + 2x^2),$$
$$(a^2 + 3ax)^2 + 2x^2(a^2 + 3ax) = (b^2 + 3bx)^2 + 2x^2(b^2 + 3bx),$$
$$(a^2 + 3ax)^2 - (b^2 + 3bx)^2 + 2x^2[(a^2 + 3ax) - (b^2 + 3bx)] = 0,$$
$$[(a^2 + 3ax) - (b^2 + 3bx)][(a^2 + 3ax) + (b^2 + 3bx) + 2x^2] = 0,$$
$$(a - b)(3x + a + b)[2x^2 + 3x(a + b) + a^2 + b^2] = 0, \text{ etc.}$$

Nota. — Solutions analogues par MM. J. Chapron, à Bragelogne; Boutin, professeur au collège de Vire; Ignacio Beyens, à Cadix; Rogier (lycée de Marseille); Henri Martin (lycée Condorcet); J. Moulet, au collège de Manosque; Léon Crabit (lycée du Havre); A. Troille (lycée de Grenoble); Bécla (collège de Beauvais); Paul Bourgarel, à Antibes; Couvert (lycée Condorcet); E. Quintard, à Arbois; Henry Galopeau, (Lycée d'Angoulême).

Une copie, non signée, porte une remarque intéressante, généralisant la question posée.

L'auteur observe, avec raison, que l'équation

$$a(a+px)(a+qx)(a+\overline{p+q}x)=b(b+px)(b+qx)(b+\overline{p+q}x),$$

est aussi quadratique; elle se décompose en deux facteurs, en suivant la méthode indiquée ci-dessus.

En ajoutant $\frac{p^2q^2}{4}x^4$ aux deux membres, ceux-ci deviennent des carrés parfaits. La décomposition de l'équation proposée, en deux autres, est ainsi rendue manifeste; mais cette méthode, plus rapide, est moins naturelle que celle qu'on vient de lire. G. L.

QUESTION 206

Solution par M. Ignacio Beyens, capitaine du Génie à Cadix.

Démontrer que si les côtés b, c *d'un triangle et l'angle compris* A *vérifient la relation*

$$b = 4c\cos\left(30^\circ + \frac{A}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{A}{2}\right): \qquad (1)$$

1° L'angle A *est le double de* C*;*

2° Les côtés a, b, c *vérifient l'égàlité*

$$a^2 = c(b + c). \qquad (2)$$

On pourra déduire (par des considérations géométriques) cette seconde propriété de la précédente. (G. L.)

1° La relation (1) donne, successivement,

$$b = 2c(\cos 60 + \cos A)$$

$$b = c(1 + 2\cos A) \qquad (3)$$

$$\sin B = \sin(A + C) = \sin C(1 + 2\cos A)$$

$$\sin(A - C) = \sin C.$$

Les grandeurs A, B, C représentant les angles d'un triangle, l'égalité précédente ne peut être vérifiée qu'en supposant

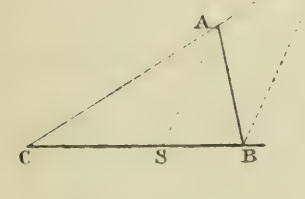
$$A - C = C, \qquad \text{ou} \qquad A = 2C.$$

2° La relation (3) peut s'écrire, par application d'une formule connue,

$$b = c + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b},$$

ou
$$a^2 = c(b + c).$$

Autrement. — Soit ABC un triangle tel que l'angle $A = 2c$; si l'on mène la bissectrice AS de l'angle CAB et la droite BD parallèle à AS, on a, évidemment AB=AD et BD=BC. D'ailleurs, les triangles semblables CBD, BAD, donnent :



$$\frac{BA}{BD} = \frac{BD}{CD} = \frac{BD}{CA + AB},$$

ou
$$\frac{c}{a} = \frac{a}{b + c},$$

relation qu'il s'agissait d'établir et qui, comme l'on voit, appartient à tous les triangles dans lesquels un angle A est double d'un autre angle C.

Les réciproques sont vraies et s'établissent facilement.

Nota. — Solutions diverses par MM. : Moulet (collège de Manosque); Beclu (collège de Beauvais); G. Russo, à Catanzaro; Joseph Pangaut (institut Sainte-Marie, Besançon); Troille (lycée de Grenoble); Miniur (école normale des sciences à Gand); Caitucoli, à Sisteron; Edmond Bordage, professeur au collège de Nantua; J. Chapron, à Bragelogne; P. Bourgarel, à Antibes; D. Cotoni (lycée d'Alger); l'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique); Ch. Martin (lycée Condorcet); Regis Frilley (pensionnat des Maristes, Plaisance); Louis Prince (lycée de Grenoble); Couvert (lycée Condorcet); Henry Galopeau, à Beaulieu, et X... (*).

QUESTION 208

Solution par M. J. Moulet.

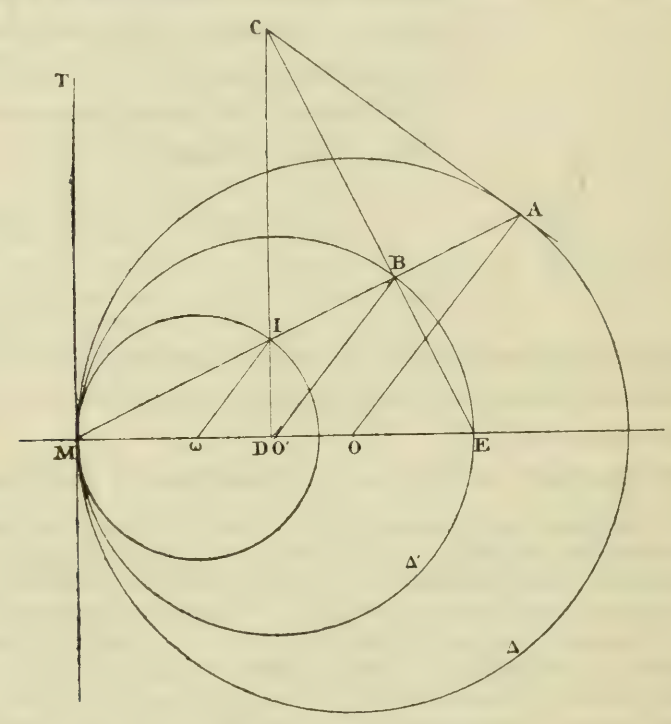
Soient deux cercles Δ, Δ' *tangents au point* M; *par* M, *on mène une transversale mobile qui rencontre* Δ *en* A *et* Δ' *en* B, *La perpendiculaire élevée à* AB, *au point* B, *et la tangente à* Δ *en* A *se coupent en un point* C; *si, du point* C, *on abaisse une*

(*) Les correspondants qui nous adressent, simultanément, les solutions de plusieurs questions, sont priés de signer chacune d'elles.

perpendiculaire sur la ligne des centres, on obtient une droite qui rencontre AB *en* I.

Le lieu du point I *est une circonférence.* (G. L.)

Joignons O′B, OA. Ces deux lignes sont parallèles, et les angles MO′B, MOA sont égaux ; leurs moitiés, c'est-à-dire CAB,



BEM sont aussi des angles égaux.

Or CIB = BEM.

Donc CAB = CIB ;

enfin, le triangle ICB est isoscèle, par suite IB = BA.

Cela posé, par I menons Iω parallèle à O′B, le point ω est le symétrique de O par rapport à O′. MωI est un triangle isocèle puisqu'il est semblable à MO′B.

$$\omega M = \omega I.$$

Le lieu de I est la circonférence décrite, de ω comme centre, avec ωM comme rayon.

Nota. — Solutions analogues par MM. Vigarié; Joseph Pangaut (institut Sainte-Marie, à Besançon); Ménétrier (collège de Châlon-sur-Saône); A. Couvert (lycée Condorcet); Troille (lycée de Grenoble); J. Chapron, à Bragelogne; Ignacio Beyens, à Cadix; Henri Martin (lycée Condorcet); E. Quintard, à Arbois; Auguste Boutin, professeur au collège de Courdemanche (Sarthe), et X...

QUESTION 210

Solution, par M. Auguste Boutin, professeur au Collège de Courdemanche.

A, B, C *étant les angles d'un triangle, démontrer :*

1° *Que*

$$2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{4}+\operatorname{cotg}\frac{A}{4}\right)-\operatorname{cotg}\frac{A}{4}\left(1-\operatorname{tg}\frac{A}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{B}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{C}{4}\right)$$

conserve la même valeur, quand on permute les lettres A, B, C.

2° *Mettre sous forme symétrique la valeur commune aux trois quantités que l'on peut ainsi former.* (E. Catalan.)

La solution du second paragraphe, démontre la proposition énoncée dans le premier. Résolvons cette seconde question.

Soit E l'expression considérée; si on la développe, elle devient

$$\begin{aligned}E = {} & 2\operatorname{tg}\frac{A}{4}+\operatorname{cotg}\frac{A}{4}+\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\operatorname{tg}\frac{C}{4} \qquad (1)\\ & +\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}-\operatorname{cotg}\frac{A}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\operatorname{tg}\frac{C}{4}+\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}\right).\end{aligned}$$

D'ailleurs A, B, C étant les angles d'un triangle

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{4}+\frac{B}{4}+\frac{C}{4}\right)=\operatorname{tg}45^\circ=1=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{4}+\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\operatorname{tg}\frac{C}{4}-\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}-\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}-\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}},$$

relation qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned}0 = {} & 1+\operatorname{cotg}\frac{A}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\operatorname{tg}\frac{C}{4}+\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}\right) \qquad (2)\\ & +\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\operatorname{tg}\frac{C}{4}-\operatorname{cotg}\frac{A}{4}-\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}.\end{aligned}$$

Ajoutant (1) et (2), membre à membre, il vient

$$E = 1+2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{4}+\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\operatorname{tg}\frac{C}{4}\right).$$

Nota. — Solution analogue par M. E. Quintard, à Arbois.

QUESTIONS PROPOSÉES

265. — Si quatre points A, C, B, D rangés sur une droite, dans l'ordre indiqué par les lettres, sont conjugués harmoniques ; O désignant le milieu de CD, on a

$$OB.AC.AD = OA.BC.BD \qquad (G.\ L.)$$

266. — Résoudre l'équation

$$(ax^2 + bx + c)^2 = x^2(Ax^2 + bx + c)$$

en supposant, bien entendu,

$$A - a \neq 0. \qquad (G.\ L.)$$

267. — Démontrer que l'on a

$$\left.\begin{array}{l} \sin a \sin(b-c)\sin(b+c-a) \\ +\sin b \sin(c-a)\sin(c+a-b) \\ +\sin c \sin(a-b)\sin(a+b-c) \end{array}\right\} = 2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).$$

et, aussi,

$$\left.\begin{array}{l} \cos a \sin(b-c)\cos(b+c-a) \\ +\cos b \sin(c-a)\cos(c+a-b) \\ +\cos c \sin(a-b)\cos(a+b-c) \end{array}\right\} = 2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).$$

(Question empruntée à la publication *Zeitschr. f. Mathem. u. Naturw.*)

Nota. — Les questions 239 et 262, dont les énoncés sont presque identiques, doivent être considérées comme ne formant qu'un seul exercice.

La question 234 (*Journal*, 1886. p. 264) se trouve déjà résolue, à la page 81 du journal, année 1879. Nous considérons donc, après cette indication qui nous a été fournie par M. Galopeau, cette question comme résolue.

Errata. — 1° Page 7, ligne 23

au lieu de $c = \sqrt[3]{a^2 + b}$,

lisez $c = \sqrt[3]{a^2 - b}$.

2° Supprimez le nota de la page 240 ; la propriété signalée n'est vraie qu'avec certaines restrictions, comme nous l'a fait remarquer M. Boutin.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 19606-7.

NOTE SUR LA STROPHOÏDE OBLIQUE

Par M. **Lebel**,
étudiant à la Faculté des Sciences de Marseille.

Les propriétés de la strophoïde droite, mentionnées dans la Note publiée par le *Journal de Mathématiques spéciales* (juillet-août 1886) subsistent, sauf de légères modifications, pour la strophoïde oblique.

Dans ce qui suit, nous appellerons, pour abréger, *points conjugués*, deux points M_1, M_2 de la strophoïde, équidistants de Oy et situés de part et d'autre de Ox.

1. *Les tangentes menées à la strophoïde, en deux points conjugués* M_1, M_2 *se rencontrent sur la courbe.*

En vertu du théorème de Mac-Laurin, si trois points d'une courbe du troisième degré sont en ligne droite, leurs points tangentiels sont en ligne droite.

Considérons le point M_1 et le second point M_3 situé sur la traversale AM_1. En menant M_3M_2 parallèle à Oy, on rencontrera le point M_2, conjugué de M_1; car la droite M_3M_2 et le point M_1 sont équidistants de Oy.

On sait que la tangente en A passe au point V où la strophoïde coupe son asymptote. Si l'on trace

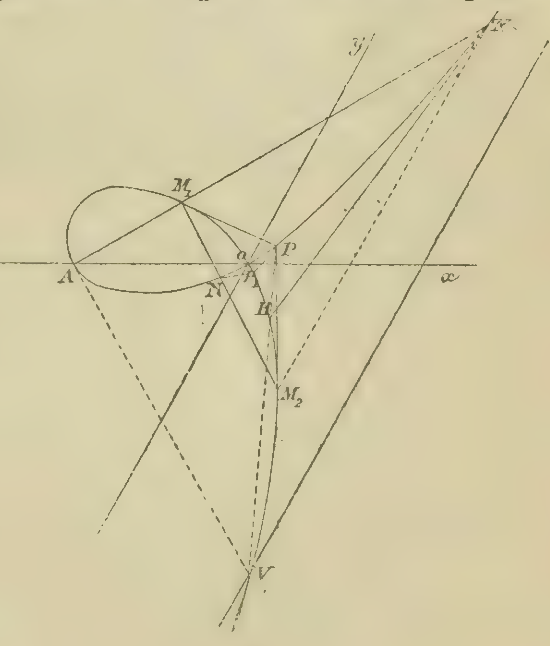


Fig. 1.

M_3H tangente en M_3, la droite VH est la droite de Mac-Laurin, relative à AM_1; elle coupe la strophoïde en un troisième point P qui est le point tangentiel de M_1.

Si l'on considère M_2M_3, cette droite coupe la courbe en un point rejeté à l'infini, dont V est le point tangentiel. Le point tangentiel de M_3 étant H, la droite VH est encore la droite de Mac-Laurin relativeà M_2 M_3 ; le point P sera aussi le point tangentiel de M_2. Les tangentes en M_1 et M_2 se rencontreront donc au point P.

2. — *Réciproquement, si par un point* P *de la courbe, on lui mène deux tangentes* PM_1, PM_2, *les points de contact sont conjugués.*

En effet, on peut faire varier M_1 de manière que P soit un point quelconque de la courbe.

3. — Cherchons la droite des points tangentiels relative à M_1M_2. Laissons M_1 fixe, et déplaçons M_2 infiniment peu ; son nouveau point tangentiel P′ sera infiniment voisin de P. La droite PP′, qui a pour limite la tangente en P, sera la droite cherchée.

Cela posé, on vérifie aisément que les trois côtés du triangle M_1PM_2 ont, pour commune droite des points tangentiels, la tangente PP_1 au point P. Si donc N est le troisième point d'intersection de M_1M_2 avec la courbe, la tangente en N passe en P_1, point tangentiel de P.

Ainsi P *et* N *sont des points conjugués.*

4. — *Si deux points* M_1M_2 *sont conjugués,* Ox *est bissectrice de l'angle* M_1AM_2.

En effet, considérons le deuxième point M_3, situé sur la

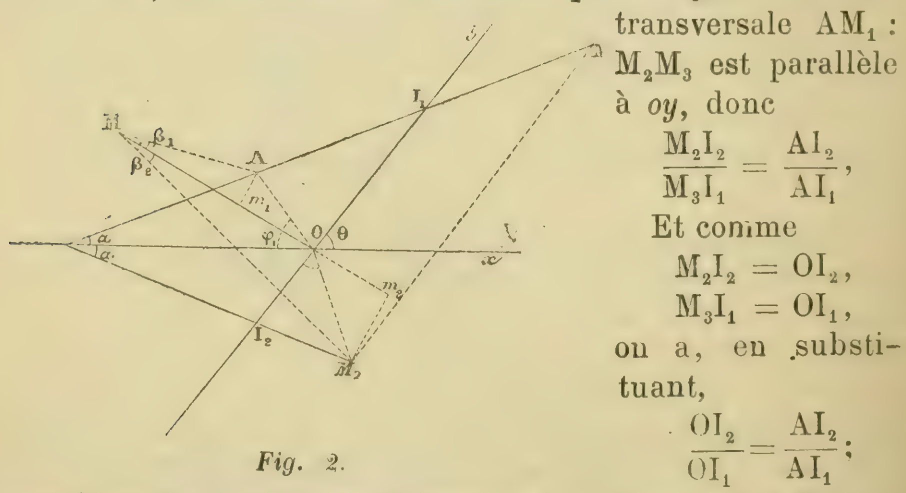


Fig. 2.

transversale AM_1 : M_2M_3 est parallèle à *oy*, donc

$$\frac{M_2I_2}{M_3I_1} = \frac{AI_2}{AI_1},$$

Et comme

$$M_2I_2 = OI_2,$$
$$M_3I_1 = OI_1,$$

on a, en substituant,

$$\frac{OI_2}{OI_1} = \frac{AI_2}{AI_1};$$

ce qui montre que Ox est bissectrice de l'angle M_1AM_2.

Nous désignerons par α les angles égaux en A.

5. — *Si* M_1 *et* M_2 *sont deux points conjugués, l'angle de* OM_1 *avec* Ox *est le même que l'angle de* OM_2 *avec* Oy.

En désignant par θ l'angle xoy, posons

$$AOM_1 = \varphi_1, \qquad I_2OM_2 = \varphi_2.$$

Considérons le triangle isocèle OI_2M_2

$$\varphi_2 = \frac{AI_2O}{2} = \frac{180^\circ - \theta - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\theta + \alpha}{2}.$$

Dans le triangle isocèle OI_1M_1, l'angle en I_1 égale $\theta - \alpha$, et l'on a :

$$\frac{1}{2}OM_1I_1 = \frac{180^\circ - I_1}{2} = 90^\circ - \frac{\theta - \alpha}{2};$$

ce qu'on peut écrire :

$$\alpha + \varphi_1 = 90^\circ - \frac{\theta - \alpha}{2},$$

$$\varphi_1 = 90^\circ - \frac{\theta + \alpha}{2}.$$

Donc on a bien, $\qquad \varphi_1 = \varphi_2.$

Réciproquement, *si* $\varphi_1 = \varphi_2$, *les points* M_1, M_2 *sont conjugués*. Car l'angle φ_2 ne définissant qu'un point M_2 de la courbe, le point conjugué de M_1, qui vérifie la relation précédente, ne peut être que M_2.

6. — *Les distances de deux points conjugués, au point double, sont vues, de tous les points de la strophoïde, sous des angles égaux.*

Prenons le point O comme pôle et Ox comme axe polaire : l'équation de la strophoïde sera :

$$\rho = a\frac{\sin(2\omega - \theta)}{\sin(\theta - \omega)}.$$

Calculons les rayons vecteurs $OM_1 = \rho_1$, $OM_2 = \rho_2$, des deux points conjugués. Si ω_1, ω_2 sont leurs angles polaires,

$$\omega_1 = \pi - \varphi_1 = \pi - \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\theta + \alpha}{2}\right] = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta + \alpha}{2},$$

$$\omega_2 = \pi + \theta + \varphi_2 = \pi + \theta + \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\theta + \alpha}{2}\right] = 3\frac{\pi}{2} + \frac{\theta - \alpha}{2}.$$

Donc :

$$\rho_1 = a \frac{\sin(\pi + \theta + \alpha - \theta)}{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2} - \frac{\theta + \alpha}{2}\right)} = a \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\theta - \alpha}{2}},$$

$$\rho_2 = a \frac{\sin(3\pi + \theta - \alpha - \theta)}{\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2} - \frac{\theta - \alpha}{2}\right)} = a \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\theta + \alpha}{2}}.$$

Soit maintenant un point M (ρ, ω) de la strophoïde. Calculons les angles β_1, β_2 sous lesquels on voit, de ce point, les rayons vecteurs OM_1 OM_2. Projetons M_1 et M_2 en m_1 et m_2, sur OM :

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{M_1 m_1}{OM - Om_1} = \frac{\rho_1 \sin(\omega - \omega_1)}{\rho - \rho_1 \cos(\omega - \omega_1)},$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{M_2 m_2}{OM_1 + Om_2} = \frac{\rho_2 \sin(\omega_2 - \omega)}{\rho - \rho_2 \cos(\omega_2 - \omega)}.$$

Si β_1, β_2 sont égaux,

$$\frac{\rho_1 \sin(\omega - \omega_1)}{\rho - \rho_1 \cos(\omega - \omega_1)} = \frac{\rho_2 \sin(\omega_2 - \omega)}{\rho - \rho_2 \cos(\omega_2 - \omega)},$$

ou $\rho[\rho_2 \sin(\omega - \omega_1) - \rho_2 \sin(\omega_2 - \omega)]$

$$= \rho_1\rho_2[\sin(\omega - \omega_1)\cos(\omega_2 - \omega) - \cos(\omega - \omega_1)\sin(\omega_2 - \omega)]$$

$$\rho\left[\frac{\sin(\omega - \omega_1)}{\rho_2} - \frac{(\sin \omega_2 - \omega)}{\rho_1}\right] = \sin(2\omega - \omega_1 - \omega_2),$$

$$\frac{\rho}{a \sin \alpha}\left[\sin(\omega - \omega_1) \cos\frac{\theta - \alpha}{2} - \sin(\omega_2 - \omega)\cos\frac{\theta + \alpha}{2}\right]$$

$$= \sin(2\omega - \theta),$$

$$\frac{\rho}{a \sin \alpha}\left[-\cos\left(\omega - \frac{\theta + \alpha}{2}\right)\cos\frac{\theta + \alpha}{2} + \cos\left(\omega - \frac{\theta + \alpha}{2}\right)\cos\frac{\theta - \alpha}{2}\right]$$

$$= \sin(2\omega - \theta),$$

$$\frac{\rho}{2a \sin \alpha}[-\cos\omega - \cos(\omega - \theta - \alpha) + \cos\omega + \cos(\omega - \theta + \alpha)]$$

$$= \sin(2\omega - \theta) - \frac{\rho}{a \sin \alpha}\sin(\omega - \theta)\sin\alpha = \sin(2\omega - \theta),$$

$$\rho = a \frac{\sin(2\omega - \theta)}{\sin(\theta - \omega)}.$$

Cette condition est vérifiée, puisque le point M appartient à la strophoïde.

7. — *La tangente en un point* M_1, *et la droite* M_1M_2 *qui le joint à son conjugué, sont symétriques par rapport au rayon* OM_1.

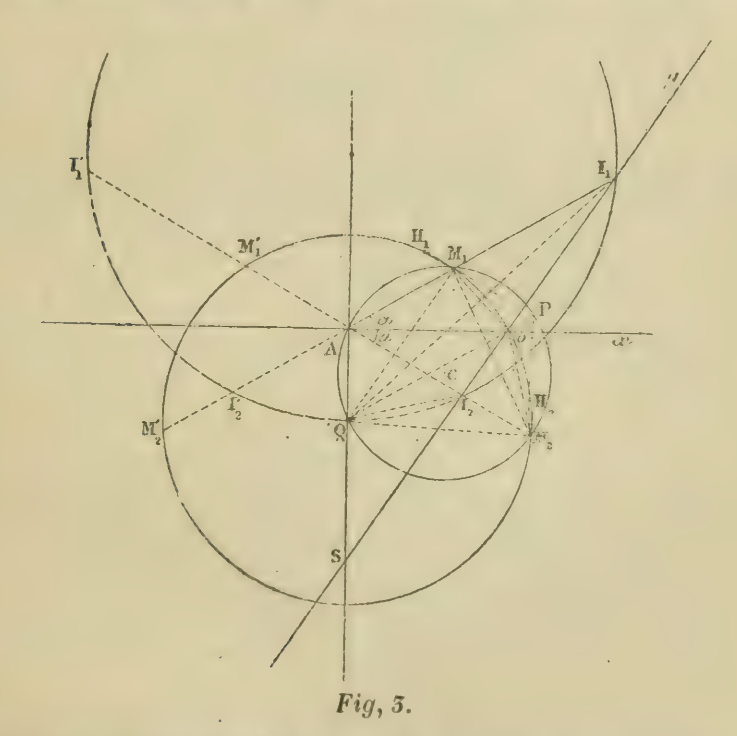
Si l'on imagine que M vienne se confondre avec M_1, la droite MM_1 devient la tangente en M_1 ; la droite MM_2 devient M_1M_2. Les angles β_1, β_2 ne cessent pas d'être égaux.

8. — *Si l'on mène, par un point* P *de la strophoïde, deux tangentes* PM_1, PM_2 *à la courbe, le point double est le centre du cercle inscrit au triangle* M_1PM_2.

En effet, d'après la remarque précédente, les bissectrices des angles M_1, M_2 passent au point double.

9. — *Le lieu des centres des cercles passant par le point double et deux points conjugués, est la perpendiculaire élevée sur* Ox *au point* A.

Soient toujours I_1, I_2 les intersections de AM_1, AM_2 avec Oy. Faisons passer, par I_1 et I_2, une circonférence ayant son centre



Fig, 3.

sur la perpendiculaire AS à Ox ; soit Q le point d'intersection de cette circonférence avec AS, le plus rapproché de I_2. Traçons

QI_1, QI_2, et prolongeons I_1A, I_2A, jusqu'à leur second point de rencontre avec le cercle. On obtient ainsi des points I'_1, I'_2 symétriques de I_1 et I_2 par rapport à AS. Les angles QI_1I_2 et $QI_1I'_2$ sont égaux comme mesurés par des arcs égaux ; il en est de même des angles QI_2A et QI_2S. Les bissectrices des angles AI_1S et AI_2S se coupent donc au point Q. Or M_1 et M_2 sont les symétriques de O, par rapport à ces bissectrices ; donc Q est le centre du cercle passant par les trois points M_1, O, M_2.

10. — P étant le point tangentiel de M_1 et de M_2, la tangente PM_2 coupe le cercle Q en un point H_2 tel, que les arcs OH_2, OM_1 sont égaux, puisque la bissectrice de l'angle $H_2M_2M_1$ passe en O. M_1 et H_2 sont symétriques par rapport à QO. De même, le symétrique de M_2 est le point H_1, situé sur PM_1. Les droites PM_1, PM_2 sont donc symétriques par rapport à QO. Elles le sont aussi par rapport à OP (8) ; donc OP et OQ se confondent.

Ainsi, OP *passe au point* Q.

11. — *Les quatre points* A M_1 M_2 Q *sont sur un même cercle.*

L'angle M_1AM_2 a pour mesure, sur le cercle Q, la demi-somme des arcs M_1M_2, $M_1'M_2'$. Or, ces arcs sont symétriques et égaux ; l'angle est donc mesuré par M_1M_2 ; cet arc est aussi la mesure de l'angle M_1QM_2.

Le cercle C circonscrit au triangle M_1AM_2 passera donc par le point Q.

12. — *Le cercle* Q *passe par le point* P.

La somme des angles OM_1M_2, OM_2M_1 est mesurée, sur le cercle Q, par la moitié de l'arc M_1M_2 ; la somme des angles PM_1M_2, PM_2M_1, qui est double de la précédente (7) est donc égale à 2α. L'angle M_1PM_2 est supplémentaire de l'angle 2α ; donc le quadrilatère AM_1PM_2 est inscriptible au cercle C.

Ainsi, *les cinq points* A, M_1, M_2, P, Q *sont sur une même circonférence.*

13. — *Le point de contact, sur M_1M_2, du cercle inscrit au triangle M_1PM_2, est le conjugué de P.*

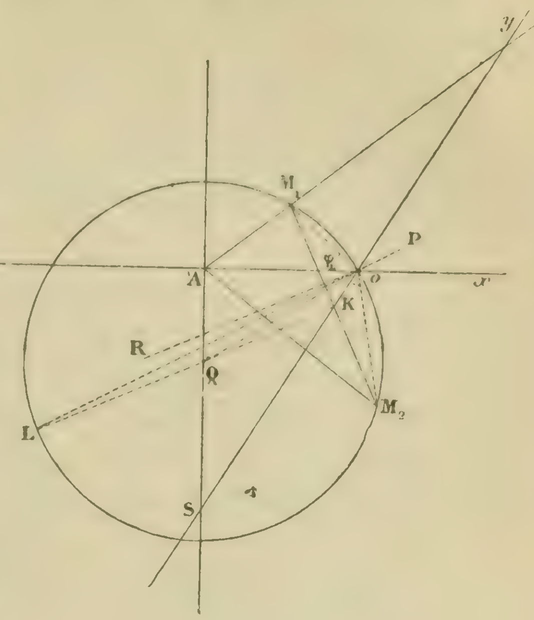


Fig. 4.

Le milieu K de M_1M_2 étant sur Oy, la droite QK est perpendiculaire sur M_1M_2; cette droite et la bissectrice de l'angle M_1OM_2, sur le cercle Q se démontrent, en un point L, milieu de l'arc M_1LM_2. La perpendiculaire OR abaissée de O sur M_1M_2, est parallèle à QK; les angles LOR, OLQ sont égaux comme alternes-internes; et, comme le triangle OLQ est isoscèle,

$$OLQ = QOL;$$

d'où

$$LOR = QOL.$$

Les droites OR, OL sont symétriques par rapport à OL. Or en vertu de l'égalité des angles φ_1 et φ_2, OL est bissectrice de l'angle AOS, et l'on a

$$ROA = QOS,$$
$$ROA = xOP.$$

L'égalité de ces angles montre (5) que OR passe par le point conjugué de P. On a vu que ce point (2) est situé sur M_1M_2; il est donc l'intersection de M_1M_2 et de OR, ou la projection de O sur M_1M_2.

14. — *La droite M_1M_2 enveloppe une parabole.*

C'est la podaire négative de la strophoïde, par rapport à son point double.

APPLICATIONS.

Les remarques précédentes permettent de résoudre, de différentes manières, les problèmes suivants :

— *Mener la tangente en un point de la strophoïde oblique*;

— *Mener par un point de la strophoïde les autres tangentes à la courbe.*

On pourra procéder comme il suit :

I. *Première méthode.* — Pour mener la tangente en un point M_1, situé sur une transversale AM_1, on déterminera le point conjugué M_2, situé sur la symétrique de AM_1 ; on construira le cercle O tangent à M_1M_2, et on lui mènera, par M_1, une seconde tangente M_1P, laquelle sera la tangente cherchée (8). Autrement dit, on construira la symétrique de M_1M_2 par rapport à OM_1 (7).

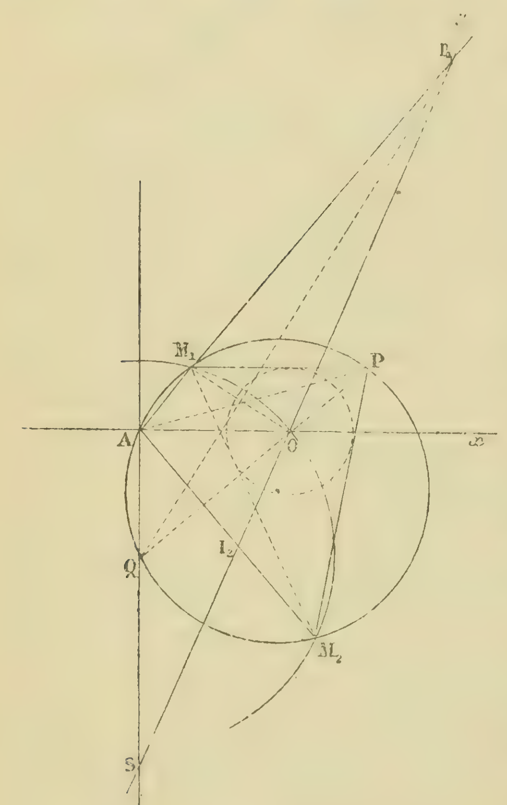


Fig. 5.

Seconde méthode. — On déterminera le centre Q par la bissectrice de l'angle AI_1O_1 et, l'on cherchera l'intersection P de QO avec la strophoïde.

La construction devient d'une facilité remarquable dans le cas de la *strophoïde droite*. Alors le triangle QAI_1 est isoscèle, ainsi que le triangle QAP. Il suffit de décrire, de A comme centre, une circonférence passant par I_1, laquelle détermine Q et ensuite P, par son intersection avec QO.

II. *Première méthode.* — Étant donné le point P, on déterminera son conjugué N ; on décrira, de O comme centre, avec ON pour rayon, un cercle auquel on mènera par P deux tangentes. La tangente en N, à ce cercle, sera (13) la droite M_1M_2 qui coupera ces tangentes aux points de contacts.

Seconde méthode. — On tracera la droite POQ ; on décrira le cercle Q passant par O, puis le cercle C circonscrit au triangle PAQ. Les points communs à ces deux cercles sont les points de contact M_1, M_2.

QUESTIONS D'EXAMEN

25. — *On coupe l'ellipsoïde par des plans* P, *passant par le centre* O *de la surface; au point* O, *on élève, à* P, *une perpendiculaire, sur laquelle on prend une longueur* OI, *proportionnelle à l'aire de la section considérée; trouver le lieu décrit par* I.

On sait (*C. de M. S.*, t. III, p. 237) que la grandeur des axes de la section centrale faite dans l'ellipsoïde, par le plan qui correspond à l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

est donnée par l'égalité

$$\frac{a^2\alpha^2}{a^2 - R^2} + \frac{b^2\beta^2}{b^2 - R^2} + \frac{c^2\gamma^2}{c^2 - R^2} = 0,$$

laquelle, sous forme entière, s'écrit encore

$$\Sigma a^2\alpha^2(R^2 - b^2)(R^2 - c^2) = 0,$$

Le carré du produit des demi axes est donc

$$\frac{a^2b^2c^2}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2},$$

en supposant $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$

Finalement, le lieu est un ellipsoïde, ayant pour équation

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = h^4,$$

h désignant une constante donnée.

QUESTIONS ÉNONCÉES

DÉTERMINANTS

1. — Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$

On peut remarquer, *a priori*, que Δ est divisible par

$$(a-b)(b-c)(c-a);$$

puis l'on pose :

$$\Delta = H(a-b)(b-c)(c-a).$$

Pour déterminer H, on observe que Δ est une forme homogène, du quatrième degré, symétrique relativement aux lettres a, b, c. D'après cela, H est une forme symétrique linéaire. Ecrivons donc :

$$\Delta_1 = K(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

Enfin l'examen du terme principal bc^3, prouve que $K = 1$.

Finalement, on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

On pourra, par des considérations de même nature, développer les déterminants suivants. Cet exercice, et quelques-uns des exemples qui suivent, se trouvent dans le *Traité élémentaire des déterminants*, par M. Leboulleux (Librairie Delagrave).

2. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & b & c \\ 1 & a & -b & c \\ 1 & a & b & -c \end{vmatrix} = abc\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right).$$

3. $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + 1\right).$$

4. $$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = -a(a-b)(b-c)(c-a).$$

5. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d).$$

6. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

7. $$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ba & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$$

8. $$\begin{vmatrix} x & x^2 & (1+x^2)(ax+b) \\ y & y^2 & (1+y^2)(ay+b) \\ z & z^2 & (1+z^2)(az+b) \end{vmatrix} = (axyz+b)(x-y)(y-z)(z-x).$$

On décomposera ce déterminant en deux déterminants du troisième ordre, en observant que la troisième colonne peut être écrite ainsi :

$$\begin{matrix} (1+x^2)ax + b(1+x^2) \\ (1+y^2)ay + b(1+y^2) \\ (1+z^2)az + b(1+z^2) \end{matrix}$$

9. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos 2a & \cos 2b & \cos 2c \end{vmatrix} = 2(\cos a - \cos b)(\cos b - \cos c)(\cos c - \cos a)$$

On pourra généraliser cet exercice et chercher le développement du déterminant :

$$\begin{vmatrix} \cos na & \cos nb & \ldots & \cos nl \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos a & \cos b & \ldots & \cos l \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

lequel, avec plusieurs autres, a été considéré par M. Fouret (*Comptes Rendus*, 2 décembre 1884). A une constante près, ce déterminant est égal à la fonction factorielle :

$$\Pi(\cos a - \cos b).$$

Voyez, à ce propos, le *Bulletin de la Société Mathématique de France;* 1884-85, p. 15.

EXERCICES ÉCRITS

5. — D'un point M, mobile sur une strophoïde droite S, on peut mener à cette courbe deux tangentes, en faisant abstraction de celle qui a son point de contact en M.

Soient T, T′ les points de contact de ces deux tangentes. Trouver :

1° La condition pour que MT soit réelle ;

2° Le lieu décrit par le milieu de TT′ ;

3° L'enveloppe de TT′ ;

4° Le lieu décrit par le centre du cercle circonscrit au triangle MTT′, et l'enveloppe de ce cercle.

(*Bernheim*, élève au lycée de Besançon).

Notes sur l'exercice 4.

1° On sait (*) que le cercle Γ qui passe par les pieds des trois normales issues du point (α, β) à la parabole représentée par $y^2 - 2px = 0$ (axes rectangulaires) a pour équation:

$$x^2 + y^2 - (\alpha + p)x - \frac{\beta y}{2} = 0.$$

On trouve ainsi, pour le lieu de I,

$$(x + p)x_0 + \frac{yy_0}{2} - x_0^2 - y_0^2 = 0. \qquad (\Delta)$$

En écrivant cette équation sous la forme:

$$x_0(x_0 - p - x) = y_0\left(\frac{y}{2} - y_0\right),$$

on met deux solutions en évidence:

$$x = x_0 - p, \quad \text{et} \quad x + p - x_0 = y_0,$$
$$y = 2y_0; \qquad \frac{y}{2} - y_0 + x_0 = 0,$$

On peut aussi, pour déterminer Δ, observer que cette droite est parallèle à celle qui joint l'origine au point $\left(x = -\frac{y_0}{2}, \quad y = x_0\right)$.

2° On trouve l'ellipse correspondant à l'équation:

$$(x + p)^2 + \frac{1}{4}y^2 = R^2.$$

3° Le lieu demandé est une cubique dont l'équation est:

$$y^2(p + 8x) = 8x^2(p - x).$$

Cette cubique a la forme d'une branche strophoïdale; le point le plus haut du *folium*, sauf erreur, correspond à $x = p\dfrac{5 + \sqrt{153}}{32}$.

4° La conique U est une hyperbole, dont l'équation est:

$$y(2yx_0 - xy_0) - px_0x = p(x_0^2 + y_0^2 - 2px_0),$$

on détermine facilement les asymptotes et un point de cette courbe.

5° En remplaçant x par $\dfrac{y^2}{2p}$, dans l'équation précédente, on obtient une équation du troisième degré en y; on exprime qu'elle a deux racines égales et l'on trouve:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2px_0 = 0,$$

si les deux racines égales sont nulles;

et $$(x_0^2 + y_0^2)(y_0^2 - 2px_0) = 0,$$

lorsqu'elles sont égales et différentes de zéro.

CORRESPONDANCE

Liège, le 12 octobre 1887.

Mon cher Collègue,

Vous avez, dans votre excellent *Journal de Mathématiques spéciales* (2e série, t. IV, pp. 156-159) appelé, avec raison, l'at-

(*) *C. M. S.*; t. II, p. 482.

tention sur une méthode de construction des axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués, méthode trop oubliée, qu'on rencontre dans le *Traité des sections coniques* du marquis de l'Hospital (*).

Permettez-moi de venir réclamer cette élégante construction pour son véritable inventeur, le Géomètre Montois J-F. Le Poivre : j'espère que cette petite discussion sera de nature à intéresser les lecteurs de votre estimable Revue.

La construction des axes de l'ellipse se trouve exposée dans un petit traité de notre compatriote, intitulé : *Traité des sections du cylindre et du cône, considérées dans le solide et dans le plan, avec des démonstrations simples et nouvelles*, par *M. Le Poivre*, de la ville de Mons, à Paris, chez Barthelémy Girin, rue Saint Jacques, vis-à-vis la fontaine Saint-Séverin, à la Prudence, MDCCIV.

Le problème occupe la page 12.

Le Poivre commence, p. 10, par résoudre cette question. Etant donnés deux diamètres conjugués d'une ellipse trouver le cercle générateur, c'est-à-dire construire la base d'un cylindre circulaire oblique, dont l'ellipse donnée soit la section.

La solution est extrêmement simple; à la forme près, Le Poivre emploie précisément la transformation homographique dont vous faites usage, transformation qui ne se rencontre pas dans le Traité de l'Hospital.

Comme l'auteur de l'*Analyse des infiniment petits*, le Géomètre de Mons détermine encore deux diamètres conjugués faisant un angle donné, lorsque les axes sont connus ; puis il donne une démonstration analytique de sa construction, tout-à-fait comme l'Hospital.

L'identité entre les deux écrits étant démontrée, tout se réduit à une question de date.

A première vue, c'est fort aisé : le traité de l'Hospital a paru en 1707, celui de Le Poivre en 1704; mais le premier est un écrit posthume, et le marquis est mort le 2 février 1704.

Or, le privilège de Le Poivre est daté du 13 janvier 1704.

(*) *Traité analytique des sections coniques*, Paris, 1707, pp. 37-38. 2e édition, 1720, pp. 37-38

Dès le 30 juin 1704, le *Journal des Sçavans* (*), dans un article peu favorable à Le Poivre, publie une analyse du petit mémoire de notre Géomètre, et mentionne le problème relatif aux diamètres conjugués faisant un angle donné: le problème de la construction des axes est cité dans l'analyse du *Traité*, parue dans les *Acta Eruditorum* en 1707 (**).

Tout cela est antérieur à l'apparition du traité de l'Hospital.

Il ne reste donc qu'à examiner une hypothèse : c'est que Le Poivre, auquel on a reproché de s'être emparé de la méthode des Planiconiques de la Hire, — reproche dont Chasles l'a d'ailleurs entièrement justifié, (***) — devrait sa solution à l'Hospital. Or, c'est précisément le contraire qui est vrai.

En 1708, Le Poivre publia à Mons, une nouvelle édition, entièrement transformée, de son livre, sous le titre de : *Traité des sections du cône considérées dans le solide, avec des démonstrations simples, et nouvelles plus simples et plus générales que celles de l'édition de Paris*, par monsieur LE POIVRE, contrôleur des ouvrages de la ville de Mons. A Mons, chez la veuve Gaspard Migeot, Rue des Clercs vis-à-vis la Croix MDCCVIII (****).

Les dernières pages de cette édition sont consacrées à une réfutation en règle de l'article du *Journal des Savants*; incidemment, il parle de sa solution du problème qui consiste à déterminer deux diamètres conjugués faisant un angle donné, lorsque l'on connaît deux diamètres conjugués quelconques.

Ce problème avait été résolu par le marquis de l'Hospital, et d'une façon fort compliquée, en se servant de la méthode de transformation de Le Poivre, mais c'est ce dernier qui imagina, non seulement la méthode générale dont il vient d'être question, mais encore la division du problème en

---

(*) *Journal des Sçavans*, Edition de Liège t. VIII. 1704, pp. 659-657. Edition d'Amsterdam, t. XXXII. 1705. pp. 649-658.

(**) *Acta Eruditorum* , mars 1707, pp. 132-133.

(***) *Aperçu historique*, p. 130 ; *Traité des sections coniques*, p. 174, en note.

(****) Il n'existe qu'un seul exemplaire de ce petit livret : il se trouve à la bibliothèque de Mons, où il est coté 1988. Une réimpression en a été faite en 1854, à Mons, par les soins de M. C. Wins.

deux parties, dont la première concerne la construction des axes; c'est cette solution que l'Hospital « avait assez estimée pour l'adopter en quelque manière, en l'inscrivant toute entière dans ses ouvrages », pour me servir des termes de Le Poivre. Notons en passant, que c'est notre Géomètre qui traça les figures du *Traité analytique des sections coniques*.

Si le marquis de l'Hospital ne cite pas notre compatriote, on peut supposer, avec un des biographes (*) de Le Poivre, que le célèbre Géomètre eût sans doute réparé cet oubli s'il lui eût été donné d'écrire une préface à son livre.

En effet, ce n'est pas seulement le problème de la construction des axes qu'il paraît lui devoir, mais bien encore tout le sixième livre, au moins quant au fond des idées.

Me permettez-vous, mon cher collègue, d'appeler votre attention sur un autre point.

Il s'agit de la construction d'un groupe harmonique, que vous attribuez à La Hire *(Journal de mathématiques élémentaires* 2e série, t. IV, p. 89.): cette construction est due à François van Schooten: *Exercitationum liber II.* 1656, p. 174. (Et dans l'édition en hollandais, 1660, p. 166).

Pardonnez-moi si ma lettre ne contient que des observations de critique; c'est que si je devais vous faire part des observations élogieuses, mon temps n'y suffirait pas.

Dr C. LE PAIGE.

BIBLIOGRAPHIE

Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand par P. MANSION, professeur ordinaire à l'Université de Gand, etc., (Paris) Gauthier-Villars, un volume grand in-8° de VIII. 300 pages; prix DIX francs; — L'ouvrage que vient de faire paraître M. P. Mansion est le résumé des leçons qu'il professe depuis vingt ans à l'Université de Gand. Nous regrettons que le défaut d'espace ne nous permette pas de donner ici une analyse plus circonstanciée de ce savant traité où sont exposés, avec une rigueur qui sera certainement remarquée, les principes du Calcul différentiel et du Calcul intégral. Nous aurions voulu, non seulement

(*) Aug. Cambier, *Notice sur les ouvrages de J.-F. Le Poivre*

signaler ce livre à nos lecteurs, mais, dans un article digne de l'auteur et du sujet qu'il a traité, montrer quels sont les points originaux et caractéristiques de l'ouvrage en question.

Si nous ne nous trompons, le côté personnel du cours de M. P. Mansion réside principalement, outre la rigueur d'exposition déjà signalée, dans l'introduction immédiate de la variable complexe pour l'étude des fonctions. Que l'on approuve, ou non, cette manière d'entrer de plein pied au cœur de l'Analyse, il en résulte de notables transformations dans l'exposition des démonstrations ordinaires et, comme le fait observer avec raison M. Mansion dans sa préface, l'enseignement traditionnel se trouve ainsi profondément modifié. Neanmoins, si on le veut, on peut laisser de côté tout ce qui a rapport au cas où la variable est imaginaire, sans que pour cela, en aucun endroit, il y ait une solution de continuité dans l'exposition de la théorie des fonctions élémentaires d'une variable réelle. L'ouvrage se complète par un appendice consacré à de nombreux renseignements historiques, pleins d'érudition et d'intérêt, et par des notes complémentaires commentant certains passages jugés, par l'auteur, d'une rédaction trop concise.

J'ai signalé, comme une caractéristique de l'ouvrage de M. P. Mansion la très grande rigueur que l'auteur apporte dans l'établissement des principes de l'Analyse infinitésimale : on peut dire qu'il pousse, sur ce point, le scrupule aux dernières limites, comme en témoignent notamment les chapitres IV et V de son Appendice (*). Je reconnais d'ailleurs que cette manière de faire est tout à fait dans le courant moderne (**), lequel est, en principe, des plus légitimes et je suis probablement mal venu de ne pas le trouver parfait. Pourtant, je n'ai pu m'empêcher, en lisant l'ouvrage de M. P. Mansion, et surtout certains passages de quelques autres livres, récemment publiés, de me rappeler ce que dit, avec tant de vérité, Pascal dans ses *Pensées* lorsqu'il recommande de « n'entreprendre de démontrer aucune des choses tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on n'ait rien de plus clair pour le prouver » et Terquem, faisant un jour cette citation, rappelait à ce propos le mot de D'Alembert, parlant de ces démonstrations inutiles et disant « après avoir lu de tels raisonnements, il ne tient plus qu'au lecteur d'en douter. »

Il ne faut rien exagérer, et peut-être a-t-on été trop loin dans ces développements philosophiques concernant les notions premières de la limite. Il y a, dans l'Analyse, comme dans la Géométrie, des axiomes nécessaires En admettant qu'on puisse en réduire le nombre, il n'y a nul profit à le faire, au moins pour l'enseignement, si l'effort que nécessite cette réduction est trop considérable et en disproportion avec l'effet obtenu

En terminant ces réflexions, nous relèverons dans le livre de M. P. Mansion, un point qui nous a frappé, et sur lequel nous désirons appeler l'attention de nos lecteurs.

(*) Ces deux chapitres semblent d'ailleurs destinés surtout aux professeurs; car l'auteur a soin de faire remarquer en note que les principes du premier sont tous à peu près évidents et que le théorème, démontré trop minutieusement dans le second, ne lui sert qu'une seule fois, pour établir, à la fin du livre, le caractère de convergence des séries, dû à Abel.

(**) Voyez, à ce propos, la *note sur quelques points de la théorie des fonctions* de M. C. Jordan ; *Cours d'Analyse* t. III (Gauthier-Villars 1887).

D'après une remarque de M. Cesáro, citée en note par M. P. Mansion, le théorème qui correspond à l'énoncé suivant : *pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire que l'on ait* lim $(nu_n) = 0$, *pour* $n = \infty$, ne serait pas exact. A l'appui de cette affirmation, M. Cesáro produit l'exemple de la série

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9}, \text{etc.},$$

laquelle est convergente comme étant la somme des séries convergentes :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots \qquad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Cependant, dit M. Cesáro, le produit nu_n étant égal à l'unité, chaque fois que n est un carré, n'a pas zéro pour limite.

Cette objection ne nous paraît pas fondée et voici pourquoi :

Lorsqu'on dit que *lim* nu_n étant, (pour $n = \infty$) un nombre k, la série correspondante est divergente, il est bien entendu que l'hypothèse avancée est accordée *quel que soit n* et non pour des valeurs *particulières* de n. Le texte de l'énoncé, et la démonstration qui l'accompagne, sont d'accord sur ce point. L'expression *Lim* nu_n n'a aucun sens si l'on n'entend pas que n croît infiniment, par des valeurs quelconques, ou, tout au moins, dans le cas présent, par des valeurs entières quelconques. Si l'on se reporte à la démonstration, elle est non moins explicite sur ce point. Elle exige, en effet que, au moins à partir d'un certain terme, constituant le premier terme de la partie que l'on doit étudier, les produits

$$1u_1, \quad 2u_2, \quad 3u_3, \quad \ldots, \quad nu_n, \quad \ldots$$

restent constamment supérieurs à un nombre fixe et déterminé K'. Cette condition n'est pas remplie dans l'exemple proposé par M. Cesáro, et, à notre avis, son objection, ni aucune autre, ne peuvent prévaloir contre un théorème qui, ni dans la forme de son énoncé, (*) ni dans la démonstration qu'on en donne, ne peut donner prise à un malentendu.

Nous eussions voulu parler encore, dans cette notice bibliographique, de deux autres livres que vient de publier la librairie Gauthier-Villars: la *thermodynamique de M. Joseph Bertrand* (**) et les *leçons sur la théorie*

(*) De la correspondance que nous avons échangée, sur ce sujet, M. Mansion et moi, il résulte que c'est la forme habituellement donnée à l'énoncé qui est contestable. M. Mansion répondant à une question que je lui adressais, à ce propos, m'écrit : « Il faut énoncer le théorème comme vous le proposez : *Si* nu_n, *pour* $n = \infty$ *a une limite différente de zéro, la série est divergente* ». Je croyais, en écrivant les lignes qu'on vient de lire, que c'était le fond même du théorème qui se trouvait attaqué par la remarque de M. Cesáro. Car, pour corriger la forme de l'énoncé, aucun exemple n'était nécessaire : cette correction, du moment que la clarté de l'énoncé est contestée, va de soi ; elle doit être immédiatement et pleinement accordée. Mais, dans l'exemple proposé par M. Cesáro, et reproduit plus haut, il ne faut pas dire que *lim* nu_n *n'est pas zéro*; la limite du nu_n dans cette série, n'est pas susceptible d'être déterminée.

En résumé, prise à la lettre, la remarque de M. Cesáro est exacte si elle ne vise que les sous-entendus que comporte l'énoncé classique, et on peut les faire cesser en lui donnant la forme plus explicite, indiquée plus haut.

(**) On trouvera une analyse de cet ouvrage dans le dernier numéro des *Annales de Mathématiques*.

générale des surfaces, de M. Gaston Darboux. Mais le nom des auteurs, la nature élevée des matières qu'ils ont traitées dans ces deux ouvrages, nous défendraient d'en faire un compte rendu superficiel; enfin, tout au moins pour l'un d'eux, nous n'avons pas besoin d'ajouter combien la compétence nécessaire nous eût fait défaut, pour mener à bien cette tâche.

Nous nous bornerons à rappeler aux candidats au prochain concours de l'Agrégation mathématique, s'il en est qui nous lisent, qu'ils auront à faire une connaissance approfondie du livre si remarquable que vient de publier M. G. Darboux; leur programme, à défaut d'un autre intérêt, leur en fait un devoir rigoureux. Ils pourront alors vérifier quel plaisir on éprouve à lire une théorie, d'un ordre si élevé, et pourtant si clairement exposée, et ils doivent s'estimer bien heureux qu'on signale à leur attention un pareil livre, plein d'aperçus nouveaux, intéressant dans les moindres parties qu'il développe, bien écrit et, ce qui ne gâte rien, admirablement imprimé. Ce livre ajoutera singulièrement aux titres scientifiques, déjà si considérables, de M. G. Darboux, et nous le félicitons, bien cordialement, du succès qui accompagne son nouvel ouvrage. Un second volume traitant: *la théorie des systèmes de rayons rectilignes, les formules de Codazzi, les lignes géodésiques* et la *théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, paraîtra prochainement; il ne sera pas moins bien accueilli que son aîné.

G. L.

QUESTION 45

Solution par M. Paul Bourgarel, à Antibes.

On considère un point m *dont les coordonnées sont* x *et* y*; à ce point on fait correspondre un point* M *dont les coordonnées* X *et* Y *sont liées à* x *et* y *par les formules*

$$x = X, \qquad yY = a^2.$$

On propose d'étudier cette transformation; on établira en particulier les points suivants :

1. A une courbe f, *d'ordre* p, *correspond également une courbe* F, *d'ordre* 2p; *mais si* f *possède à l'infini, dans la direction* Oy, *un point de multiplicité* k, *l'ordre de* F *n'est plus que* $2p - k$.

2. Les tangentes aux courbes f *et* F *aux points correspondants* m *et* M *rencontrent* Ox *en deux points équidistants du pied de l'ordonnée.*

3. Appliquer cette remarque à l'hyperbole considérée comme transformée de la droite par ce procédé et retrouver ainsi une construction bien connue.

4. *Etudier les cubiques de la troisième classe,*

$$x^2y = m^3,$$

en les considérant comme des tranformées de la parabole; montrer en particulier que, si l'on appelle P *le pied de l'ordonnée en un point* M *de cette cubique, et* T *le point de rencontre de la tangente en* M *avec* Ox, *on a :*

$$OT = \frac{3}{2}OP.$$

5. *Déduire de cette transformation, et de la théorie des asymptotes, qu'une courbe algébrique ne peut pas avoir de point d'arrêt.*

(G. L.)

1. — L'équation d'une courbe f d'ordre p ne possédant pas d'asymptote parallèle à Oy peut toujours se mettre sous la forme :

$$y^p\varphi_0(x) + y^{p-1}\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_p(x) = 0.$$

Dès lors l'équation de la courbe F, transformée de f, au moyen des formules données, est :

$$\left(\frac{a^2}{Y}\right)^p\varphi_0(X) + \left(\frac{a^2}{Y}\right)^{p-1}\varphi_1(X) + \ldots + \varphi_p(X) = 0,$$

ou : $$a^{2p}\varphi_0(X) + a^{2(p-1)}Y\varphi_1(X) + \ldots + Y^p\varphi_p(X) = 0.$$

La courbe f étant supposée une vraie courbe de degré p, $\varphi_p(x)$ n'est pas identiquement nul. Il en résulte que F est bien de degré $2p$.

Mais si f possède à l'infini, dans la direction Oy, un point de multiplicité k, son équation prend la forme :

$$y^{p-k}\varphi_k(x) + y^{p-k-1}\varphi_{k+1}(x) + \ldots + \varphi_p(x) = 0,$$

et l'équation de la courbe F transformée est :

$$a^{2(p-k)}\varphi_k(X) + \ldots + Y^{p-k}\varphi_p(X) = 0.$$

On voit que cette équation n'est plus que de degré $2p - k$.

2. — Pour démontrer cette seconde proposition, il suffit de vérifier que les sous-tangentes relatives à deux points correspondants des deux courbes f et F sont égales et de signes contraires.

La valeur de la sous-tangente relative au point m est $\dfrac{y}{\dfrac{dy}{dx}}$:

si $f(x, y) = 0$ est l'équation de f, la sous-tangente aura pour valeur

$$- y \cdot \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}.$$

Si nous calculons, de même, la valeur de la sous-tangente relative au point M qui décrit la courbe F, dont l'équation est

$$f\left(X, \frac{a^2}{Y}\right) = 0,$$

Nous trouvons que cette sous-tangente a pour expression :

$$Y \cdot \frac{\frac{a^2}{Y^2} \cdot \frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}} \quad \text{c'est-à-dire:} \quad y \cdot \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}},$$

en vertu de la relation $yY = a^2$. Les deux sous-tangentes sont donc égales et de signes contraires (*).

3. — Si nous transformons une hyperbole rapportée à ses asymptotes, ayant pour équation $xy - k^2 = 0$, nous trouvons que la courbe transformée est :

$$a^2X - K^2Y = 0.$$

C'est une droite passant par l'origine.

Si donc nous appliquons à ces deux courbes la deuxième proposition, nous retrouvons cette propriété connue de l'hyperbole, à savoir que la tangente en un point de l'hyperbole coupe chaque asymptote en un point symétrique du centre par rapport au pied de la parallèle menée par le point à l'autre asymptote; autrement dit, la tangente en un point de l'hyperbole est partagée en deux parties égales par le point de contact et les asymptotes, ce qui fournit la construction connue de la tangente à l'hyperbole.

4. — Si nous transformons une parabole ayant pour équation $x^2 - 2py = 0$, nous trouvons

$$X^2Y = 2pa^2.$$

(*) Cette propriété s'établit aussi, et très simplement, en considérant deux points voisins sur f et les points correspondants sur F. G. L.

Si nous appliquons encore ici la remarque 2, et si nous désignons par t le point de rencontre, avec Ox, de la tangente à la parabole, nous avons, en conservant les notations de l'énoncé

$$OT = OP + PT = OP + tP.$$

Or d'après une propriété bien connue de la parabole

$$tP = Ot = \frac{OP}{2}.$$

Donc
$$OT = OP + \frac{OP}{2} = \frac{3}{2} OP.$$

5. — Démontrons enfin, au moyen de cette transformation, qu'une courbe algébrique ne peut pas avoir de point d'arrêt.

Supposons en effet que la courbe f ait un point d'arrêt, et prenons ce point pour origine.

En vertu des formules de transformation

$$x = X \qquad yY = a^2,$$

à ce point correspond un point de Oy rejeté à l'infini. Si une seule branche de courbe ou un nombre impair de branches de courbes aboutissaient à l'origine dans f, il en résulterait qu'une seule branche de courbe ou un nombre impair de branches de courbes seraient asymptotes à Oy dans F. Ce résultat est contraire aux propriétés connues des asymptotes. Donc f ne peut pas avoir de point d'arrêt.

Nota. — Solutions analogues par MM. A. Lévy, lycée de Nancy classe de M. Hervieux) et Barthe.

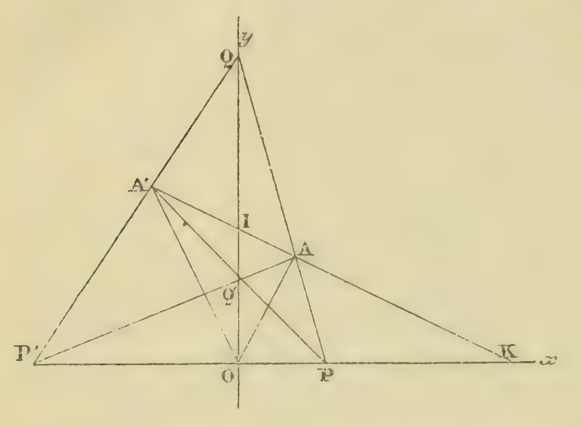
QUESTION 149

Solution par M. Giat (élève du Lycée Saint-Louis, classe de M. Ed. Lucas)

On considère deux droites rectangulaires Ox *et* Oy *et un point fixe* A; *de l'origine* O, *comme centre, avec un rayon variable on décrit une circonférence* Δ *à laquelle on mène, par* A, *deux tangentes qui coupent les axes aux points* P, Q, P′, Q′. *Cela posé, on joint* PQ, *et* P′Q; *ces droites se coupent en un point* A′ *dont on demande le lieu.*

On expliquera par des considérations géométriques le résultat, en apparence singulier, auquel a conduit le calcul.

Soient α et β les coordonnées du point A, les tangentes menées, de ce point, à un cercle O, ont pour équation :



$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = r,$$
$$x \cos \varphi' + y \sin \varphi' = r;$$

φ et φ' étant liés par les équations :

$$\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi = r, \quad (1)$$
$$\alpha \cos \varphi' + \beta \sin \varphi' = r. \quad (2)$$

En cherchant l'intersection de ces tangentes par les axes de coordonnées, on obtient les longueurs OP, OQ, OP′, OQ′ :

$$\text{OP} = \frac{r}{\cos \varphi} \qquad \text{OP}' = \frac{r}{\cos \varphi'}$$
$$\text{OQ} = \frac{r}{\sin \varphi} \qquad \text{OQ}' = \frac{r}{\sin \varphi'}$$

L'équation de PQ′ est donc :

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi' = r, \qquad (3)$$

et celle de P′Q $\quad x \cos \varphi' + y \sin \varphi = r. \qquad (4)$

En éliminant φ, φ' et r, entre les équations (1), (2), (3) et (4), nous aurons le lieu du point A.

Nous pouvons d'abord remplacer les équations (3) et (4) par leur somme et leur différence :

$$x(\cos \varphi + \cos \varphi') + y(\sin \varphi + \sin \varphi') = 2r$$
$$= \alpha(\cos \varphi + \cos \varphi') + \beta(\sin \varphi + \sin \varphi'), \qquad (5)$$
$$x(\cos \varphi - \cos \varphi') - y(\sin \varphi - \sin \varphi') = 0. \qquad (6)$$

L'équation (5) donne :

$$-\frac{y - \beta}{x - \alpha} = \frac{\cos \varphi + \cos \varphi'}{\sin \varphi + \sin \varphi'} = \frac{\cos \dfrac{\varphi + \varphi'}{2}}{\sin \dfrac{\varphi + \varphi'}{2}}.$$

Mais $\quad \dfrac{\cos \varphi - \cos \varphi'}{\sin \varphi - \sin \varphi'} = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{\sin \dfrac{\varphi + \varphi'}{2}}{\cos \dfrac{\varphi + \varphi'}{2}},$

L'équation (5) devient donc :

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=0. \qquad (7)$$

De même, l'équation (6) devient :

$$\frac{y}{x}+\frac{\beta}{\alpha}=0. \qquad (8)$$

Le point A' est donc situé sur les droites fixes (7) et (8). Par suite il est fixe.

Ce singulier résultat peut se démontrer géométriquement. En effet prenons les deux tangentes AP et AP'. La droite AO est bissectrice de l'angle P'AP. Dans le quadrilatère complet AQA'Q' les diagonales se divisent harmoniquement. Donc les deux faisceaux (A.P'POK)(O.A'AIK) sont harmoniques. Par suite AC est bissectrice de l'angle extérieur du triangle PAP'. Donc cette droite AA' est perpendiculaire sur AO. Elle est fixe.

Ensuite, comme les deux droites homologues OI, OK du deuxième faisceau sont perpendiculaires, elles sont les bissectrices de l'angle A'OA. Le point A' est donc aussi sur la droite fixe OA', symétrique de OA par rapport à Oy.

Nota. — Nous avons reçu de nombreuses solutions de cette question, mais toutes ces rédactions (celle de M. Ferval exceptée) sont inexactes; elles trouvent, pour n'avoir pas poussé à fond l'élimination des paramètres variables, que le lieu demandé est une droite.

QUESTIONS PROPOSÉES

234. — Lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle et dans lesquelles le diamètre parallèle à l'un des côtés du triangle conserve une longueur constante.

(Question posée aux Examens oraux d'admission à l'École Polytechnique en 1887.)

235. — La quantité

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$$

n'est pas égale à un nombre entier. *(E. Catalan.)*

236. — D'un point M, on peut mener à une parabole donnée trois normales; trouver le lieu du point pour lequel les pieds de ces normales forment un triangle d'aire donnée.

Errata. — Page 207, *n°4*, le groupement des termes a été mal fait. Comme nous l'ont fait observer plusieurs correspondants, il faut écrire

$$\frac{1}{2(L2)^p} + \frac{1}{3(L3)^p} > \frac{1}{(L2)^p}$$

$$\frac{1}{4(L4)^p} + \ldots + \frac{1}{7(L7)^p} < \frac{1}{(L4)^p}$$

....

Plusieurs fautes typographiques se sont glissées dans la solution de la question 118, p. 160 :
etc...,

Page 261, ligne 3, en remontant,

au lieu de $(x^2 - 1)^{p-n}$ *lisez* $(x^2 - 1)^{n-p}$

et ligne 3, en descendant,

au lieu de $= 1$ *lisez* $= 0$

Page 262, avant-dernière ligne, le premier P_{p-1} doit être changé en P_{p+1}

Page 263, les quatre premières lignes comportent le signe : $= 0$, qui a été oublié; puis, ligne 7,

au lieu de $x^2 - p$ *lisez* $x^2 - 1$

et ligne 9,

au lieu de $(n^2 - 1)^{n-p}$ *lisez* $(x^2 - 1)^{n-}$

Le Directeur Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23714-7.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Pages.

Algèbre.

Géométrie pure et Trigonométrie.

Calcul différentiel et Calcul intégral.

Pages.

Géométrie Analytique à deux dimensions.

Géométrie Analytique à trois dimensions.

Correspondance.

Questions diverses. Concours.

Variétés.

Bibliographie.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23714-7.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur
de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

Lucien LÉVY
Agrégé des sciences mathématiques,
Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

3e SÉRIE

TOME PREMIER

Année 1887.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1887

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

SUR LE DÉVELOPPEMENT

DE LA RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE ENTIER EN FRACTION CONTINUE

Par M. **Ed. Lucas**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis.

On sait que si a désigne la racine carrée du plus grand carré contenu dans un nombre entier N qui n'est pas un carré parfait, l'irrationnelle $\sqrt{N}$ est développable en une fraction périodique mixte.

La période commence immédiatement après le premier quotient incomplet a; le dernier terme de la période des quotients incomplets est $2a$, et les autres termes de cette période forment une suite symétrique dans laquelle deux termes quelconques équidistants des extrêmes sont égaux.

Degen a publié à Copenhague en 1817, la table du développement de la racine carrée des mille premiers nombres en fractions continues, sous le titre :

CANON PELLIANUS *sive tabula simplicissimam æquationis celebratissimæ* $y^2 = ax^2 + 1$ *solutionem, pro singulis numeri dati valoribus ab* 1 *usque ad* 1000, *in numeris rationalibus iisdemque integris exhibens.*

Dans la préface de cet ouvrage, l'auteur fait observer que l'on peut obtenir immédiatement le développement de

$\sqrt{N}$ pour les nombres contenus dans les douze formes suivantes :

	N	QUOTIENTS INCOMPLETS
I	$a^2 + 1$	$a,\ 2a;$
II	$a^2 - 1$	$a-1,\ 1,\ 2(a-1);$
III	$a^2 + 2$	$a,\ a,\ 2a;$
IV	$a^2 - 2$	$a-1,\ 1,\ a-2,\ 1,\ 2(a-1);$
V	$a^2 + a$	$a,\ 2,\ 2a;$
VI	$a^2 - a$	$a-1,\ 2,\ 2(a-1);$
VII	$a^2b^2 + a$	$ab,\ 2b,\ 2ab;$
VIII	$a^2b^2 - a$	$ab-1,\ 1,\ 2(b-1),\ 1,\ 2(ab-1);$
IX	$a^2b^2 + 2a$	$ab,\ b,\ 2ab;$
X	$a^2b^2 - 2a$	$ab-1,\ 1,\ b-2,\ 1,\ 2(ab-1);$
XI	$(2a+1)^2 + 4$	$2a+1,\ a,\ 1,\ 1,\ a,\ 2(2a+1);$
XII	$(2a+1)^2 - 4$	$2a,\ 1,\ a-1,\ 2,\ a-1,\ 1,\ 4a.$

Après avoir fait observer que le développement des dix premières formes était connu depuis longtemps, Degen ajoute que les deux dernières formes lui appartiennent et qu'il n'en connaît pas d'autres. Nous allons indiquer un procédé qui permet de trouver sans exception toutes les formes générales du développement de la racine carrée d'un nombre entier et qui conduit ainsi à la classification de tous les nombres entiers d'après la nature de leur développement.

En laissant de côté les carrés parfaits, la période contiendra un, deux, trois, ... p, quotients incomplets et nous dirons qu'un nombre est de la $p^{\text{ième}}$ classe, lorsque le développement de sa racine carrée, en fraction continue, contiendra p quotients incomplets.

NOMBRES DE LA PREMIÈRE CLASSE

Les quotients incomplets successifs sont

$$a,\quad 2a,\quad 2a,\quad 2a,\ldots,$$

et l'on a, en retournant au nombre qui donne naissance à cette fraction périodique

$$N = a^2 + 1.$$

C'est la formule (I) de Degen.

NOMBRES DE LA DEUXIÈME CLASSE

Les quotients incomplets successifs sont, avec $b \lesseqgtr 2a$,

$$a, b, 2a; \quad b, 2a; \quad b, 2a; \ldots;$$

on trouve pour N la valeur

$$N = a^2 + \frac{2a}{b};$$

mais pour que N soit entier, il faut faire l'une des quatre hypothèses suivantes, en désignant par α et β des nombres entiers

1° $b = 1$ d'où $N = a^2 + 2a$:
2° $b = 2$ — $N = a^2 + a$:
3° $a = \alpha b$ — $N = \alpha^2 b^2 + 2\alpha$;
4° $b = 2\beta$, $a = \alpha\beta$ — $N = \alpha^2\beta^2 + \alpha$.

La première hypothèse donne les formes

$$N = a^2 + 2a = (a + 1)^2 - 1,$$

qui correspondent aux formules (IX) et (II) de Degen; la deuxième hypothèse donne les formes

$$N = a^2 + a = (a - 1)^2 - (a - 1),$$

qui correspondent aux formules (V) et (VI); la troisième hypothèse donne la forme

$$N = a^2b^2 + 2a$$

qui correspond à la formule (IX) et pour $a = 1$ à la formule (III). Enfin la quatrième hypothèse donne la forme qui correspond à la formule (VII). Il n'existe pas d'autres nombres de deuxième classe.

NOMBRES DE LA TROISIÈME CLASSE

Les quotients incomplets successifs seront

$$a, b, b, 2a; b, b, 2a; b, b, 2a; \ldots$$

en supposant encore $b \lesseqgtr 2a$. En remontant à la valeur de la fraction continue, on trouve

$$N = a^2 + \frac{2ab + 1}{b^2 + 1}.$$

Pour que la fraction précédente se réduise à un nombre entier, nous poserons

$$\frac{2ab + 1}{b^2 + 1} = \lambda$$

d'où
$$a = \frac{\lambda(b^2 + 1) - 1}{2b};$$
mais pour que λ et a soient entiers, on voit facilement que b est un nombre pair 2β et que $\lambda - 1$ est un multiple de 4β que nous poserons égal à $4\alpha\beta$.

Donc tous les nombres de la troisième classe sont contenus dans la formule
$$N = (4\alpha\beta^2 + \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta + 1,$$
ou
$$N = (4\alpha\beta^2 - \alpha + \beta)^2 + (4\alpha\beta + 1)^2;$$
les quotients incomplets sont
$$4\alpha\beta^2 + \alpha + \beta, \quad 2\beta, 2\beta, \quad 2(4\alpha\beta^2 + \alpha + \beta); \ldots$$
On trouve en particulier pour $\beta = 1, 2, \ldots$
$$N = 25a^2 + 14a + 2,$$
$$N = 289a^2 + 76a + 5,$$
. . . .

La forme précédente n'était pas connue de l'auteur du *Canon Pellianus*.

NOTE SUR LES SURFACES RÉGLÉES

Par **E. Amigues,** professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Marseille.

---

1. — Les équations
$$X = aZ + p$$
$$Y = bZ + q$$
dans lesquelles a, b, p, q sont fonctions d'une variable t, représentent une surface réglée. En laissant ces fonctions arbitraires, on a toutes les surfaces réglées.

Si on donne à t deux valeurs t et $t + dt$ on obtient deux génératrices infiniment voisines.
$$\begin{cases} X = aZ + p \\ Y = bZ + q \end{cases}$$
$$\begin{cases} X = (a + \Delta a)\, z + p + \Delta p \\ Y = (b + \Delta b)\, z + q + \Delta q \end{cases}$$
Δa, Δb, Δp. Δq sont du même ordre que da, db, dp, dq et

par suite que dt, que nous prenons comme infiniment petit principal.

La plus courte distance des deux droites a pour valeur

$$\frac{\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p}{\pm\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)^2}}.$$

Il est évident que le dénominateur n'est pas nul et qu'il est du premier ordre.

Quant au numérateur, on peut l'écrire ainsi, en se bornant aux termes du troisième ordre,

$$(da\;dq - db\;dp) + \frac{1}{2}\,d(da\;dq - db\;dp) + \ldots$$

par où l'on voit que ce numérateur est ou du second ordre, ou au moins, du quatrième.

La conclusion est que la plus courte distance est du premier ordre ou au moins du troisième, théorème dû à Bouquet.

Les surfaces pour lesquelles cette plus courte distance est du premier ordre s'appellent surfaces gauches. Les autres, caractérisées par l'identité en t,

$$da\;dq - db\;dp = 0$$

s'appellent développables. Nous ne justifierons pas ici ces dénominations.

2. — Toute surface engendrée par une tangente à une courbe gauche est une surface développable.

Soient

$$x = f(z),$$
$$y = \varphi(z),$$

les équations de la courbe. La tangente en un point x, y, z est représentée par les équations

$$X - f(z) = f'(z)\,[Z - z]$$
$$Y - \varphi(z) = \varphi'(z)\,[Z - z]$$

On a ici

$$a = f'(z) \qquad p = f(z) - zf'(z)$$
$$b = \varphi'(z) \qquad q = \varphi(z) - z\varphi'(z).$$

On conclut de là

$$\frac{dp}{da} = -z,$$

et

$$\frac{dq}{db} = -z;$$

par suite

$$\frac{dp}{da} = \frac{dq}{db}.$$

3. — Réciproquement, dans toute surface développable, les génératrices sont tangentes à une courbe gauche.

On a, par hypothèse,

$$\frac{dp}{da} = \frac{dq}{db}.$$

Prenons pour variable indépendante la valeur commune de ces deux rapports changée de signe, et désignons cette variable par z. Nous avons dès lors

$$dp = -z da$$
$$dq = -z db$$

a et b sont deux fonctions de z *qui ont toujours des intégrales.* Nous représenterons ces intégrales par $f(z)$ et $\varphi(z)$.

On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} b = \varphi'(z) \\ a = f'(z) \end{array} \right. \qquad (1)$$

et, par conséquent,

$$\left\{ \begin{array}{l} da = f''(z)dz \\ db = \varphi''(z)dz. \end{array} \right.$$

Par suite les valeurs de dp et de dq deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} dp = -zf''(z)dz \\ dq = -z\varphi''(z)dz, \end{array} \right.$$

et, en intégrant,

$$\left\{ \begin{array}{l} p = f(z) - zf'(z) \\ q = \varphi(z) - z\varphi'(z). \end{array} \right. \qquad (2)$$

Les formules (1) et (2), prouvent que la droite variable définie par les équations

$$X = aZ + p,$$
$$Y = bZ + q,$$

représente les tangentes à la courbe dont les équations sont

$$x = f(z),$$
$$y = \varphi(z).$$

Cette réciproque constitue l'intérêt de cette note.

4. — Nous allons maintenant prouver que les surfaces réglées pour lesquelles le plan tangent est le même tout le long d'une génératrice sont les surfaces développables.

Soit une génératrice

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$

et une génératrice infiniment voisine

$$x = (a + \Delta a)z + p + \Delta p,$$
$$y = (b + \Delta b)z + q + \Delta q.$$

Si on prend sur ces deux génératrices deux points ayant même z, savoir z_0, on a pour les coordonnées de ces deux points, M et M'

$$\mathrm{M} \begin{cases} x = az_0 + p \\ y = bz_0 + q \\ z = z_0 \end{cases}$$

$$\mathrm{M'} \begin{cases} x = (a + \Delta a)z_0 + p + \Delta p \\ y = (b + \Delta b)z_0 + q + \Delta q \\ z = z_0. \end{cases}$$

Le plan tangent en M contient la génératrice du point M. Son équation est donc de la forme

$$x - az - p + \lambda\,(y - bz - q) = 0.$$

Mais d'après les valeurs des coordonnées de M et M', ces deux points sont infiniment voisins, et par suite le point M' est situé dans le plan tangent en M. On a donc

$$z_0\Delta a + \Delta p + \lambda\,(z_0\Delta b + \Delta q) = 0,$$

d'où on tire

$$\lambda = -\frac{z_0\Delta a + \Delta p}{z_0\Delta b + \Delta q}.$$

Pour que le plan tangent en M soit le même tout le long de la génératrice du point M, il faut et il suffit que cette valeur de λ ne dépende pas de z_0, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\Delta a}{\Delta b} = \frac{\Delta p}{\Delta q},$$

ou, à la limite,

$$\frac{da}{db} = \frac{dp}{dq}.$$

En d'autres termes, il est nécessaire et suffisant que la surface soit développable.

UNE PROPRIÉTÉ DES DÉTERMINANTS (*)

Par M. **Poujade**, professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée de Lyon.

Quand on peut détacher d'un tableau d'éléments un déterminant d'ordre k *qui n'est pas nul si les déterminants d'ordre* k + 1 *qu'on obtient en le bordant avec une ligne et une colonne du tableau sont nuls, tous les déterminants d'ordre* k + 1 *tirés du tableau sont nuls.*

Lemme. — Si l'on peut satisfaire à n équations linéaires et homogènes contenant $k + p$ inconnues en se donnant arbitrairement p des inconnues le déterminant principal du système est au plus d'ordre k.

Ceci est évident si n est égal ou inférieur à k. Quand n est supérieur à k, admettant pour un instant que le déterminant principal soit d'ordre $k + h$, il en résulterait que les $k + p$ inconnues s'expriment linéairement en fonction de $p - h$ d'entre elles. Les p inconnues qui sont arbitraires seraient fonctions linéaires de $p - h$ variables donc liées entre elles au moins par une relation linéaire, ce qui est absurde, et le lemme est démontré.

Ceci posé, envisageons le tableau d'éléments donné comme correspondant à un système d'équations linéaires et homogènes. Considérant le déterminant d'ordre k qui n'est pas nul, on peut résoudre k d'entre elles par rapport à k des inconnues. Substituant dans celles qui restent, on a des relations linéaires entre les p autres inconnues qui se réduisent, en vertu de l'hypothèse, à des identités puisque les coefficients de ces inconnues (calcul connu) y sont précisément les déterminants obtenus en bordant celui qui n'est pas nul. Donc les p inconnues restantes sont arbitraires, le déterminant principal est d'ordre k, c'est-à-dire que tous les déterminants d'ordre $k + 1$ sont nuls. C. Q. F. D.

(*) Cette propriété est connue; elle a été indiquée par M. Méray.

Application. — On sait que pour qu'un polynôme homogène du second degré soit carré parfait il faut et il suffit que les mineurs du second ordre (à deux lignes et deux colonnes) de son discriminant soient tous nuls. Il résulte de la propriété ci-dessus, un élément au moins de la diagonale étant différent de zéro (ceci est évident *a priori*), qu'il *suffit* que les déterminants du second ordre obtenus en bordant cet élément soient nuls à la fois. Les conditions obtenues sont visiblement distinctes.

Remarque. — La propriété ci-dessus peut, dans le cas particulier $k = 1$, employé ici, être établie par un calcul simple.

Soit $a, b, c\ldots$, le tableau donné

$$\begin{matrix} a & b & c\ldots \\ a' & b' & c'\ldots \\ a'' & b'' & c''\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Supposons a différent de zéro. Si l'on multiplie les lignes par a il vient

$$\begin{matrix} a^2 & ab & ac\ldots \\ aa' & ab' & ac'\ldots \\ aa'' & ab'' & ac''\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

qui se change en vertu des hypothèses

$$ab' - ba' = 0 \qquad ac' - ca' = 0, \ldots \text{ en}$$

$$\begin{matrix} a^2 & ab & ac\ldots \\ aa' & ba' & ca'\ldots \\ aa'' & ba'' & ca''\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Il est visible que les déterminants du second ordre déduits d'un pareil tableau sont tous nuls puisque, supprimant les facteurs a, $a'\ldots$ aux diverses lignes, il devient

$$\begin{matrix} a & b & c\ldots \\ a & b & c\ldots \\ a & b & c\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

THÉORÈME D'ALGÈBRE

Par M. **Desplanques**, élève à l'École préparatoire de Sainte-Barbe (classe de M. André).

M. Lucien Lévy, dans une note sur la possibilité de l'équilibre électrique, insérée dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences (année 1881), énonce le théorème suivant :

Si tous les éléments d'un déterminant sont positifs, sauf ceux de la diagonale principale, qui sont négatifs et plus grands en valeur absolue que la somme des éléments de la ligne qui les contient, ce déterminant n'est jamais nul.

Cette proposition est susceptible de généralisation :

Si dans un déterminant, chaque élément de la diagonale principale est plus grand en valeur absolue que la somme des valeurs absolues des autres éléments de la même ligne, ce déterminant n'est jamais nul.

Soit le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_{11} u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

dans lequel

val. abs. $u_{11} >$ val. abs. u_{12} + val. abs. $u_{13} + \ldots +$ val. abs. u_{1n}

. . . .

val. abs. $u_{pp} >$ val. abs. u_{p1} + val. abs. $u_{p2} + \ldots +$ val. abs. u_{pn}

Supposons que les équations :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \ldots u_{1n}x_n = 0 \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \ldots u_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ u_{p1}x_1 + u_{p2}x_2 + \ldots u_{pn}x_n = 0 \\ u_{n1}x_1 + u_{n2}x_2 + \ldots u_{nn}x_n = 0 \end{array}\right. \qquad (A)$$

admettent une solution en nombres finis $x'_1 x'_2 \ldots x'_n$, qui ne soient pas tous nuls

Choisissons parmi les nombres $x'_1 x'_2 \ldots x'_n$ le plus grand en valeur absolue, soit x'_p ce nombre, nous avons :

$$u_{p1}x'_1 + u_{p2}x'_2 + \ldots + u_{pp}x'_p + \ldots + u_{pn}x'_n = 0$$

ou

$$u_{p1}\frac{x'_1}{x'_p} + u_{p2}\frac{x'_2}{x'_p} + \ldots + u_{pp} + \ldots + u_{pn}\frac{x'_n}{x'_p} = 0. \quad (1)$$

Les nombres $\frac{x'_1}{x'_p}$, $\frac{x'_2}{x'_p} \ldots \frac{x'_n}{x'_p}$, sont tous plus petits que 1 en valeur absolue.

D'autre part, l'on a :

$$\text{val. abs. } u_{pp} < \text{val. abs. } u_{p1} + \ldots + \text{val. abs. } u_{pn},$$

l'égalité (1) est donc impossible.

Le système des équations (A) n'admet aucune solution en nombres finis différents de zéro, le déterminant proposé n'est donc pas nul.

Remarque. — La démonstration de M. Desplanques peut être complétée par la remarque suivante.

Soit k le nombre des éléments négatifs de la diagonale principale; le déterminant proposé aura le signe de $(-1)^k$.

En effet, si l'on fait tendre vers zéro tous les éléments sauf ceux de la diagonale principale, le déterminant conserve la propriété qui le définit et ne peut s'annuler. Il conserve donc son signe qui est celui du produit des éléments de la diagonale principale (L. L).

CONCOURS D'AGRÉGATION 1886

Solution par M. A. Fleurot à Marseille.

Étant donnés dans un plan une droite D, *un point* O *sur cette droite, et une droite* D' :

1° Former l'équation générale des coniques qui touchent la droite D *au point* O *et qui ont la droite* D' *pour directrice;*

2° Démontrer que deux de ces coniques passent par un point quelconque P *du plan; déterminer les régions du plan où doit se*

trouver le point P *pour que ces deux courbes soient réelles, et, dans ce cas, en reconnaître le genre.*

3° Les deux coniques du faisceau considéré qui passent par le point P *se coupent en outre en un point* P'; *calculer les coordonnées du point* P' *en fonction de celles du point* P, *et, en supposant que le point* P *décrive une ligne* C, *trouver quelle doit être la forme de l'équation de cette ligne pour que le point* P' *décrive la même ligne.*

1° Prenons pour axe des x la droite D, pour axe des y la perpendiculaire menée par O à cette droite, et désignons par a et b l'abscisse et l'ordonnée à l'origine de la droite D' L'équation générale des coniques est alors de la forme :

$$\mu^2[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] = (bx + ay - ab]^2.$$

Exprimant que ces coniques passent en O et y sont tangentes à Ox, nous avons :

$$\mu^2(\alpha^2 + \beta^2) - a^2b^2 = 0, \qquad (1)$$

$$\alpha\mu^2 - ab^2 = 0. \qquad (2)$$

Entre ces deux équations on pourrait éliminer α, qui doit disparaître de l'équation et tirer une des deux quantités μ^2, β, en fonction de l'autre, par une équation du 2me degré ; mais, pour avoir une équation générale où le paramètre variable entre rationnellement, il est préférable de remarquer que. β n'entrant plus que dans le coefficient du terme en y, lequel est $-2(\beta\mu^2 - a^2b)$, on peut regarder $\beta\mu^2$, ou mieux encore ce coefficient tout entier, comme un paramètre variable, et poser $\beta\mu^2 - a^2b = \lambda ab$ (3). Éliminant alors α et β entre (1), (2) et (3), il vient :

$$\mu^2 = (\lambda + a)^2 + b^2,$$

et l'équation générale cherchée est :

$$(\lambda + a)^2x^2 - 2abxy + (\lambda^2 + 2a\lambda + b^2)y^2 - 2ab\lambda y = 0.$$

2° Écrivons que cette équation est vérifiée par les coordonnées x_0y_0 d'un point P; le résultat, ordonné en λ, est :

$$\lambda^2(x_0^2 + y_0^2) + 2\lambda a(x_0^2 + y_0^2 - by_0) + (ax_0 - by_0)^2 = 0. \quad (A)$$

Cette équation donne pour λ deux valeurs, définissant deux coniques de la famille. Pour que ces coniques soient réelles, il faut que leurs équations soient à coefficient réels, et cela suffit, puisqu'elles coupent Ox en des points réels.

La condition de réalité est donc :

$$y_0 \{(x_0^2 + y_0^2)[2abx_0 + (a^2 - b^2)y_0 - 2a^2b] + a^2b^2y_0\} > 0.$$

Les lignes séparatrices des régions où doit se trouver le point P pour que les deux coniques passant par ce point soient réelles, sont donc l'axe des x, et la cubique représentée par l'équation

$$(x^2 + y^2)[2abx + (a^2 - b^2)y - 2a^2b] + a^2b^2y = 0$$

(enveloppe des coniques).

C'est une cubique circulaire unicursale Γ, du genre des strophoïdes obliques. Son point double est le pied de la perpendiculaire OH abaissée de O sur D′. L'asymptote qui a pour équation : $2abx + (a^2 - b^2)y - 2a^2b = 0$, coupe O$x$ en A. La cubique passe aussi en A et est tangente en O à Ox. Elle coupe Oy en deux autres points, C, D, toujours réels; la somme des coordonnées de ces points est égale à l'ordonnée à l'origine OI de l'asymptote. On voit facilement que, si $a > b$, le point B sépare les deux points C, D; si $a = b$, l'un des points va à l'infini, car l'asymptote est alors parallèle à Oy; si $a < b$, c'est le point O qui sépare C et D. Dans les deux cas extrêmes, ID = OC. — Ces deux cas sont complètement analogues : l'asymptote ne fait que tourner de 180° autour du point A. Il est à remarquer, pour la construction, qu'elle fait toujours avec Ox un angle plus grand que OH. Nous nous sommes borné à tracer des figures qui correspondent au cas $a < b$. La distinction des régions donnant des coniques réelles se fait d'ailleurs facilement.

Le discriminant AC — B² de la conique λ se réduit à $\lambda(\lambda + 2a)$. Il ne peut changer de signe que si λ passe par les valeurs zéro et $-2a$, c'est-à-dire lorsque le point P traverse l'une des deux paraboles :

$$(ax - by)^2 = 0,$$

$$(ax - by)^2 + 4a^2by = 0,$$

qui sont les seules paraboles de la famille considérée. Ces deux paraboles, avec les lignes trouvées plus haut pour exprimer la réalité de λ, c'est-à-dire l'axe des x et la cubique Γ, divisent le plan en régions telles, que, tant que le point P reste dans la même région, aucune des deux valeurs de λ ne peut fournir une parabole; ni, par suite, faire changer le genre

de l'une ou l'autre conique. La première parabole n'est autre que la droite double OH, qui d'ailleurs, en sa qualité de droite double, n'est pas en réalité une ligne séparatrice. La deuxième parabole P est naturellement tangente en O à ox, et aussi tangente à $x = a$. Cherchons ses points d'intersection autres que O, avec la cubique Γ. L'équation aux coefficients angulaires des droites joignant l'origine aux points d'intersection des deux courbes est, après la suppression de la racine double $m = 0$:

$$(4a^2 - b^2)^2m^4 + 4ab(4a^2 - b^2)m^3 + 2a^2(12a^2 - b^2)m^2 + 12a^3bm + 9a^4 = 0.$$

Comme la parabole est tangente à son enveloppe en chacun de ses points d'intersection avec celle-ci, l'équation précédente est de la forme : $(m - t_1)^2(m - t_2)^2 = 0$, et l'on trouve facilement que t_1 et t_2 sont les racines de l'équation :

$$(4a^2 - b^2)t^2 + 2abt + 3a^2 = 0,$$

et la condition de réalité de ces racines est $b - a\sqrt{3} > 0$. Ainsi; si $b < a\sqrt{3}$, les deux points de contact sont imaginaires; si $b = a\sqrt{3}$, ils sont confondus en un point situé entre L et T; si $b > a\sqrt{3}$, ils sont réels, tous deux entre L et T si $b < 2a$, séparés par L, si $b > 2a$; si $b = 2a$, l'un est le point L, et l'autre est sur l'arc LT.

Nous avons donc trois cas principaux à distinguer dans la discussion du genre des coniques : $b < a\sqrt{3}$, $b = a\sqrt{3}$, $b > a\sqrt{3}$.

Les régions une fois bien limitées, dans chaque cas, comme on est sûr que, par tous les points de la même région, il passe le même nombre d'ellipses et le même nombre d'hyperboles, il suffit d'étudier, dans chaque région, un point commode.

Premier Cas, $b < a\sqrt{3}$. — Si dans l'équation (A) on fait $x_0 = \pm\infty$, et y_0 *fini*, l'équation devient $(\lambda + a)^2 = 0$. Ces deux valeurs de λ rendent le discriminant négatif, et cela, quel que soit le signe de y_0 : donc, tous les points de la région MHAx, comme tous ceux de la région ROx' donnent deux hyperboles. Si l'on fait $x_0 = 0$, $y_0 = -\varepsilon$, les substitutions de $-\infty$, $-2a$, 0, donnent des signes alternés : donc, par tous

les points de l'intérieur de la parabole passent une ellipse et une hyperbole. En faisant $x_0 = 0$, $y_0 = +\varepsilon$, on a deux racines positives : donc, tous les points intérieurs à la boucle OCH donnent deux ellipses. Enfin l'hypothèse $x_0 = a$, $y_0 = -\varepsilon$ montre que dans la région STOAN on a deux hyperboles. Tous les points de la parabole P donnent cette parabole et une hyperbole ; la portion de droite HG fournit cette droite

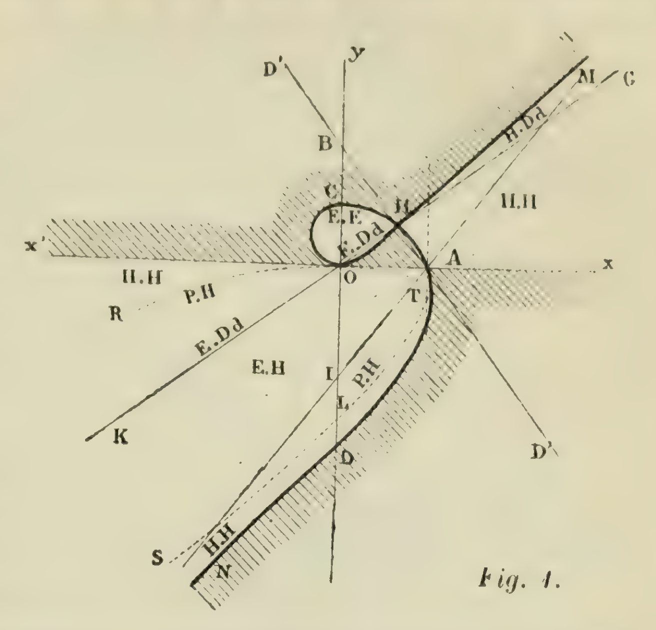


Fig. 1.

double et une hyperbole ; la portion HK, cette droite double et une ellipse. — La figure est faite dans l'hypothèse $b > a$.

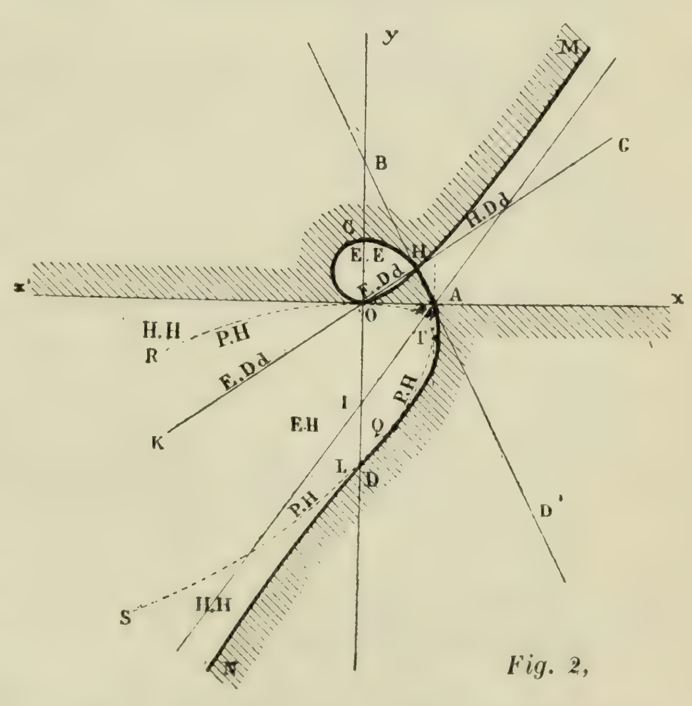


Fig. 2,

Deuxième Cas : $b = a\sqrt{3}$. — Mêmes résultats que dans le cas précédent pour les régions au-dessus de Ox, pour la région ROx', et pour l'inté-

rieur de la parabole. L'hypothèse $x = a$ $y = -\varepsilon$ donne deux hyperboles pour la région OTQA, la parabole P et une hyperbole pour l'arc OTQ de cette parabole. Si le point P est en L, on a une parabole et une hyperbole : l'arc de parabole QS donne donc, outre cette parabole, une hyperbole; par suite, dans la région SQN, on a deux hyperboles.

Troisième Cas : $b > a\sqrt{3}$. — Résultats identiques à ceux des deux premiers cas, pour les régions au-dessus de Ox, pour la région ROx', et pour l'intérieur de la parabole. On trouve encore deux hyperboles pour la région OTQA. Donc, l'arc de parabole OQ donne une hyperbole ; au point Q, cette hyperbole devient ellipse ; donc, dans la région QLQ′ on a deux ellipses ; dans la région SQ′N, on a de même deux hyperboles. — La figure est faite dans l'hypotèse $b > 2a$.

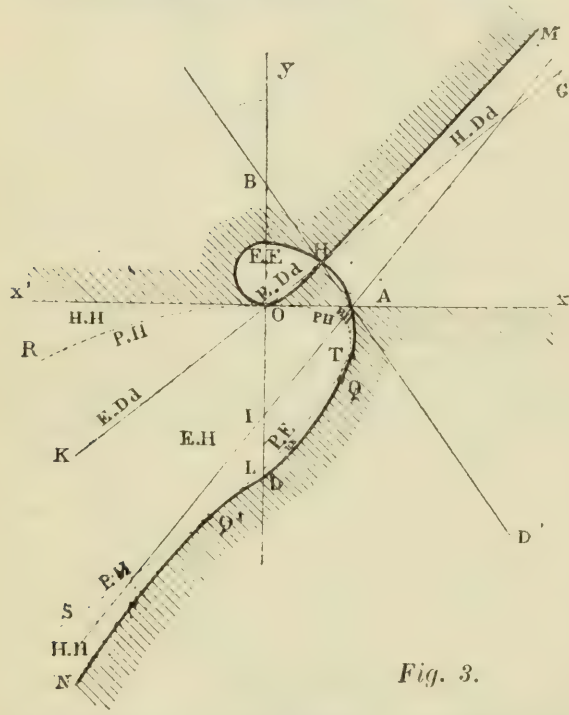


Fig. 3.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMEN

1. — *Asymptotes de la courbe qui, en coordonnées polaires, correspond à l'équation*

$$\frac{1}{\rho} = (\omega - \alpha)(\omega - \beta) \ldots (\omega - \lambda).$$

L'équation de l'asymptote (C. M. S.; II, p. 580) est

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{\rho_{\prime\prime}}\right)' \sin(\omega - \alpha).$$

Nous avons ici

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)' = \Sigma\,(\omega - \beta)\,\ldots\,(\omega - \lambda).$$

Les équations demandées sont donc

$$\frac{1}{\rho} = (\alpha - \beta)\,\ldots\,(\alpha - \lambda)\sin(\omega - \alpha)$$

$$\frac{1}{\rho} = (\beta - \alpha)\,\ldots\,(\beta - \lambda)\sin(\omega - \beta)$$

. . . .

2. — *Les coniques* γ *qui passent par trois points fixes et qui sont conjuguées à un segment* AB, *passent par un quatrième point fixe.*

Prenons AB pour axe des x, et le milieu de AB pour origine.

L'équation générale des coniques γ est, comme l'on sait,

$$\frac{\lambda}{ax + by + c} + \frac{\mu}{a'x + b'y + c'} + \frac{1}{a''x + b''y + c''} = 0.$$

En faisant $y = 0$, et en exprimant que l'équation

$$x^2(\lambda a'a'' + \mu aa'' + aa') + \ldots + \lambda c'c'' + \mu cc'' + cc' = 0,$$

a deux racines dont le produit est égal à $\dfrac{\overline{AB}^2}{4}$, on obtient, entre λ et μ, une relation linéaire; donc, etc.

3 (*). — *La série*

$$\frac{1}{2(l2)^p} + \frac{1}{3(l3)^p} \quad \ldots \quad + \frac{1}{n(ln)^p} \quad \ldots$$

est convergente si l'on suppose $p > 1$.

Considérons l'intégrale y,

$$y = \int_2^\infty \frac{dx}{x(lx)^p}.$$

En posant

$$lx = u,$$

nous avons

$$\int \frac{dx}{x(lx)^p} = \int \frac{du}{u^p} = K + \frac{1}{(1-p)u^{p-1}}.$$

D'après cela, et en vertu d'un théorème connu, la série est convergente si nous supposons $p > 1$, parce que l'intégrale $\int_2^\infty$ est une quantité finie.

Pour $p = 1$, cette intégrale est infinie ; la série est divergente ; on retrouve alors la série de M. Bertrand que nous avons signalée précédemment (Journal, 1886, p. 163).

Le théorème auquel nous venons de faire allusion correspond à l'énoncé suivant.

Si f(x) *désigne une fonction continue et bien déterminée lorsque* x *varie de* α *à* $+\infty$, *et si l'on a :* $\lim f(x) = 0$, *pour* $x = \infty$, *la série :*

$$f(k), \quad f(k+1) \quad \ldots \quad f(n), \quad \ldots$$

est convergente, si l'intégrale

$$\int_\alpha^\infty f(x)dx,$$

est une quantité finie; elle est divergente, dans le cas contraire. (Le nombre K *désigne un entier quelconque supérieur à* α.*)*

A suivre.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Roux, *élève au lycée de Grenoble.*

... Je désire aussi vous exposer un procédé permettant de déterminer le point de contact des tangentes aux courbes que vous étudiez dans le numéro de Septembre dernier de ce journal. Ces courbes sont les enveloppes de droites telles que si, par les points de rencontre de ces droites avec les axes, on mène des parallèles à ces axes, le lieu du point d'intersection de ces parallèles est une courbe donnée.

Cette méthode, sans être plus simple que celle que vous avez donnée, a l'avantage de s'appliquer lorsque les axes

sont quelconques; de plus, on la tire immédiatement du principe des transversales réciproques.

Pour cela, je m'appuierai sur la remarque suivante qu'il suffit d'énoncer.

Étant donnés deux axes quelconques Ox. Oy *et une droite* AB, *si d'un point* N *de cette droite, nous menons des parallèles aux axes qu'elles rencontrent en* Q, R: *le milieu des droites* QR, *quand* N *se déplace, est une droite.*

Soient N_1, N_1 deux points infiniment voisins sur une droite AB, et soient RQ, R_1Q_1 les droites correspondantes que vous considérez dans l'article cité. Prenons en A_1 et B_1 les milieux de OA et de OB et prenons

$$MS = 2M\omega, \quad MS_1 = 2M\omega_1.$$

La droite SS_1 est parallèle à A_1B_1 : de plus dans le triangle MSS_1 les deux droites RR_1, QQ_1 sont deux transversales réciproques : donc

$$S_1T_1 = ST.$$

Passons à la limite *(fig. 2)* :

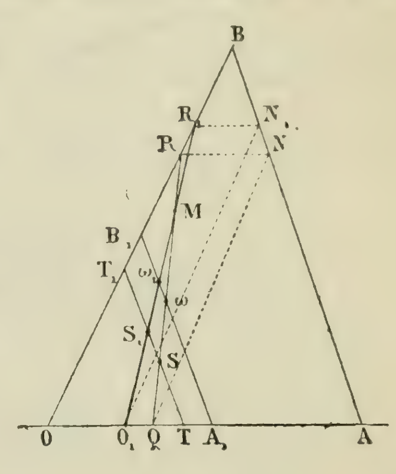


Fig. 1.

Le point S étant situé sur une droite parallèle à AB et divisant en deux parties égales cette droite, est sur la médiane OK du triangle OAB : il est donc à l'intersection des deux droites RQ, ON : si ω est le milieu de RQ; on n'aura qu'à porter $M\omega = \omega S$:

M est le point cherché.

Note. — La démonstration très simple que nous communique notre jeune correspondant conduit, comme il est facile de le vérifier, à la construction qu'a donnée M. d'Ocagne (*J. M. E.*, 1885, p. 30 et *J. M. S.*, 1886, p. 256).

Le quadrilatère ABPQ et la transversale OIK) en observant que AK = BK) donnent

$$\frac{SQ}{SP} = \frac{OQ}{OA} \cdot \frac{OB}{OP}.$$

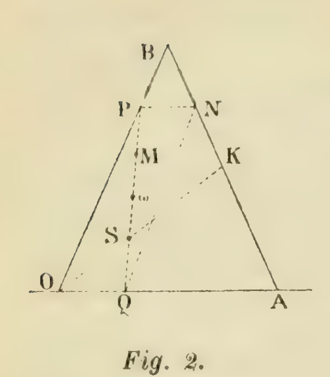


Fig. 2.

Mais on a

$$\frac{OQ}{OA} = \frac{BN}{BA}, \qquad \frac{OB}{OP} = \frac{BA}{AN}$$

et, par conséquent,

$$\frac{SQ}{SP} = \frac{BN}{AN}.$$

Si l'on prend sur PQ le point M, isotomique de S, on a donc

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{NB}{NA};$$

c'est la relation indiquée par M. d'Ocagne.

G. L.

QUESTION 92

Solution par M. Paul Bourgarel, à Antibes.

On donne une circonférence O *et une droite fixes* AB. *Sur chaque tangente à la circonférence on prend le point* M, *de telle sorte que le point de contact* P *soit le milieu du segment* QM *limité d'un côté au point* M, *et de l'autre côté sur la droite fixe* AB. *Quel est le lieu du point* M*? On examinera en particulier le cas où la droite* AB *est tangente à la circonférence, et le cas particulier où la droite* AB *est un diamètre de la circonférence.*

Prenons pour axes deux diamètres rectangulaires du cercle dont l'un soit perpendiculaire à AB. Soit $x = d$ l'équation de la droite AB. Désignons par R le rayon du cercle; R cos φ et R sin φ seront les coordonnées d'un point variable du cercle. L'équation de la tangente en ce point au cercle est

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - R = o.$$

L'ordonnée du point Q de rencontre de cette tangente avec AB est $\dfrac{R - d \cos \varphi}{\sin \varphi}$. On a donc en désignant par $x_0 y_0$ les coordonnées du point M, et en exprimant que le point

P est le milieu de QM,

$$y_0 + \frac{R - d\cos\varphi}{\sin\varphi} = 2R\sin\varphi. \qquad (1)$$

De plus, le point M étant sur la tangente du cercle, on a

$$x_0\cos\varphi + y\sin\varphi - R = o. \qquad (2)$$

On aura l'équation du lieu en éliminant φ entre les deux équations (1) et (2).

L'équation (2) donne

$$y_0\sin\varphi = R - x_0\cos\varphi.$$

En portant cette valeur dans (1), il vient

$$2R\cos\varphi = x_0 + d.$$

L'élimination de φ est dès lors immédiate et l'on obtient en renplacant x_0 par x, y_0 par y_1

$$(x^2 + dx - 2R^2)^2 = 4R^2y^2 - y^2(x + d)^2.$$

Cette équation peut s'écrire aussi :

$$(x^2 + y^2)[x + d - 2R][x + d + 2R] = 4R^2(dx - R^2).$$

Propriétés générales de la courbe. — Cette équation représente une courbe du quatrième degré passant par les ombilics du plan, et ayant deux asymptotes réelles parallèles à oy. Elle est symétrique par rapport à ox. Elle est bitangente au cercle donné aux points de rencontre de ce cercle avec la droite AB.

1° $d > R$. — La droite AB ne rencontre pas le cercle. Il en est donc de même de la courbe, qui a dans ce cas la forme générale indiquée par la figure (1).

2° $d = R$. — La droite AB est tangente au cercle. Il en est donc de même de la courbe.

Dans ce cas, le lieu se décompose en la droite AB et en la courbe du troisième degré

$$(x^2 + y^2)(x + 3R) = 4R^3.$$

Cette courbe a la forme indiquée par la figure (2).

3° $d < R$. — La courbe est alors bitangente au cercle en deux points réels, figure (3).

4° $d = o$. — Ce cas n'est qu'un cas particulier du précédent. La courbe a deux axes de symétrie qui sont ox et oy.

Nota. — Autres solutions par MM. Ferval, élève du lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay); G. Sequestre à Angoulême; A. Bèche professeur à l'école normale de Tulle.

QUESTIONS PROPOSÉES

215. — n étant impair, le nombre des combinaisons de $2n$ lettres, n à n, augmenté de dix fois le nombre des combinaisons de $2n - 2$ lettres, $n - 1$ à $n - 1$, est divisible par $n + 2$.

Autrement dit :

$$C_{2n,\,n} + 10\, C_{2n-2,\,n-1} = \mathfrak{M}(n + 2). \qquad (n \text{ impair}).$$

(*Catalan.*)

216. — Etant donnée une ellipse, on peut adjoindre à tout point f du segment FF′ des foyers une droite d extérieure au plan de la courbe et parallèle au petit axe, telle qu'il existe un rapport constant entre les distances d'un point quelconque de l'ellipse au point f et à la droite d. La droite d engendre un cylindre dont la section droite est une courbe semblable à l'ellipse donnée.

Trouver le théorème analogue pour l'hyperbole et la parabole.

(*J. Neuberg.*)

217. — Soient S le sommet d'un cône droit, O le point où l'axe rencontre un plan quelconque P. Démontrer qu'il existe un rapport constant entre les distances des points O et S à une tangente quelconque de la section du cône par le plan P. (*J. Neuberg.*)

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 27208-6.

SUR LES FOCALES D'UNE SURFACE
DU SECOND ORDRE
CIRCONSCRITE A UNE QUADRIQUE DONNÉE

Par M. **V. Hioux**, professeur au lycée de Nantes.

1. — Prenons, comme quadrique donnée, un ellipsoïde

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Soit $M(x_1, y_1, z_1)$ le pôle d'un plan

$$P = \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1 = 0.$$

L'équation générale d'une surface du second ordre circonscrite à (E) peut s'écrire :

$$\varphi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 - KP^2 = 0.$$

A chaque valeur de K correspond une surface particulière.

Soit maintenant $S = 0$ l'équation d'une sphère de rayon nul ayant son centre au point (α, β, γ) on aura

$$S = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = 0.$$

Formons l'équation

$$\varphi + \lambda S = 0$$

et exprimons qu'elle représente un système de deux plans.

Cette dernière équation peut s'écrire :

$$\left(\frac{1}{a^2} + \lambda\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} + \lambda\right)y^2 + \left(\frac{1}{c^2} + \lambda\right)z^2 - 2\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$
$$+ \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 1 - KP^2 = 0.$$

Supposons la rendue homogène par l'introduction d'une quatrième variable $t = 1$. Les demi-dérivées partielles peuvent s'écrire

$$x = \frac{a^2\alpha\lambda}{1 + a^2\lambda} + \frac{KPx_1}{1 + a^2\lambda},$$

$$y = \frac{b^2\beta\lambda}{1 + b^2\lambda} + \frac{KPy_1}{1 + b^2\lambda},$$

$$z = \frac{c^2\gamma\lambda}{1 + c^2\lambda} + \frac{KPz_1}{1 + c^2\lambda},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \frac{1}{\lambda} = \alpha x + \beta y + \gamma z - \frac{KP}{\lambda}.$$

Faisons la somme des trois premières multipliées respectivement par $\frac{x_1}{a^2}$, $\frac{y_1}{b^2}$, $\frac{z_1}{c^2}$; nous obtenons, en tenant compte de l'expression de P,

$$P + 1 = \lambda\left(\frac{\alpha x_1}{1 + a^2\lambda} + \frac{\beta y_1}{1 + b^2\lambda} + \frac{\gamma z_1}{1 + c^2\lambda}\right)$$
$$+ KP\left(\frac{x_1^2}{a^2(1 + a^2\lambda)} + \frac{y_1^2}{b^2(1 + b^2\lambda)} + \frac{z_1^2}{c^2(1 + c^2\lambda)}\right).$$

Les coordonnées x, y et z du centre doivent admettre une infinité de valeurs; il en est par suite de même de la fonction entière P des mêmes variables. Or la dernière équation est du premier degré par rapport à P et comme elle doit être satisfaite pour plus d'une valeur de P, le coefficient ne P doit être nul ainsi que le terme indépendant. On a donc d'abord les deux conditions.

$$\frac{x_1^2}{a^2(1 + a^2\lambda)} + \frac{y_1^2}{b^2(1 + b^2\lambda)} + \frac{z_1^2}{c^2(1 + c^2\lambda)} - \frac{1}{K} = 0.$$

$$\frac{\alpha x_1}{1 + a^2\lambda} + \frac{\beta y_1}{2 + b^2\lambda} + \frac{\gamma z_1}{1 + c^2} - \frac{1}{\lambda} = 0$$

Portons maintenant les valeurs de x, y et z dans la quatrième dérivée et, en vertu de la deuxième condition nous obtenons :

$$\frac{\alpha^2}{1 + a^2\lambda} + \frac{\beta^2}{1 + b^2\lambda} + \frac{\gamma^2}{1 + c^2\lambda} - \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Telles sont les trois conditions qui doivent être remplies pour que l'équation $\varphi + \lambda S = 0$ représente deux plans qui se coupent.

Ces trois conditions peuvent s'écrire ainsi :

$$\frac{\frac{x_1^2}{a^2}}{1 + a^2\lambda} + \frac{\frac{y_1^2}{b^2}}{1 + b^2\lambda} + \frac{\frac{z_1^2}{c^2}}{1 + c^2\lambda} - \frac{1}{K} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\alpha x_1}{a^2+\frac{1}{\lambda}}+\frac{\beta y_1}{b^2+\frac{1}{\lambda}}+\frac{\gamma z_1}{c^2+\frac{1}{\lambda}}-1=0, \tag{2}$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2+\frac{1}{\lambda}}+\frac{\beta^2}{b^2+\frac{1}{\lambda}}+\frac{\gamma^2}{c^2+\frac{1}{\lambda}}-1=0. \tag{3}$$

L'équation (1) est du troisième degré en λ et admet trois racines réelles. A chacune d'elles correspond une focale qui est l'intersection de la surface (3) par le plan (2) qui est le plan polaire du pôle du plan P par rapport à la surface (3).

Or cette surface (3) est homofocale à la surface donnée (E).

On a par conséquent ce théorème :

Théorème. — *Quand une surface du second ordre est circonscrite à une quadrique* (E) *ses focales sont situées sur trois surfaces* (A) *homofocales à* (E) *dans des plans qui ont un pôle commun qui est le pôle du plan de la courbe* (C) *de contact de la surface considérée avec la quadrique donnée.*

2. — Cas particuliers du cône circonscrit. — Lorsque la surface circonscrite

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\text{KP}^2=0,$$

représente un cône, on a

$$\text{K}=\frac{1}{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1}.$$

Portons cette valeur de K dans la première condition ; alors après des réductions faciles elle devient

$$\frac{x_1^2}{a^2+\frac{1}{\lambda}}+\frac{y_1^2}{b^2+\frac{1}{\lambda}}+\frac{z_1^2}{c^2+\frac{1}{\lambda}}-\ =0. \tag{4}$$

On voit ainsi que l'équation (3) de la surface (A) est vérifiée par les coordonnées du sommet du cône circonscrit, ce qui était évident *a priori* pour ce cas particulier. Le plan (2) est maintenant le plan tangent à la surface (3) menée par le sommet du cône. Pour chacune des valeurs réelles de

$\frac{1}{\lambda}$ fournies par l'équation (4) l'équation (3) représente une surface homofocale à (E) passant par le sommet du cône.

On a donc, comme cas particulier du théorème précédent, le théorème connu donné par Chasles :

« Les focales d'un cône circonscrit à une surface du second ordre sont les génératrices des surfaces homofocales à la proposée et passant par le sommet du cône. »

Remarque. — Les équations (2), (3) et (4) restent les mêmes quand on change α, β, γ en x_1, y_1, z_1 et réciproquement ; les focales du cône de sommet α, β, γ circonscrit à (E) sont donc représentées par l'ensemble des équations (2) et (4) pour chaque valeur de $\frac{1}{\lambda}$ tirée de l'équation (3). On a donc encore ce théorème :

Le lieu des sommets des cônes circonscrits à une quadrique et ayant pour foyer un point donné s, *est formé des focales du cône circonscrit de sommet* s.

(A suivre.)

QUELQUES QUESTIONS

RELATIVES A L'ÉTUDE DES POINTS INVERSES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Le colonel Mathieu qui a, le premier je crois, considéré les points inverses (voir *Nouv. Annales* 1865, p. 398 et suiv.) appelle ainsi deux points tels que si les coordonnées normales de l'un sont α, β, γ les coordonnées de l'autre sont $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$.

M. Neuberg (voir *Mémoire sur le tétraèdre*, page 10 ; extrait du tome XXXVII des mémoires couronnés et autres publiés par l'Académie royale de Belgique 1884) revient sur cette importante notion et, d'une de leurs principales propriétés géométriques, les appelle *points conjugués isogonaux :*

comme ils ont un très grand rôle dans les questions nouvelles de la géométrie du triangle que l'étude des points de Lemoine et de Brocard a suscitées je compte intéresser les lecteurs avec les théorèmes et les problèmes qui font l'objet de ce petit travail.

1. — *Trouver les coniques qui ont pour inverse une conique.*

(*a*) Nous dirons que deux courbes sont inverses l'une de l'autre, si l'une est le lieu des points inverses de l'autre. Une conique (C) a en général pour inverse (C′) une courbe du 4me ordre. Si (C) passe par un des sommets du triangle de référence, (C′) se compose du côté opposé et d'une courbe du 3me ordre; si *dans ce cas* (C) se compose de deux droites, cette courbe du 3me ordre se décompose en une droite passant par ce sommet et en une conique circonscrite au triangle de référence. Si (C) se compose de deux droites passant par un sommet, (C′) se compose du côté opposé comme droite double et de deux droites passant par ce sommet.

(*b*) Si (C) passe par deux sommets du triangle de référence, (C′) se compose des deux côtés du triangle de référence qui aboutissent au 3e sommet et d'une conique (C).

Si, *dans ce cas*, (C) se compose de deux droites, C′ est aussi formée de deux droites passant par les mêmes sommets que (C).

(*c*) Si (C) passe par les trois sommets du triangle de référence, (C′) se compose des trois côtés de ce triangle et d'une autre droite.

2. — *Trouver les coniques qui sont à elles-mêmes leur propre inverse* (*).

Soit $$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + A'\beta\gamma + B'\alpha\gamma + C'\alpha\beta = 0,$$

(*) On peut ramener immédiatement cette question à la suivante :
Si $$f(x.y) = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F,$$
est une fonction de x *et de* y *telle que pour toute valeur de* x *et de* y *qui annule* f(x,y) *on ait aussi* $f\left(\frac{1}{x}\frac{1}{y}\right) = 0$, *on aura*
$$A = 0 \quad C = 0, \text{ et : soit } \begin{cases} F = B \\ E = D \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} F = -B \\ E = -D \end{cases}$$

l'équation d'une de ces coniques; nous ne pouvons supposer à la fois :

$$A = 0 \quad B = 0 \quad C = 0$$

car alors la courbe inverse serait une droite, etc.

L'une au moins de ces quantités n'est donc pas nulle, soit C celle-là, la courbe inverse sera représentée par .

$$(A\beta^2 + B\alpha^2)\gamma^2 + \alpha\beta(C\alpha\beta + A'\alpha\gamma + B'\beta\gamma + C'\gamma^2) = 0.$$

Il faut par suite que l'on ait : $A = 0 \quad B = 0.$

La courbe représentée par la seconde parenthèse se transformera alors en elle-même lorsque l'on aura $C = C'$ et $A = B'$ ou lorsque $C = -C'$ et $A = -B'$.

Il résulte de là, et du § 1, que les seules coniques qui soient à elles-mêmes leur inverse ont pour équations :

$$(B\beta + C\gamma)(B\gamma + C\beta) = 0,$$
$$(C\gamma + A\alpha)(C\alpha + A\gamma) = 0,$$
$$(A\alpha + B\beta)(A\beta + B\alpha) = 0,$$

qui représentent des droites symétriques par rapport aux bissectrices, ou :

$$A\alpha^2 \pm A\beta\gamma \pm B\alpha\gamma + B\alpha\beta = 0 \qquad (1)$$
$$A\beta^2 + B\beta\gamma \pm A\alpha\gamma \pm B\alpha\beta = 0 \qquad (2)$$
$$A\gamma^2 \pm B\beta\gamma + B\alpha\gamma \pm A\alpha\beta = 0 \qquad (3)$$

dans lesquelles il faut prendre, en même temps, les signes supérieurs ; ou, en même temps, les signes inférieurs.

Si l'on prend le signe +, chacune des trois coniques (1), (2), (3) passe par deux sommets et par les centres des cercles ex-inscrits tangents aux côtés qui aboutissent au sommet par lequel ne passe pas la conique.

Si l'on prend le signe —, chacune d'elles passe par deux sommets, par le centre du cercle inscrit et par le centre du cercle ex-inscrit tangent au côté par les extrémités duquel passe la conique.

3. — *Trouver les cercles qui sont à eux-mêmes leur propre inverse.*

Ce qui précède suffit pour montrer que si O, O_a, O_b, O_c sont respectivement le centre du cercle inscrit et les centres des cercles ex-inscrits au triangle de référence,

Les six cercles décrits sur OO_a, OO_b, OO_c, O_bO_c, O_cO_a, O_aO_b

comme diamètres sont à eux-mêmes leur propre inverse et sont les seuls cercles du plan jouissant de cette propriété.

Remarquons encore que :

Si la ligne FF′ *qui joint deux points inverses* F *et* F′ *est vue des deux sommets* A *et* B *sous un angle droit et que* γ *soit l'angle* FCF′, *on aura*

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{c(a+b)}{2p(p-c)},$$

Si alors

$$a + b = c\sqrt{3}, \qquad \gamma = 60^\circ.$$

4. — *Trouver la condition pour qu'une droite donnée coupe la conique inverse en des points réels.*

Soit $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$ l'équation de la droite donnée.

La conique inverse sera représentée par

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} = 0$$

d'où

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-(A^2 + B^2 - C^2) \pm \sqrt{A^4 + B^4 + C^4 - 2B^2C^2 - 2A^2C^2 - 2A^2B^2}}{2AB}$$

donc :

Une droite coupe ou ne coupe pas la conique, son inverse, suivant que l'on ne peut pas, ou que l'on peut, former un triangle avec les trois quantités A, B, C *prises positivement. On trouve facilement aussi que :*

Pour que la conique inverse d'une droite soit une ellipse, une parabole ou une hyperbole, il faut que la droite ne coupe pas le cercle circonscrit, qu'elle le touche ou qu'elle le coupe.

Cela résulte immédiatement de ce que l'inverse d'un point du cercle circonscrit est à l'infini.

On voit encore :

Qu'une droite est tangente à la conique inverse si elle passe par le centre d'un des quatre cercles tangents aux trois côtes du triangle; ce centre est le point de contact.

(A suivre.)

CONCOURS D'AGRÉGATION 1886

Solution par M. A. Fleurot à Marseille.

(*Suite et fin*, voir p. 13.)

3. — Soient x_0y_0 les coordonnées de P, xy celles de P'. Soient $\lambda_1\lambda_2$ les valeurs de λ correspondant aux deux coniques passant par P. L'équation aux coefficients angulaires des droites joignent O aux points d'intersection des deux coniques $\lambda_1\lambda_2$, est. après la suppression de la racine double $m = 0$:

$$(a - bm)^2 - \lambda_1\lambda_2\,(1 + m^2) = 0.$$

Cette équation du 2ᵉ degré a pour racines $\frac{y_0}{x_0}$ et $\frac{y}{x}$. Divisant le produit des racines par $\frac{y_0}{x_0}$ et remplaçant $\lambda_1\lambda_2$ par se valeur, nous avons :

$$\frac{y}{x} = \frac{2abx_0 + (a^2 - b^2)y_0}{2aby_0 - (a^2 - b^2)x_0}. \qquad (\alpha)$$

Il nous faut une deuxième équation entre x, y, x_0, y_0. Pour la trouver soit $ux + vy - 1 = 0$ l'équation de la droite PP'.

Cherchons à déterminer les coefficients u et v de cette droite. Pour cela cherchons son intersection avec la conique dont l'équation s'obtient en retranchant membre à membre celle des deux coniques $\lambda_1\lambda_2$, et qui, par suite, joue le même rôle par rapport aux deux : l'éqnation de cette conique est :

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(x^2 + y^2) + 2a(x^2 + y^2 - by) = 0.$$

Le produit des coefficients angulaires des droites joignant l'origine aux points d'intersection de cette conique et de la droite PP' est $\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 + 2a}{(\lambda_1 + \lambda_2) + 2a(1 - bv)}$. Divisant par $\frac{y_0}{x_0}$, et remplaçant $\lambda_1 + \lambda_2$ par sa valeur, il vient :

$$\frac{y}{x} = \frac{x_0y_0}{y_0[y_0 - v(x_0^2 + y_0^2)]}. \qquad (\beta)$$

Égalant (α) et (β), nous avons :

$$v = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 - b^2)y_0 + 2abx_0},$$

et comme $ux_0 + vy_0 - 1 = 0$:

$$u = \frac{2ab}{(a^2 - b^2)y_0 + 2abx_0}.$$

De sorte que l'équation de la droite PP' est:

$$2abx + (a^2 - b^2)y = 2abx_0 - (a^2 - b^2)y_0. \qquad (\gamma)$$

Les équations (α) et (γ) donnent:

$$x = \frac{[2abx_0 + (a^2 - b^2)y_0][2aby_0 - (a^2 - b^2)x_0].}{y_0(a^2 + b^2)^2}.$$

$$y = \frac{2abx_0 + (a^2 - b^2)y_0}{y_0(a^2 + b^2)^2}.$$

Ceci établi, nous avons deux remarques importantes à faire: d'abord la droite PP' reste parallèle à l'asymptote de la cubique Γ; en second lieu, si l'on désigne pac m_0 et m les coefficients angulaires des droites OP et OP', la relation (α) donne: $2abmm_0 - (a^2 - b^2)(m + m_0) - 2ab = 0$, ce qui prouve que les droites OP, OP' sont les couples de rayons conjugués d'un faisceau en involution. Ce faisceau peut être engendré comme il suit. Si de P on abaisse les perpendiculaires PH et PK respectivement sur la parallèle OE et sur la perpendiculaire à l'asymptote de la cubique Γ, la relation (α) signifie que $\frac{y}{x} = \pm \frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PK}} = \pm \operatorname{tg} \theta$, θ étant l'angle de OP avec OE. Donc OP' fait avec Ox un angle égal en grandeur à l'angle de OP avec OE. Donc OP et OP' sont symétriques par rapport aux bissectrices des angles de Ox avec OE, lesquelles sont les rayons doubles du faisceau involutif. On trouve facilement que l'équation générale des couples de rayons conjugués de ce faisceau est de la forme

$$y^2 + c(\beta - 1)xy + \beta x^2 = 0,$$

égalité dans laquelle c est égal à $-\frac{a^2 - b^2}{2ab}$.

Il résulte de ce qui précède que toute courbe C de l'énoncé est telle qu'une parallèle quelconque à l'asymptote de Γ la coupe en des points qui deux à deux se trouvent sur un couple de rayons conjugués du faisceau. Les coordonnées de deux points correspondants P, P' d'une courbe C satisfont à deux équations de la forme:

$$y - cx = \alpha_1,$$
$$y^2 + c(\beta_1 - 1)xy + \beta_1 x^2 = 0.$$

Mais comme ils sont sur la courbe C considérée, β_1 est connu quand on connaît α_1, et inversement.

Donc il existe une certaine relation $\Psi(\alpha_1, \beta_1) = 0$ entre ces deux paramètres. L'équation de cette courbe C est donc

$$\Psi\left[y - cx, \frac{y(cx - y)}{x(x + cy)}\right] = 0,$$

et réciproquement toute équation de cette forme représente une courbe C.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

Je désire présenter aux lecteurs de ce Journal l'article de M. Vigarié et je veux dire aussi, en peu de mots, quelle a été l'origine et quel est le but de ce travail.

Il y a quelque temps, M. Vigarié me proposa de publier ici une monographie du point de Lemoine. C'était un mémoire bien ordonné, très complet, et clairement rédigé ; ce sont là d'ailleurs les qualités ordinaires de notre jeune et très zélé collaborateur. Mais je songeais déjà, à cette époque, à la nécessité d'un travail d'un ordre plus général, embrassant le rappel de l'ensemble des propriétés les plus saillantes de la nouvelle géométrie du triangle, proposant aussi quelques néologismes, qui permissent de lire plus rapidement les notes qui la concernent et en même temps d'éviter, ou des confusions, ou des recherches souvent difficiles.

Pascal a dit dans *les Pensées :* « Les géomètres n'imposent des noms aux choses que pour abréger le discours et non pour diminuer ou changer l'idée des choses dont ils discourent; et ils prétendent que l'esprit supplée toujours la définition entière aux termes courts qu'ils n'emploient que pour éviter

la confusion que la multitude des paroles apporte. » Pourtant je connais d'excellents esprits qui, se trompant, je crois, sur ce point, répugnent à l'introduction des mots nouveaux et se refusent systématiquement à leur emploi. Toutes les propriétés de la géométrie élémentaire pouvant s'exprimer avec le langage ancien, pourquoi, disent-ils, faire usage d'expressions nouvelles qui ne peuvent que troubler le lecteur? Il y a un fond de vérité dans cette critique adressée aux créateurs de mots; et peut-être pourrait-on citer, dans cet ordre d'idées, plus d'un abus. Il y a plus de vingt ans (*) que M. Gerono s'élevant contre cet excès disait : « Le nombre des mots nouveaux est déjà considérable, il surpasse de beaucoup celui des idées nouvelles, et notez qu'il va toujours en augmentant ». Cette citation prouve seulement qu'il faut, dans la terminologie, comme ailleurs, éviter les excès et c'est surtout sur ce terrain qu'on peut trouver avec raison que le mieux est l'ennemi du bien. Mais pour revenir à la géométrie du triangle, il ne faut pas l'avoir longtemps pratiquée pour reconnaître l'impossibilité matérielle d'exprimer clairement ses propriétés si l'on n'accorde pas la connaissance de quelques termes ayant pour but, justement, « d'éviter la confusion que la multitude des paroles apporte ».

Je crois d'ailleurs que la cause que je plaide ici est depuis longtemps gagnée ; il suffit de lire les nombreuses notes qui paraissent à l'étranger sur cette géométrie, si attrayante par la fécondité et la simplicité de ses propriétés, pour reconnaître que la nécessité d'un langage nouveau s'impose à tous ceux qui veulent écrire sur elle ou seulement la comprendre. Si j'ai cru devoir insister sur un point qui me paraît évident de lui-même, c'est, comme je l'ai dit, que certains, confondant l'excès avec la juste mesure, semblent prévenus, outre mesure, contre tout langage nouveau : or, c'est là, dans un sens inverse, un autre excès.

C'est à ceux-là surtout que je me permets de recommander le substantiel et important travail que M. Vigarié a bien voulu entreprendre sur mon conseil, en étendant l'idée excel-

(*) *Nouvelles Annales*, 1864, p. 415.

lente qu'il avait eue et qui avait donné naissance à la note à laquelle j'ai fait allusion plus haut.

Le présent mémoire rendra, j'en ai le ferme espoir, les plus grands services à tous ceux qui s'intéressent à la géométrie du triangle. Cette science est née en France mais elle y est encore, comme le fait observer avec raison M. Vigarié, peu répandue, bien qu'elle soit déjà classique à l'étranger ; le travail de M. Vigarié contribuera puissamment, pensons-nous, à la faire connaître et aimer. G. L.

La géométrie du triangle a reçu depuis quelques années de grands développements, grâce aux travaux de MM. J.-J.-A. Mathieu, G. de Longchamps, E. Lemoine, H. Brocard, J. Neuberg, M. d'Ocagne. G. Tarry, E. Catalan, J. Casey, R. Tücker, H.-M. Taylor, M. Cay, T.-C. Simmons, Hain, A. Artzt, Stoll, Fuhrmann, Kiehl... Ces développements ont eu pour origine principale les études de M. E. Lemoine (A.-F. Lyon 1873, Lille 1874) *sur un nouveau point remarquable du plan du triangle* auquel son nom est maintenant attaché, et qui est, sans contredit, le plus important du triangle après le centre de gravité. Nous allons essayer de grouper et de coordonner les résultats si intéressants dont l'ensemble constitue cette nouvelle géométrie.

Les recherches des géomètres qui se sont occupés du triangle, ayant été faites le plus souvent, simultanément, ou sans connaître les travaux antérieurs, il en est résulté plusieurs noms pour désigner le même point ou la même ligne, et quelquefois le même terme a désigné des éléments entièrement différents : d'où la confusion ou l'ambiguïté.

Nous avons essayé de trouver parmi les différents termes proposés pour un même point ou pour une même ligne, celui qu'il serait préférable d'employer, en conservant un nom particulier aux éléments remarquables et en donnant à ceux qui en dérivent des noms rappelant leur liaison avec les précédents. Pour arriver à ce but, nous nous sommes reporté aux mémoires originaux (*) et nous avons consulté MM. Brocard, Lemoine,

(*) M. John Casey, dans son *Treatise on the Analytical geometry*, et surtout dans la dernière édition (1886) de son *Sequel to Euclide*, a résumé

de Longchamps, Neuberg, qui ont plus particulièrement attaché leur nom à cette nouvelle théorie, et dont la part dans le succès de la géométrie du triangle est si grande. Autant que possible, devant des avis quelquefois différents, nous avons adopté le mot qui paraissait le plus généralement proposé. Nous avons cité d'ailleurs, dans des notes qu'on trouvera placées au bas des pages, les autres termes qui ont été employés dans un même sens.

Nous diviserons ce travail en deux parties : dans la première, nous donnerons des idées générales sur quelques méthodes de transformations ou de conjugaisons particulièrement utiles dans la géométrie du triangle ; dans la seconde, nous étudierons quelques points et quelques lignes remarquables. Nous ferons aussi le rappel de leurs principales propriétés, et nous donnerons les coordonnées ou les équations barycentriques (*) des éléments que nous énumérerons.

---

d'une façon remarquable la géométrie du triangle ; aussi lui avons-nous fait de nombreux emprunts. Nous avons aussi eu recours aux principales publications mathématiques, et dans cette étude, nous emploierons pour les désigner les abréviations suivantes :

M. *Mathesis.*
J. S. *Journal de Mathématiques spéciales.*
J. E. *Journal de Mathématiques élémentaires.*
E. T. *The Educational Times.*
Q. J. *Quarterly Journal of Pure and applied Mathematics.*
P. L. *Proceedings of the London Math. Society.*
A. F. *Association française pour l'avancement des Sciences.*
B. M. *Bulletin des Sciences mathématiques.*
S. M. *Bulletin de la société mathématique.*
A. G. *Annales de Mathématiques de Gergonne.*
J. C. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Journal de Crelle).*
N. A. M. *Nouvelles Annales de Mathématiques.*
A. E. N. *Annales de l'Ecole normale supérieure.*
N. C. M. *Nouvelle correspondance mathématique.*
A. G. H. *Archives der Physik und Mathematik (Archives de Grunnert-Hoppe).*

(*) Pour éviter toute confusion, nous emploierons les lettres α, β, γ pour désigner les coordonnées barycentriques et les lettres x, y, z pour désigner les coordonnées normales. D'ailleurs, on passera d'un système de coordonnées à l'autre au moyen des formules :

$$\frac{\alpha}{ax} = \frac{\beta}{by} = \frac{\gamma}{cz}.$$

1. Notations. — Le triangle *fondamental, primitif* ou de *référence* étant désigné par ABC nous noterons un point quelconque pris dans le plan de ce triangle par la lettre M. Ce point donne naissance, par suite de constructions géométriques, à d'autres points ou lignes remarquables que nous désignerons par les lettres M, m ou μ affectées d'accents, ou d'indices.

Les pieds des droites AM, BM, CM (*) sont M′, M″, M‴ et les longueurs de ces droites sont m', m'', m'''; longueurs comptées respectivement entre A et M′, B et M″, C et M‴.

Les conjugués harmoniques de M′, M″, M‴ par rapport aux extrémités des côtés du triangle de référence sont μ', μ'', μ'''. Ces trois points sont sur une même droite μ qui est appelée par M. G. de Longchamps (*J. E.* 1886, p. 130) *droite harmoniquement associée* au point M (**).

Les droites Aμ', Bμ'', Cμ''' se coupent deux à deux en trois points M_a, M_b, M_c qui sont les *points algébriquement associés* au point M. Le triangle $M_aM_bM_c$ sera le *triangle harmoniquement associé* au point M.

Les droites M′ M″, M″ M‴, M‴ M′ sont les *pédales* de M et le triangle M′M″M‴ est le *triangle pédal* de M. Enfin, les projections orthogonales de M sur les côtés du triangle sont $m_am_bm_c$ et le triangle $m_am_bm_c$ est le *triangle podaire* de M.

Ces notations nous ont été communiquées par MM. Neuberg et de Longchamps.

Nous appellerons, suivant l'usage, a, b, c, les côtés du triangle ABC, nous désignerons son périmètre par $2p$ et sa surface par S. Enfin nous adopterons les abréviations suivantes proposées par M. H. Brocard (***)

$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2 \qquad a^4 + b^4 + c^4 = q^4$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = n^4$$

relations qui donnent d'ailleurs

$$q^4 + 2n^4 = m^4.$$

(*) Les droites AM, BM, CM sont quelquefois appelées *transversales angulaires* du point M (Hain).

(**) Ou *polaire trilinéaire* de M. Ce terme créé par M. Mathieu (*N. A. M.* 1865) a été employé par plusieurs auteurs, notamment par M. Neuberg (*J. S.* (2), V. 1885, p. 8, et *Mémoire sur le Tétraèdre*).

(***) *A. F.* Rouen, 1883

Nous désignerons par :

G le centre de gravité ou point de concours des médianes ;

H l'orthocentre (*) ou point de concours des hauteurs ;

O le centre du cercle circonscrit de rayon R ;

I le centre du cercle inscrit de rayon r ;

I_a, I_b, I_c les centres des cercles ex-inscrits de rayon r_a, r_b, r_c ;

O_9 le centre du cercle d'Euler (cercle des neuf points).

I

TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES

2. — Étant donné un point M dans le plan du triangle, on pourra toujours trouver, et d'une infinité de façons, un second point M′, qui correspondra au premier d'après une loi géométrique imaginée ; ces deux points M, M′ auront entre eux des relations géométriques dont la simplicité dépendra du choix plus ou moins heureux de la loi qui les unit et chaque loi géométrique donnera lieu à une *méthode de transformation* ou à un *mode de conjugaison* qu'il reste ensuite à étudier. On voit, au point de vue de la géométrie du triangle, l'importance de ces méthodes qui multiplient le nombre des points ou, plus généralement, des éléments remarquables.

Nous allons indiquer, parmi ces méthodes, celles qui intéressent plus particulièrement le sujet qui nous occupe ici.

Dans un mémoire ayant pour titre : *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes en géométrie* (*J. C.* VIII, 1831, pp. 51-63), M. J. Magnus (de Berlin) a le premier posé les principes généraux qui doivent s'appliquer à toute méthode de transformation dans laquelle on fait correspondre un point à un point, et aussi à celle dans laquelle à une droite on fait correspondre une droite, puisqu'il suffit de transformer les

(*) On a attribué (voir *M.* 1881, p. 154 — *J. E.* 1885, p. 244, 1886, p. 3 — *A. F.* Rouen, 1883, p. 190, ce néologisme à James Booth (*A new treatise of some geometrical methods*, 1877). M. T. C. Simmons, dans une des lettres que nous avons reçues de lui, nous a fait observer que M. le Dr Besant avait indiqué ce terme à ses élèves dès 1870.

résultats précédents par les polaires réciproques. Dans ce mémoire Magnus a donné un théorème qui, complété par M. de Longchamps (*A. E, N.* 1866, p. 321) peut s'énoncer ainsi :

Toutes les fois que, dans une méthode de géométrie comparée, à un point correspondra un point, alors à une droite correspondra une conique passant par trois points fixes et à une courbe de l'ordre m *et de la classe* n *correspondra une courbe de l'ordre* 2m *et de la classe*(2m + n)*ayant pour points multiples de l'ordre* m *les trois points fixes* (*).

Ces points fixes sont appelés *points principaux* (Magnus, *loc. cit.*) ou *points fondamentaux* (Abel Transon *N. A. M.* 1865,

---

(*) Ce théorème ne visait que les transformations considérées par M. Magnus et qui sont non seulement birationnelles, mais caractérisées par les formules

$$x=\frac{U}{V},\qquad y=\frac{R}{T};$$

U, V, R, T étant fonctions linéaires de nouvelles coordonnées X, Y.

Alors, à une droite

$$ax+by+c=0,$$

correspond une conique

$$a\mathrm{UT}+b\mathrm{RV}+c\mathrm{VT}=0,$$

passant par les trois points fixes :

$$\mathrm{T}=0\ \mathrm{R}=0,\qquad \mathrm{T}=0\ \mathrm{V}=0,\qquad \mathrm{U}=0\ \mathrm{V}=0.$$

C'est dans ces conditions que M. de Longchamps a étendu le théorème de M. Magnus; mais ce théorème, et le complément qu'en a donné M. de Longchamps, s'appliquent à toutes les transformations birationnelles.

Voyez à ce propos un mémoire de M. T. A. Hirst (*N. A. M*; 1866, p. 213, ayant pour titre : *Sur la transformation quadrique.*)

« Magnus, dit M. Hirst, dans ce mémoire a supposé à tort que sa méthode de transformation était la plus générale de celles dans lesquelles à un point de l'un des systèmes correspondait un seul point de l'autre. Les recherches subséquentes de Cremona, de Jonquières, Clebsch et Cayley ont montré que cela n'a pas lieu : la transformation de Magnus est seulement la plus générale de celles pour lesquelles *à chaque ligne droite correspond une conique...* »

C'est dans ces conditions qu'il faut entendre le théorème de M. G. de Longchamps.

Les développements qui suivent ont pour but de montrer que toute transformation du genre Magnus peut se ramener à la transformation par points réciproques de M. G. de Longchamps, ou à la transformation par points inverses du colonel Mathieu, suivant le système de coordonnées employé. Nous les avons empruntés à *Salmon-Chemin*, p. 440; *Clebsch-Lindemann*, chap. IV, § IX; Mansion, *N. C. M.*, t. I, p. 54.

p. 392). L'élégante démonstration donnée par M. G. de Longchamps a été reproduite par Chasles (*Rapport sur les progrès de la géométrie*, p. 372).

On appelle transformation birationnelle (*), toute transformation dans laquelle à un point de la première figure correspond un point unique de la seconde; et réciproquement. Les coordonnées (x, y, z) d'un point de la première figure sont des fonctions rationnelles des coordonnées (X, Y, Z) d'un point de la seconde figure, et réciproquement, le triangle de référence étant le même, ou non, posons :

$$\frac{x}{f_1(X,Y,Z)} = \frac{y}{f_2(X,Y,Z)} = \frac{z}{f_3(X,Y,Z)}.$$

Si (X,Y,Z) sont données, on en déduit le point unique (x, y, z).

Si (x, y, z) sont connues, le point (X, Y, Z) est à l'intersection des deux courbes

$$\left.\begin{aligned} xf_2(X, Y, Z) - yf_1(X, Y, Z) = 0. \\ xf_3(X, Y, Z) - zf_1(X, Y, Z) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Ces courbes sont du n^{me} degré si f_1, f_2, f_3 sont des fonctions homogènes du degré n. Elles se coupent en n^2 points qui ont pour correspondant le point (x, y, z).

Pour qu'il n'y ait qu'un seul point (X,Y,Z) correspondant au point (x,y,z) il faut supposer que les courbes ont $(n^2 - 1)$ points communs, alors les courbes (A) n'ont plus qu'un point commun, variable avec le point (x,y,z) et qui est le point (X,Y,Z). Les $(n^2 - 1)$ points communs aux deux courbes (A) sont des points fixes (**).

Si les courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ sont du second ordre et ont trois points communs, la transformation est quadratique birationnelle, alors à la droite

$$kx + ly + mz = 0$$

(*) Voyez sur ces transformations un mémoire de Cayley, *On the rational transformation between two spaces*, P. L., t. III; et un mémoire de M. E. Amigues, *Sur les transformations du second degré dans les figures planes* (*N. A. M.*, 1877).

(**) Lorsque $n > 2$, les fonctions f_1, f_2, f_3 ont encore à remplir d'autres conditions, pour l'examen desquelles nous renvoyons aux ouvrages cités de Salmon ou de Clebsch.

correspond la conique :

$$kf_1 + lf_2 + mf_3 = 0$$

passant par les points fixes.

Considérons la transformation quadratique qui correspond aux formules :

$$\frac{x}{f_1} = \frac{y}{f_2} = \frac{z}{f_3}.$$

Nous avons alors

$$\frac{kx + ly + mz}{kf_1 + lf_2 + mf_3} = \frac{k'x + l'y + m'z}{k'f_1 + l'f_2 + m'f_3} = \frac{k''x + l''y + m''z}{k''f_1 + l''f_2 + m''f_3}.$$

Si les points fixes P, Q, R sont réels et distincts, on peut choisir k, l, m, k', l', m', k'', l'', m'' de manière que

$$kf_1 + lf_2 + mf_3 = 0, \; k'f_1 + l'f_2 + m'f_3 = 0, \; k''f_1 + l''f_2 + m''f_3 = 0,$$

soient les équations des couples de droites

(PQ, PR) (QR, QP) (PR, QR)

qui passent par les points fixes. Prenons le triangle PQR pour triangle de référence, alors ces formules deviennent

$$\frac{kx + ly + mz}{YZ} = \frac{k'x + l'y + m'z}{XZ} = \frac{k''x + l''y + m''z}{XY}.$$

Les droites, représentées par les équations

$$kx + ly + mz = 0, \; k'x + l'y + m'z = 0, \; k''x + l''y + m''z = 0,$$

peuvent être choisies pour côtés du triangle de référence de la première figure, alors les formules de transformation sont :

$$\frac{x}{YZ} = \frac{y}{XZ} = \frac{z}{XY},$$

ou

$$xX = yY = zZ.$$

On retombe ainsi sur les formules de la transformation par points réciproques de M. G. de Longchamps.

Si l'on veut mettre en évidence les constantes qu'on a fait entrer dans les coordonnées (x, y, z), (X, Y, Z) on écrit ces formules de la manière suivante

$$\frac{xX}{p} = \frac{yY}{q} = \frac{zZ}{r}.$$

Le théorème de M. G. de Longchamps, énoncé plus haut, porte sur un point différent de celui que nous venons d'exa-

miner, savoir sur la détermination de la classe de la courbe transformée. Mais pour la démonstration de ce théorème nous renvoyons le lecteur aux sources citées (*).

(A suivre.)

Voici, au sujet des transformations, quelques renseignements bibliographiques touchant les travaux qu'elles ont provoquées.

M. Ed. Dewulf dans une note « sur les transformations géométriques des figures planes, d'après les mémoires publiés par M. Cremona et des notes inédites. » (*B. M.* V, 1873, p. 206-240) a donné la liste suivante des auteurs dont les travaux, à cette date, étaient postérieurs à ceux de M. Cremona :

Cayley. — A memoir on the rational transformations between two spaces (*P. L.*, III, 1870, p. 136).

Nöther. — Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen (*Math. Annalen*, III, 1870, p. 164).

Zur theorie der eindeutigen ebenen Transformationen (*Math. Annalen*, V, 1872, p. 635).

Rosanes. — Ueber diejenigen rationalen Substitutionen welche rationale Umkehrung zulassen (*J. C.* LXIII, 1871).

Clebsch. — Zur theorie der Cremona'schen Transformationen (*Math. Annalen*, IV, 1871, p. 490).

Samuel Roberts. — On professor Cremona's transformation between two planes (*P. L.*, IV, 1872, p. 121).

Depuis lors, les transformations géométriques ont fait l'objet de recherches extrêmement multipliées; sans vouloir entrer ici dans un essai de nomenclature sur ces travaux, voici, à titre de renseignement, une liste assez étendue, mais encore très incomplète, de ceux d'entre eux qui ont été publiés dans ces dernières années.

Bertini. — Sopra una classe di transformationi univoche involutorie (*Annali di mathématica*, t. VIII, 1874, et *B. M.*, 2me série, t. I, 1877.

L. Cremona. — 1° An Example of the method of deducing a surface from a plane figure (*Trans. Royal Soc. Edinb.*, 1884).

2° On a geometrical transformation of the fourth order in space of three dimensions, the inverse transformation being of the sixth order. (*Trans. Royal Irish Acad.*, 1884).

3° Sulle trasformazioni razionali nello spazio. (*Annali di matematica*, série 2, t. V).

4° Sopra una trasformazione del sesto grado dello spazio a tre dimensioni la cui inversa è del 5e grado (*P. L.*, 1884).

T.-A. Hirst. — 1° On quadric transformation (*Q. J.*, 1881).

2° On Cremonian congruences (*P. L.*, V, XIV, 1883).

3° On congruences of the Third Order and Class (*P. L.*, 1885).

Le Paige. — Sur quelques transformations géométriques uniformes. *Bulletin de l'Ac. de Belgique*, 1882.)

P.-H. Schoute. — 1° Application de la transformation par droites symé-

VARIÉTÉS

SUR LES FONDEMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Par M. **G. Milhaud**, professeur de Mathématiques spéciales
au lycée du Havre.

Il n'y a pas bien longtemps que d'Alembert disait à qui voulait apprendre les mathématiques : « Allez de l'avant, la foi vous viendra, » et, aujourd'hui encore, il n'est pas rare de rencontrer, çà et là, des traces des incertitudes passées sur la rigueur de l'analyse infinitésimale. Maintenant que le calcul différentiel ainsi que la théorie des suites infinies sont nettement entrés dans le programme de la classe de

triques à un problème de Steiner (*Bulletin de Darboux*, 2ᵉ série, t. VII, 1883).

2° Sur deux transformations géométriques uniformes. (*A. F.* Congrès de Rouen, 1883).

3° Sur la construction de courbes unicursales par points et tangentes (*Archives néerlandaises*, t. XX, 1885).

4° *Wskundige Opgaven*, t. 2, p. 240, problème 148.

5° Over een paar met elkaar samenhangende involutorische birationeele transformaties (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, t. IX ; *B. M.*, 1886).

I.-S. Vanecek. — 1° Sur l'inversion générale (*Comptes rendus*, 1882 ; *P. L.*, 1882).

2° Explication de la transformation par rayons vecteurs réciproques. (*A. F.* Congrès de Rouen, 1883).

3° Sur la transformation des figures polaires réciproques (*Mém. Soc. Sc. Liège*, t. XII).

I.-S. et M.-N. Vanecek. — Sur un mode de transformation dans l'espace (*Comptes rendus*, 1882 et 1883).

R. Sturm (de Münster). Beispiele zu den Cremona'schen ebenen Transformationen (*Mathem. Ann.*, t. XXVI).

A. Pepoli. Sopra un problema delle trasformazioni Cremoniane (*Atti del Collegio degli Ingegneri et Arch. di Palermo*, 1884).

F. Aschieri. La trasformazione quadratica doppia di spazio e la sua applicazione alla geometria dello spazio non euclideo (*Rend. Istit. Lomb.*, 1881).

G. de Longchamps. 1° Étude d'une transformation réciproque (*J. S.* 1882, pp. 49, 77, etc.).

Mathématiques spéciales, on ne jugera peut-être pas inopportun de rassurer complètement nos débutants : c'est à eux que s'adresse cette étude.

I

Il est difficile de dire quel trouble a jeté dans le monde savant l'apparition du calcul infinitésimal de Leibnitz. D'un coup, il semblait qu'il s'agît de rompre avec la vieille rigueur des raisonnements mathématiques. Aux démonstrations d'Euclide, on allait substituer désormais une sorte de voltige ou de jonglerie avec des éléments qui ne répondaient à aucune notion exacte. Sans doute on réussissait ainsi : Leibniz et beaucoup d'autres à sa suite eurent bientôt montré la puissance de ce nouvel instrument de recherche, et, par de nombreuses applications, prouvé son adaptation toute spéciale au monde physique. Mais ces beaux résultats ne pouvaient répondre aux objections qui s'élevaient de toutes parts. Les infiniment petits sont-ils, oui ou non, des êtres ayant une existence définie? — Ou bien faut-il voir en eux de purs

---

2° Transformation plane des quadriques (*J. S.* 1884, p. 193).

M. d'Ocagne. 1° Sur une transformation polaire des courbes planes (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas,* 1883).

2° Sur les transformations centrales des courbes planes (*M.* 1884, pp. 73 et 97).

De Jonquières. 1° Sur les transformations géométriques birationnelles d'ordre *n* (*Comptes rendus*, 19 octobre 1885).

2° Modes de solution d'une question d'analyse indéterminée qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona (*Comptes rendus*, 2 et 9 novembre 1885).

G.-B. Guccia. 1° Formole analitiche per la trasformazione Cremoniana (*Rendi Conti del Circolo Matematico di Palermo*, 1884, 1885, 1886, pp. 24, 50).

2° Sur les transformations géométriques planes birationnelles (*Comptes rendus,* 26 octobre 1885).

3° Teoremi sulle trasformazioni Cremoniane nel piano. Estensione di alcuni teoremi di Hirst sulle trasformazioni quadratiche (*Rendi Conti del Circolo*..., p. 119, 7 février 1886).

Neuberg. *Sur le point de Steiner* (J, S., 1886). *Mémoire sur le tétraèdre.* (Mémoires de l'Ac. de Belgique, 1884). *Wiskundige Opgaven*, t. 2, p. 237, problème 148.

Casey. On cubic transformations *(Royal Irisch Academy*, 1880).

Dewulf. Sur une transformation géométrique générale (A. E. N., 1886).

zéros? — Dans le premier cas, comment peut-on les négliger jamais, sans se laisser accuser de transformer les mathématiques en science d'approximations? Dans le second cas, la distinction et la comparaison des infiniment petits deviennent choses illusoires...

On se divise en partisans et adversaires des nouveaux calculs. On entasse d'un côté objections sur objections : les réponses ne se font pas attendre mais le débat reste ouvert. L'émotion est bien loin de se calmer. Le bruit que font les infiniment petits franchit les limites du monde savant, les Parisiens font sur eux une chanson, dit Montucla, et vont rire au théâtre aux dépens d'un mathématicien bien connu, le marquis de l'Hopital, tout comme les Athéniens avaient ri jadis du géomètre Méton, mis sur la scène par Aristophane (1).

Tout ce tapage venait-il de ce qu'une grande révolution se produisait dans les sciences mathématiques? N'était-il pas plutôt une simple conséquence de ce que la notion de l'infiniment petit avait de vague, de bizarre, et de presque mystérieux dans l'imagination du public, et dans l'esprit même des mathématiciens? Tous les premiers, par l'idée imparfaite qu'ils s'en faisaient, ils contribuaient à faire voir dans ces éléments « des êtres singuliers qui tantôt jouent le rôle de véritables quantités tantôt doivent être traitées comme absolument nulles et semblent par leurs propriétés équivoques tenir le milieu entre la grandeur et le zéro, entre l'existence et le néant » (2).

Le Hollandais Nieuwentyt ayant reproché à Leibniz de considérer comme égales des quantités dont la différence est infiniment petite, Leibniz eut manifestement quelque peine à se défendre. Sa première réponse où il appelait ses infiniment petits des incomparables, et les assimilait au grain de sable, qu'on peut négliger près de la grandeur du globe terrestre, était bien plus faite pour troubler les esprits que pour les rassurer. La conception qu'elle donnait de l'infini-

---

(1) Hœfer, *(Histoire des Mathématiques)*.

(2) Carnot *(Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal)*.

ment petit était d'autant plus dangereuse qu'elle était plus accessible à tous : elle se propagea rapidement, c'est celle, par exemple, qu'on trouve développée très nettement, sans restriction, dans le dictionnaire de Trévoux.

D'un autre côté, quelques-uns pensèrent que la rigueur mathématique exigeait, pour justifier la suppression d'un infiniment petit dans un calcul, une valeur rigoureusement nulle à cet élément. Newton avait déjà dit : « Il faut entendre par la dernière raison des quantités évanouissantes, la raison qu'ont entre elles des quantités qui diminuent non pas avant de s'évanouir ni après qu'elles sont évanouies, mais au moment même où elles *s'évanouissent.* »

Euler fit un pas de plus en déclarant qu'il faut voir dans les infiniment petits de véritables zéros. La méthode du calcul différentiel n'en devint ni plus claire ni plus nette.

Après tous les travaux du XVIII[e] siècle, Lagrange juge qu'il est impossible d'atteindre la rigueur mathématique avec toute méthode fondée sur les infiniment petits, et il essaie d'établir dans la théorie des fonctions analytiques « les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies. » Cette tentative, en substituant aux méthodes directes de Newton ou de Leibniz une voie détournée, qui devait conduire aux mêmes résultats, bien loin de clore le débat était une sorte de capitulation. Carnot dans ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* a semblé d'abord comprendre que toutes les difficultés apparentes venaient de ce que la notion de l'infiniment petit avait encore de vague, mais les éclaircissements qu'il a donnés sur ce point, si nets et si précis, n'ont pas suffi pour lui-même à détruire le fantôme de cette mystérieuse métaphysique. Il a voulu chercher dans les dessous de la méthode ce qui la justifie, et a cru y parvenir en montrant que les erreurs introduites ne sont que provisoires et doivent être finalement compensées puisque les infiniment petits ne subsistent pas dans les résultats. En réalité, comme l'a très bien dit M. Ch. de Freycinet, c'est làune façon de prouver, de vérifier, et non d'expliquer une vérité.

Ainsi il faut avouer que si, pour avoir une idée nette de la méthode infinitésimale, on s'adresse aux inventeurs eux-mêmes des nouveaux calculs, ou à ceux qui, jusqu'au commencement de ce siècle, en ont étudié la nature, on se sent bien mal à l'aise après cette consultation. Mais aujourd'hui, qu'on ouvre les traités de Duhamel ou de M. Bertrand, et je me trompe fort ou on sera frappé d'une chose, non pas que la métaphysique du haut calcul est enfin expliquée, mais plutôt que le haut calcul n'implique pas une métaphysique spéciale (1). *(A suivre.)*

QUESTION PROPOSÉE

218. — On considère une strophoïde oblique S ayant pour point double le point O. Les tangentes en O ont, pour bissectrices des angles qu'elles forment, deux droites Δ, Δ' qui rencontrent S, respectivement aux points P, P'.

Démontrer les propriétés suivantes : 1° La projection de O sur PP' est un point Q situé sur S; 2° le point Q', isotomique de Q sur PP' (c'est-à-dire symétrique de Q par rapport au milieu de PP') appartient à l'asymptote réelle de S; 3° cette asymptote est parallèle à la droite qui joint O au milieu de PP'; 4° si du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit un cercle Δ, les tangentes issues des points P, P' à ce cercle se coupent en quatre points situés sur S.

(G. L.)

(1) L'Historique précédent n'a pas la prétention d'être complet. Plus d'un livre paru au XVIIIe siècle porte déjà les marques d'une grande rigueur; mais, en tous cas, aucun n'avait pu exercer une influence suffisante pour dissiper le trouble des esprits.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 2374-7.

SUR LES FOCALES D'UNE SURFACE
DU SECOND ORDRE
CIRCONSCRITE A UNE QUADRIQUE DONNÉE

Par M. **V. Rioux**, professeur au lycée de Nantes.

(*Suite*, voir p. 25).

3. — **Chacune des valeurs de λ, racine de l'équation (*) est une fonction des coordonnées du pôle du plan P et du paramètre K (1).** — On peut d'après cela se proposer le problème suivant :

Problème. — *Étant données une quadrique* (E) *et une surface homofocale* (A), *trouver une surface inscrite dans* (A) *suivant une conique* (C′) *et admettant comme focale une conique* (C) *située sur* (E), *les plans* P′ *et* P *des deux coniques ayant le même pôle par rapport aux deux surfaces.*

Prenons encore pour quadrique (E) un ellipsoïde, et soit (x_1, y_1, z_1) le pôle du plan (P). La conique (C) est représentée par les équations

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$P = \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1 = 0.$$

De même la conique (C′) sera représentée par les deux équations

$$A = \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1 = 0,$$

$$P' = \frac{xx_1}{a^2 - \lambda} + \frac{yy_1}{b^2 - \lambda} + \frac{zz_1}{c^2 - \lambda} - 1 = 0.$$

Une surface inscrite dans (A) suivant la conique (C′) a pour équation :

$$\varphi' = \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1 - KP'^2 = 0.$$

(*) Si donc on se donne aussi la valeur de λ on pourra déterminer la valeur de K.

Formons l'équation
$$\varphi' + \mu S = 0,$$
dans laquelle
$$S = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = 0$$
et exprimons, comme précédemment, que l'intersection de la surface inscrite et de la sphère de rayon nul se compose de deux courbes planes et nous aurons les trois conditions :
$$\frac{\dfrac{x_1^2}{a^2 - \lambda}}{1 + \mu(a^2 - \lambda)} + \frac{\dfrac{y_1^2}{b^2 - \lambda}}{1 + \mu(b^2 - \lambda)} + \frac{\dfrac{z_1^2}{c^2 - \lambda}}{1 + \mu(c^2 - \lambda)} - \frac{1}{K} = 0,$$
$$\frac{\alpha x_1}{a^2 - \lambda + \dfrac{1}{\mu}} + \frac{\beta y_1}{b^2 - \lambda + \dfrac{1}{\mu}} + \frac{\gamma z_1}{c^2 - \lambda + \dfrac{1}{\mu}} - 1 = 0,$$
$$\frac{\alpha^2}{a^2 - \lambda + \dfrac{1}{\mu}} + \frac{\beta^2}{b^2 - \lambda + \dfrac{1}{\mu}} + \frac{\gamma^2}{c^2 - \lambda + \dfrac{1}{\mu}} - 1 = 0.$$
Si dans les deux dernières équations on désigne par x, y, z les coordonnées courantes α, β, γ, on voit immédiatement que si on pose
$$\frac{1}{\mu} - \lambda = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \mu = \frac{1}{\lambda},$$
ces deux équations deviennent celles de la conique (C).

Pour cette valeur de μ, on trouve :
$$\frac{1}{K} = \frac{\lambda x_1^2}{a^2(a^2 - \lambda)} + \frac{\lambda y_1^2}{b^2(b^2 - \lambda)} + \frac{\lambda z_1^2}{c^2(c^2 - \lambda)}.$$
La surface représentée par l'équation
$$\left[\frac{\lambda x_1^2}{a^2(a^2 - \lambda)} + \frac{\lambda y_1^2}{b^2(b^2 - \lambda)} + \frac{\lambda z_1^2}{c^2(c^2 - \lambda)}\right]\left[\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1\right]$$
$$- \left[\frac{xx_1}{a^2 - \lambda} + \frac{yy_1}{b^2 - \lambda} + \frac{zz_1}{c^2 - \lambda} - 1\right]^2 = 0 \qquad (5)$$
est par suite une surface inscrite dans (A) suivant la conique (C'), et admettant comme focale la conique (C).

Comme λ est un paramètre arbitraire, on a ainsi obtenu l'équation générale des quadriques admettant comme focale la conique (C).

Remarque. — Dans l'équation du premier paragraphe
$$\varphi + \lambda S = 0,$$

λ est un paramètre du degré -2 et si on pose $\lambda = -\frac{1}{h^2}$, la condition (1) détermine la valeur de K à laquelle correspond la surface circonscrite à (E) qui admet comme focale l'intersection de la surface

$$\frac{x^2}{a^2 - h^2} + \frac{y^2}{b^2 - h^2} + \frac{z^2}{c^2 - h^2} - 1 = 0$$

et du plan

$$\frac{xx_1}{a^2 - h^2} + \frac{yy_1}{b^2 - h^2} + \frac{zz_1}{c^2 - h_1} - 1 = 0.$$

En se reportant à la question inverse qui précède, on peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si deux surfaces homofocales du second degré sont coupées par des plans* P *et* P′ *de même pôle suivant des coniques* (C) *et* (C′), *on peut toujours circonscrire, à l'une quelconque suivant la conique qui s'y rapporte, une quadrique admettant comme focale l'autre conique.*

4. — Développons l'équation (5), par rapport à l'une des variables, par exemple par rapport à z, et dans ce cas multiplions les deux membres par $(c^2 - \lambda)$, nous obtenons

$$\left[\frac{\lambda x_1^2}{a^2(a^2 - \lambda)} + \frac{\lambda y_1^2}{b^2(b^2 - \lambda)} - \frac{z_1^2}{c^2}\right]z^2 - 2z_1\left(\frac{xx_1}{a^2 - \lambda} + \frac{yy_1}{b^2 - \lambda} - 1\right)z$$
$$+ \frac{\lambda z_1^2}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1\right) + (c^2 - \lambda)\psi = 0,$$

en désignant par ψ, une fonction entière d'x, y et de z, indépendante de $c^2 - \lambda$.

Si maintenant nous faisons $\lambda = c^2$, nous avons l'équation (6)

$$\left[\frac{c^2 x_1^2}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{c^2 y_1^2}{b^2(b^2 - c^2)} - \frac{z_1^2}{c^2}\right]z^2 - 2z_1\left(\frac{xx_1}{a^2 - c^2} + \frac{yy_1}{b^2 - c^2} - 1\right)z$$
$$+ z_1^2\left(\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - 1\right) = 0, \qquad (6)$$

qui représente une surface particulière admettant (C) pour focale.

Cette surface coupe le plan des xy suivant la conique.

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0,$$

qui est la focale de (E) située dans le plan des xy.

Pour $\lambda = b^2$ et $\lambda = a^2$, on aurait deux autres surfaces passant par les deux autres focales de (E) et admettant (C) pour focale.

Soit B la surface représentée par l'équation (6), on voit que chacune des surfaces (E) et (B) passe par une focale de l'autre. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Étant données une conique* (C) *située sur une quadrique* (A) *et une focale* (C′) *de cette quadrique, on peut toujours faire passer par* (C′) *une quadrique* (A′) *admettant comme focale la conique* (C).

On peut observer que si (C) est une conique à centre, ce centre est nécessairement celui de la quadrique (A′) et son plan P un plan principal de cette quadrique. Les axes de (A′) sont donc la normale au plan de (C) en son centre et les axes de cette conique.

En cherchant les axes de la surface (A′) dont l'un est connu en direction, on obtiendra en direction, ceux de la conique (C).

D'autre part, on pourra calculer directement la longueur de l'axe perpendiculaire au plan P ; on connaîtra ainsi une racine de l'équation aux carrés des demi-axes de la surface (A′), ce qui permettra de calculer les deux autres racines.

Ce calcul fait, on obtiendra facilement les longueurs des demi-axes de la focale en question.

On a donc ainsi une méthode pour calculer les axes d'une conique à centre, placée sur une quadrique dont on connaît une focale.

Nota. — On trouve encore d'autres propositions plus générales sur les surfaces homofocales dans une brochure de M. Darboux, intitulée : *Sur les Théorèmes d'Ivory, etc.*, publiée en 1872, chez Gauthier-Villars.

QUELQUES QUESTIONS

RELATIVES A L'ÉTUDE DES POINTS INVERSES

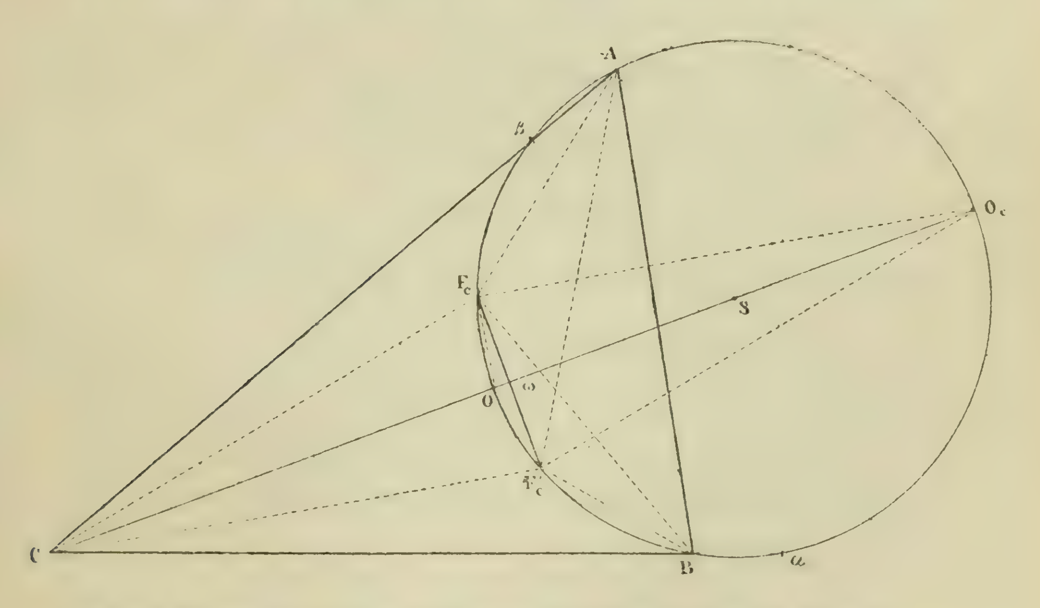
Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 28.)

5. — *Trouver, dans le plan d'un triangle* ABC, *deux points inverses* F_c, F'_c *tels que la ligne qui les joint soit vue de chaque sommet sous le même angle*, ou

Trouver une conique inscrite dans un triangle et telle que la ligne qui joint les foyers $F_cF'_c$ *soit vue de chaque sommet sous le même angle.*

Joignons les trois sommets aux points F_c, F'_c et, pour construire la figure, supposons d'abord que les points $F_cF'_c$ soient à l'intérieur de ABC, que le quadrilatère $F_cF'_cBA$ soit convexe



et que F_c soit situé dans l'intérieur du triangle F'_cAC.

D'après l'hypothèse, nous avons

$$F'_cAF_c = F'_cBF_c = F_cCF_c, \text{ soit } \gamma \text{ cet angle.}$$

On a :

$$AF_cB = 180^0 - F_cAB - F_cBA = 180^0 - \frac{A+\gamma}{2} - \frac{B-\gamma}{2}$$
$$= \frac{180^0 + C}{2}$$

de même $$AF''B = \frac{180^0 + C}{2}$$

mais O étant le centre du cercle inscrit et O_c celui du cercle ex-inscrit tangent au côté AB, on a

$$AOB = \frac{180^0 + C}{2}$$
$$AB_cO = \frac{180^0 - C}{2}$$

Donc les points A, F_c, O, F'_c, B, O_c sont sur la même circonférence décrite sur CO_c comme diamètre, dont l'équation est :

$$c\gamma^2 - (a - b)\beta\gamma + (a - b)\alpha\gamma - c\alpha\beta = 0. \qquad (4)$$

Mais on a : $$F_cAC = \frac{A - \gamma}{2},$$
$$F_cCA = \frac{C - \gamma}{2};$$

d'où $$F_cAC - F_cCA = \frac{A - C}{2};$$

on a, de même, $$F'_cAC - F_cCA = \frac{A - C}{2}.$$

Ainsi F_c et F'_c appartiennent au lieu des points K tels que la différence des angles KAC et KCA soit égale à $\frac{A - C}{2}$.

Ce lieu est une hyperbole équilatère qui passe en C, en A, en O, et en O_b; elle a son centre au milieu de CA et son équation est :

$$(c - a)\beta^2 + b\beta\gamma - (c - a)\alpha\gamma - b\alpha\beta = 0. \qquad (5)$$

L'angle que la direction d'une des asymptotes fait avec CA est : $90^0 - \left(\frac{A - C}{4}\right)$.

F_c et F'_c sont donc déterminés par l'intersection des courbes représentées par les équations (4) et (5).

Si l'on retranche (5) de (4) il vient

$$(\beta - \gamma)\left((b - c)\alpha + (a - c)\beta - c\gamma\right) = 0$$

la droite

$$(b - c)\alpha + (a - c)\beta - c\gamma = 0 \qquad (6)$$

contient donc aussi les points F_c, F'_c.

Comme F_c et F'_c sont de part et d'autre de CO qui est un diamètre du cercle (4) et que les angles F_cCO, F'_cCO sont égaux, il est clair que la droite (6) doit être perpendiculaire à CO et que F_c et F'_c sont symétriques par rapport à CO.

La droite (6) coupe CO_c en son milieu, c'est donc la diagonale du losange qui a pour autre diagonale CO_c et pour direction des côtés : CB et CA.

Remarque. — F_c et F'_c sont aussi sur l'hyperbole équilatère lieu des points K tels que

$$KBC - KCB = \frac{B - C}{2}$$

dont l'équation est

$$(c - b)\alpha^2 - (c - b)\beta\gamma + a\alpha\gamma - a\alpha\beta = 0. \qquad (7)$$

Nous aurions de même deux points F_b, F'_b qui seraient l'intersection de la droite

$$(c - b)\alpha - b\beta + (a - b)\gamma = 0 \qquad (8)$$

perpendiculaire élevée au milieu de BO_b et du segment capable de $\frac{180 + B}{2}$ décrit sur AC — segment contenant le point O — et deux autres points F_a, F'_a qui appartiennent à la droite

$$- a\alpha + (c - a)\beta + (b - a)\gamma = 0, \text{ etc.} \qquad (9)$$

Etudions les trois droites (6), (8) et (9).

$F_bF'_b$, $F_cF'_c$ se coupent au point $a, (c-b), -(c-b)$ milieu de O_bO_c

$F_cF'_c$, $F_aF'_a$ — — $-(a-c), b, (a-c)$ — O_cO_a

$F_aF'_a$, $F_bF'_b$ — — $(b-a), -(b-a), c$ — O_aO_b.

Les coordonnées de ω milieu de CO_c sont c, c, $(a + b - 2c)$.

Pour que F_c et F'_c existent, il faut que la droite (6) et le cercle (4) se coupent en des points réels; en éliminant γ on trouve

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2c(a + b) - a^2 - b^2 - c^2 \pm \frac{2}{\sqrt{p}} S \sqrt{2c - p}}{2(a - c)(b - c)}$$

la condition de réalité est donc

$$2c > p \quad \text{ou} \quad 3c > a + b.$$

Si l'on suppose (ce que nous ferons désormais) $a > b > c$, on aura évidemment

$$3a > b + c, \quad \text{donc} \quad F_a, F'_a \quad \text{existent toujours.}$$

On a aussi

$$3b > a + c \quad \text{car cela peut s'écrire} \quad 2b > a - b + c$$

or
$$a - b < c,$$
donc
$$a - b + c < 2c,$$
et comme $2b > 2c$ on a, à fortiori
$$2b > a - b + c.$$

Donc F_b, F'_b existent toujours.

F_c, F'_c n'existent au contraire que si $3c > a + b$.

Cherchons la valeur de l'angle

$$F_cAF'_c = F_cBF'_c = F_cCF'_c = \gamma;$$

nous avons dans ce qui précède les éléments nécessaires, mais il est plus élégant de chercher cette valeur directement, d'autant plus que cela constitue une autre méthode pour résoudre la question proposée.

D'après la relation connue entre les sinus des angles que trois droites concourantes issues des sommets font avec les côtés d'un triangle, on a :

$$\sin ACF_c \times \sin CBF_c \times \sin BAF_c = \sin F_cCB \times \sin F_cBA \times \sin F_cAC$$

ou

$$\sin \frac{C-\gamma}{2} \sin \frac{B+\gamma}{2} \sin \frac{A+\gamma}{2} = \sin \frac{C+\gamma}{2} \sin \frac{B-\gamma}{2} \sin \frac{A-\gamma}{2}$$

ou

$$\frac{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{B-\gamma}{2} \sin \frac{A-\gamma}{2}}{\sin \frac{B+\gamma}{2} \sin \frac{A+\gamma}{2}}$$

d'où, après transformations

$$\cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{p}{2c}$$

$$\cos \gamma = \frac{p-c}{c}$$

et

$$\cos C - \cos \gamma = \frac{(c-a)(b-c)p}{abc}$$

si α, β sont respectivement les angles $F_aAF'_a$, $F_bBF'_b$ on a

$$\text{séc}^2\frac{\alpha}{2} + \text{séc}^2\frac{\beta}{2} + \text{séc}^2\frac{\gamma}{2} = 4$$

$\frac{p-a}{a}$, $\frac{p-b}{b}$ sont toujours plus petits que 1 :

$$\frac{p-c}{c} < 1 \quad \text{revient à} \quad 3c > a + b.$$

On retrouve donc les résultats déjà obtenus au sujet de la possibilité du problème.

On a toujours

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{2a} < \cos^2\frac{C}{2};$$

donc F_a et F'_a sont à l'extérieur du triangle.

On a aussi

$$\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{p}{2b} < \cos^2\frac{C}{2};$$

donc F_b et F'_b sont aussi à l'extérieur du triangle.

On a

$$90^\circ > F_aAF'_a = 180^\circ - F_aBF'_a = 180^\circ - F_aCF'_a$$

et

$$90^\circ > F_bBF'_b = 180^\circ - F_bAF'_b = 180^\circ - F_bCF'_b.$$

La conique inscrite qui a :

F_a, F'_a pour foyers est une ellipse toujours réelle ;
F_b, F'^b — — hyperbole ;
F_c, F'_c — — ellipse réelle si l'on a :
$a + b < 3c$ et imaginaire dans le cas contraire; elle est le cercle inscrit, lorsque $a + b = 3c$. L'équation de ces trois courbes est facile à obtenir ; celle qui a F_c, F'_c pour foyers par exemple, est

$$a^2(b-c)^2\alpha^2 + b^2(a-c)^2\beta^2 + c^4\gamma^2 - 2c^2b(a-c)\beta\gamma - 2c^2a(b-c)\alpha\gamma - 2ab(b-c)(a-c)\alpha\beta = 0,$$

ou

$$\sqrt{a(b-c)\alpha} + \sqrt{b(a-c)\beta} + c\sqrt{\gamma} = 0.$$

(A suivre.)

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 34).

3. Points inverses (M, M_2). — Étant donné un point M (x, y, z) dans le plan du triangle de référence, nous appellerons *point inverse de* M (*) et nous noterons par la lettre M_2 (**) un point (x_2, y_2, z_2) dont les coordonnées normales vérifient les formules :

$$xx_2 = yy_2 = zz_2,$$

qui deviennent en coordonnées barycentriques :

$$\frac{\alpha\alpha_2}{a^2} = \frac{\beta\beta_2}{b^2} = \frac{\gamma\gamma_2}{c^2}.$$

Ces points sont ainsi dénommés parce que les coordonnées normales de l'un des points sont proportionnelles aux inverses des coordonnées de l'autre.

On a donné, des points inverses, un grand nombre de propriétés ; voici les principales (***) :

(*) Les points inverses ont reçu différents noms : Ils ont été appelés *points arguésiens* et points *conjugués isogonaux* par M. Neuberg (*M.* 1881, p. 154) ; *points réciproques* et *points correspondants* par M. H. Brocard (*A. F.* Alger 1881. Rouen 1883) ; *points confocaux*, par quelques auteurs anglais ; *points conjugués par droites symétriques*, par M. Schoute. Ces dénominations ne sont plus usitées et le terme de *points inverses* créé par M. le colonel Mathieu (*N. A. M.* 1865, p. 393) est aujourd'hui le seul employé.

(**) Nous verrons en traitant des points réciproques (§ 7) la raison de cette notation.

(***) On peut consulter sur les points inverses :

STEINER. — (*A. G.* t. XIX, p. 37) *Gesammerte Werke*, t. 1 ; p. 191.

J. A. MATHIEU. — *Etude de géométrie comparée* (*N. A. M.* 1865, p. 393 et suivantes).

P. H. SCHOUTE. — BULLETIN DE DARBOUX, 2me série. VI et VII ; ARCHIVES NÉERLANDAISES, t. XX : *Sur la construction des courbes unicursales par points et par tangentes.*

J NEUBERG. — (*M.* 1881, p. 154). — *Mémoire sur le tétraèdre* (1884, p. 10.

H. BROCARD. — (*A. F.* Rouen 1883. Alger 1881.)

1° Les droites qui joignent les projections orthogonales de deux points inverses sur deux côtés du triangle de référence sont antiparallèles par rapport à ces côtés ;

2° Deux points inverses peuvent toujours être considérés comme les foyers d'une conique inscrite au triangle. *Réciproquement*, toute conique inscrite dans le triangle de référence, a pour foyers deux points inverses; d'où l'on conclut que :

Les projections orthogonales de deux points inverses sur les côtés de ABC, sont six points d'une même circonférence, ayant pour centre le milieu de la droite qui joint les points inverses considérés;

3° La droite qui joint deux points et celle qui joint leurs points inverses sont vues des sommets du triangle sous des angles égaux ou supplémentaires ;

4° Les angles γ, γ' sous lesquels un côté BC du triangle est vu de deux points inverses satisfont toujours à l'une des quatre équations :

$$\operatorname{tg}(\gamma \pm \gamma') \pm \operatorname{tg} A = 0.$$

Construction des points inverses. — Pour construire le point inverse d'un point M, on prend les symétriques des droites AM, BM, CM par rapport aux bissectrices correspondantes ; ces trois droites concourent au point M_2 inverse de M.

Les droites AM et AM_2, BM et BM_2, CM et CM_2 sont dites *isogonales* par rapport au triangle de référence (*J. M. E.*, 1886, p. 245).

A. Morel. — *Etude du cercle de Brocard* (*J. E.* 1883, p. 100-101.)

E. Catalan. — *Théorèmes et problèmes* (6e édit. livre II, p. 52 et 53).

G. de Longchamps. — *Généralités sur la géométrie du triangle* (*J. E.* 1886, p. 110.)

J. Casey. — *A Sequel to Euclid* (4e édit. 1886, pp. 165-167.)

E. Vigarié. — *Droites et points inverses* (*J. E.* 1885, pp. 33-36, 54-60), 76, 171, 224, 244, 248, 265, 267.)

E. Lemoine. — *Quelques questions relatives à l'étude des points inverses* (*J. S.* 1887, p. 28).

T. C. Simmons. — *Companion to weekly problem papers*, 1887. Dans cet ouvrage qui paraîtra très prochainement et qui est dû à MM. J. Milne, T. C. Simmons, R. F. Davis et Genèse, M. T. C. Simmons a résumé (chap. V, 40 pages), la géométrie du triangle avec beaucoup de clarté et une grande précision.

4. Points réciproques d'ordre p (M, M_p). — Nous appellerons, avec M. de Longchamps (*J. E.* 1886, p. 109), *points réciproques d'ordre* p et nous noterons par les lettres M, M_p deux points (α, β, γ) $(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p)$ dont les coordonnées vérifient les égalités :

$$\frac{\alpha\alpha_p}{a^p} = \frac{\beta\beta_p}{b^p} = \frac{\gamma\gamma_p}{c^p}, \qquad (1)$$

p désignant un nombre entier positif ou négatif. Nous allons étudier les différents points obtenus en faisant varier p (*).

5. Points réciproques d'ordre zéro (M, M_0). — Si dans les formules (1) nous faisons $p = 0$ nous avons

$$\alpha\alpha_0 = \beta\beta_0 = \gamma\gamma_0. \qquad (2)$$

Ce sont les relations qui lient les points réciproques proprement dits. Ces points, que nous désignerons par les lettres M, M_0 (**), ont été imaginés par M. de Longchamps pour servir de base à une méthode de transformation nouvelle et il les a appelés points réciproques (*Sur une nouvelle méthode de transformation en geométrie*, *A. E. N.*, 1866, p. 321-325). Nous conserverons cette dénomination en convenant de dire *points réciproques* simplement, quand nous aurons en vue les *points réciproques d'ordre zéro*.

Construction des points réciproques d'ordre zéro. — Pour construire le point M_0 réciproque de M, on joint AM et l'on prend le *point isotomique* M'_0 de M', c'est-à-dire le point M'_0 symétrique de M' par rapport au milieu de BC. La droite AM'_0 et les droites analogues issues des deux autres sommets de ABC concourent au point M_0 cherché.

Les formules (2) très simples qui lient entre eux les points

(*) Pour la partie concernant les points réciproques des différents ordres, on peut se reporter aux *Généralités sur la géométrie du triangle*, par M. de Longchamps (*J. E.*, 1886, pp. 109-114, 127-129.)

(**) M. Neuberg avait proposé d'appeler *points conjugués isotomiques* (M., p. 150) les points réciproques d'ordre zéro; depuis, M. Neuberg s'est rallié à ce dernier terme. On appelle maintenant, comme l'a proposé M. de Longchamps, *points isotomiques* deux points qui, sur un même côté du triangle de référence, sont symétriques par rapport au milieu de ce côté.

réciproques, ont été retrouvées dans d'autres cas, notamment dans la transformation arguésienne de M. Saltel (*); mais la priorité nous paraît acquise à M. de Longchamps qui, au Congrès du Havre (*A. F.*, 1877) l'a réclamée en sa faveur.

Les points réciproques possèdent beaucoup de propriétés (**); nous indiquerons les principales en parlant des droites et des triangles associés à ces points.

6. Points réciproques du premier ordre (M, M_1). — Ces points qui n'ont pas encore été étudiés et dont les coordonnées barycentriques vérifient les égalités

$$\frac{\alpha\alpha_1}{a} = \frac{\beta\beta_1}{b} = \frac{\gamma\gamma_1}{c}$$

ont été imaginés par M. de Longchamps (*J. E.*, p. 112-114).

Construction des points réciproques du premier ordre. — 1° *Méthode de M. de Longchamps.* — On joint AM et l'on fait passer une circonférence par les points A, M' et par le point ou la bissectrice extérieure de l'angle A coupe le cercle circonscrit à ABC. Cette circonférence coupe BC en un second pont M'_1 (***). La droite AM'_1 et les analogues issues de B, C, concourent au point M_1 réciproque du premier ordre de M.

2° *Méthode de M. Neuberg* (*J. E.* 1886, p. 113). — On prend sur AB et AC des longueurs AH, AK respectivement égales ou proportionnelles à BM', CM'. La droite qui joint A au milieu de HK et les deux analogues concourent encore au point M_1 réciproque du premier ordre de M.

7. Points réciproques du second ordre (M, M_2). —

(*) On peut consulter *Sur la transformation arguésienne:* Philippin. (*N. C. M.* I. 1874-1875, p. 127). — Saltel. *Divers Mémoires sur le principe arguésien.* (*Mémoire in-8° de l'Académie royale de Belgique*, t. XII et XIII).

(**) Voir sur ce sujet : G. de Longchamps. *Sur une nouvelle méthode de transformation en géométrie* (*A. E. N.* III, 1886, p. 321-325). *Essai sur la géométrie de la règle* (*J. E.* 1885, pp. 61-66). *Généralités sur la géométrie du triangle* (*J. E.* 1886, p. 110). — Schoute (*B. M.* (2) VI. 1882, p. 159), indique (§§ 11-12) la méthode de transformation par *points réciproques* et sa différence avec celle par *points inverses*.

(***) Comparez avec la question donnée au concours général de mathématiques élémentaires (année 1885).

Les formules (1), pour $p = 2$, deviennent

$$\frac{\alpha\alpha_2}{a^2} = \frac{\beta\beta_2}{b^2} = \frac{\gamma\gamma_2}{c^2}.$$

Elles montrent que les points M, M_2 ne sont autres que les *points inverses* dont nous avons indiqué la construction et les principales propriétés (§ 3). Bien que ces points rentrent complètement dans la théorie générale des points réciproques du second ordre, nous leur conservons, à cause de leur importance, le nom de *points inverses* et nous les notons par les lettres M, M_2.

Nous allons indiquer maintenant, comment on peut construire le point réciproque, d'un ordre quelconque, correspondant à un point donné.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. NEUBERG.

Sur le tracé des tangentes. — La construction de la tangente à certaines courbes, d'après la méthode de M. Godefroy *(J. M. S.* 1885, p. 200; *Schoute, sur la construction de courbes unicursales)* peut être généralisée dans les termes suivants.

Soit M un point mobile, faisant partie d'une figure variable dont les points A, B.... sont assujettis à glisser sur les courbes fixes (A), (B), .. et dont les droites *a*, *b*,... roulent sur des courbes fixes (*a*), (*b*),... Pour trouver, à un moment donné, la tangente à la trajectoire du point M, on peut supposer que les points A, B,... se déplacent sur les tangentes correspondantes des courbes (A), (B),. . et que les droites *a*, *b*,... tournent autour de leurs points de contact actuels avec les lignes (*a*), (*b*),,.. Dans ces nouvelles conditions, il arrive souvent que le point M décrit une conique. Si les éléments principaux (centre, foyers, asymptotes, directrice...) de la conique ne sont pas immédiatement connus, on détermine la tangente en M en cherchant, soit quatre nouvelles positions

du point M sur la conique, soit deux positions de M et les tangentes correspondantes.

Prenons, par exemple, la *Kreuzcurve* traitée p. 202 (*). Pour trouver la tangente en M, nous faisons tourner la droite PQ autour du point μ considéré comme fixe. D'après un théorème assez connu, le point M décrit alors une hyperbole dont les asymptotes sont les parallèles à OP, OQ, menées par μ; donc la tangente en M est symétrique de la droite $M\mu$ par rapport à MP. Pour raisonner *directement*, on observera que la droite mobile autour de μ détermine sur OP, OQ, deux divisions homographiques; donc les droites PM, QM sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques dont les sommets sont les points Y_∞, X_∞ à l'infini sur OQ et OP, et le lieu de Q est une conique passant par Y_∞, X_∞. Les tangentes en ces points (ou les asymptotes) sont les positions des rayons PM, QM qui correspondent aux cas où M est confondu avec Y_∞ ou X_∞; ce sont donc les droites μY_∞ et μX_∞. Nous connaissons ainsi trois points M, Y_∞, X_∞ de la conique et les tangentes aux deux derniers points. Le triangle $MY_\infty X_\infty$ doit être homologique avec celui des tangentes en ses sommets, ce qui permet de construire la tangente en M.

Sur la détermination du point de contact d'une droite mobile, avec son enveloppe. — Le principe énoncé ci-dessus s'applique aussi à ce nouveau problème. Comme application, nous choisissons l'exemple de la page 201 (voir la figure). Lorsque le point M, au lieu de glisser sur U, se déplace sur la tangente TMT' (T' désigne le point de rencontre avec OY), la droite PQ enveloppe une parabole touchant OX en T, OY en T'; par conséquent, les droites PT', QT et celle qui joint O au point de contact μ de QP avec son enveloppe, concourent en un même point (**).

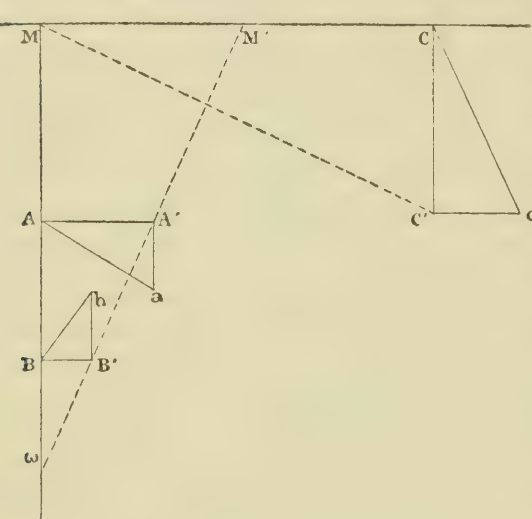
Au lieu de se baser sur une propriété connue, on peut observer que les points M, P, Q marquent sur MT, OX, OY

(*) Le lecteur est prié de se reporter à la figure de la p. 202 (*Journal*, 1886).

(**) La lettre de M. Neuberg est antérieure à la publication de la note de M. d'Ocagne sur ce problème (*J. M. S.* 1886, p. 256), mais le défaut d'espace nous a empêché de la publier plus tôt. G. L.

des divisions homographiques semblables; donc PQ enveloppe une conique touchant OX, OY aux points qui correspondent au point O considéré comme une position particulière de Q ou P.

On peut encore résoudre la question au moyen de la règle suivante qui est la corrélative de celle de Roberval ou de celle du quadrilatère des vitesses : Si l'on connaît les vitesses Aa, Bb de deux points A, B, d'une droite mobile d, cherchez-en les composantes AA′, BB′ normales à d; la droite A′B′ coupera d en un point C qui est le point de d avec son enveloppe. En effet, le déplacement infiniment petit de d résulte d'un glissement de cette droite sur elle-même et d'une rotation autour de son point de contact avec l'enveloppe ; donc les extrémités des composantes, normales à d, des vitesses de ses différents points sont sur une droite passant par ce point de contact. Cette conclusion n'est pas infirmée, lorsque les points considérés A et B n'ont pas une distance invariable; car dans ce cas, il faut leur supposer sur d une vitesse de glissement indépendante de celle qui résulte du glissement général de d.



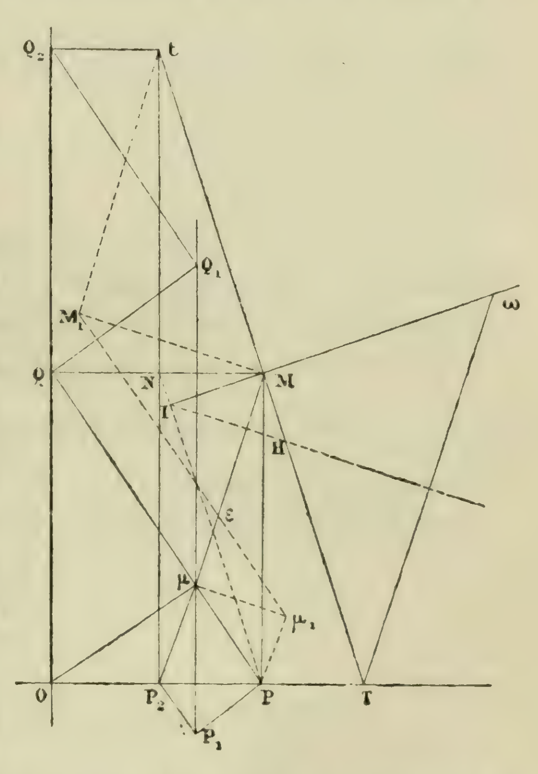
Appliquons cette règle à la courbe de la page 201. Si la vitesse de M sur U est représentée par MT, les composantes MP (ou QO) et PT figurent les vitesses des points Q et P, qui déterminent la droite mobile PQ. Soient QQ′ et PP′ les projections de QO et PT sur les perpendiculaires élevées en Q et P sur PQ; la droite Q′P′ détermine le point cherché μ.

Sur la détermination du rayon de courbure. — Soit M un point décrivant une courbe (M). Supposons qu'on parvienne a déterminer la vitesse MM′ de ce point sur sa trajectoire, ainsi que la vitesse Aa d'un point A de la normale. Alors, si

AA′ est la projection de Aa sur la perpendiculaire élevée en A sur MA, le point de rencontre ω des droites MA, M′A′ sera le centre de courbure de la courbe (M); car c'est le point de contact de la normale MA avec son enveloppe.

Il arrive souvent qu'avec la vitesse de M, on connaisse aussi la vitesse Cc d'un point C de la tangente MM′. Dans ce cas, soit CC′ la composante de Cc perpendiculaire à MC; les droites Mω, MC ayant même vitesse angulaire, les triangles ωMM′, MCC′ sont semblables, d'où l'on conclut que M′ω est perpendiculaire à MC′.

Appliquons ces notions à la *Kreuzcurve* Représentons par μP la vitesse de μ sur la circonférence O; l'angle μOP figurera la vitesse angulaire de la normale Oμ (*). Menons par μ une perpendiculaire P_1Q_1 à OP; l'angle $P\mu P_1$ indiquera la vitesse angulaire de la tangente PQ. La rotation de PQ autour de μ communique aux points P,Q des vitesses PP_1, QQ_1 perpendiculaires à PQ et limitées à $Q_1\mu P_1$; mais ce ne sont là que des composantes des vitesses totales de P et Q dirigées suivant OP et OQ. Donc il reste à tirer P_1P_2 et Q_1Q_2 parallèles à PQ, pour avoir les vitesses totales. Les points P et Q entraînent avec eux les droites PM.



QM; il résulte de là que la vitesse de M est la diagonale Mt du rectangle construit sur les droites MN = PP_2, Nt = QQ_2. On voit facilement que QQ_2 = OQ et que Mμ passe par P_2;

(*) Il serait plus exact de dire que la vitesse angulaire est mesurée par tang μOP.

donc Mt, parallèle à PN est symétrique de MP_2 par rapport à MP, et l'on pourrait encore obtenir la tangente en M en prenant $PT = PP_2$ et joignant M à T.

Déterminons maintenant la vitesse angulaire de la tangente Mt, ou celle de la droite $M\mu$ qui lui est égale. Nous connaissons les vitesses μP, Mt de deux points de $M\mu$; soient $\mu\mu_1$, MM_1 leurs projections sur des perpendiculaires à $M\mu$, et ε le point de rencontre des lignes $\mu_1 M_1$, μM. ε sera le point de contact de la droite $M\mu$ avec son enveloppe, et l'angle $\mu\varepsilon\mu_1$ indique la vitesse angulaire de $M\mu$. Donc si l'on fait l'angle $Mt\omega$ ou $MT\omega$ égal à $\varepsilon\mu_1\mu$, le second côté de cet angle coupe la perpendiculaire élevée en M sur Tt au centre de courbure ω de la Kreuzcurve.

On voit facilement que $\mu\mu_1$ égale la hauteur MI du triangle MNP (ou celle de MPP_2), et que MM_1 est le double de cette hauteur. Par conséquent $\mu\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon M$; ce qui conduit à ce théorème assez curieux :

Les droites qui joignent les points correspondants de la Kreuzcurve et du cercle générateur O, *sont divisées dans un rapport constant* 2 : 1 *par leur enveloppe.*

Pour construire le point ω, il suffit de mener MI perpendiculaire à NP, de prendre sur MT une longueur $MH = \frac{1}{3} M\mu$ et d'abaisser la perpendiculaire $T\omega$ à la droite IH.

La longueur du rayon de courbure est donnée par la formule

$$M\omega = \frac{MT.M\mu}{3MI}.$$

Extrait d'une lettre de M. H. Brocard.

Voici, au sujet du *folium double* (*J. M. S.* 1886, p. 251) et du *trifolium droit* (*ibid.* p. 254) quelques remarques très simples ; j'ignore si elles sont nouvelles.

Ces deux courbes sont les podaires de deux points de l'axe d'une hypocycloïde à trois rebroussements.

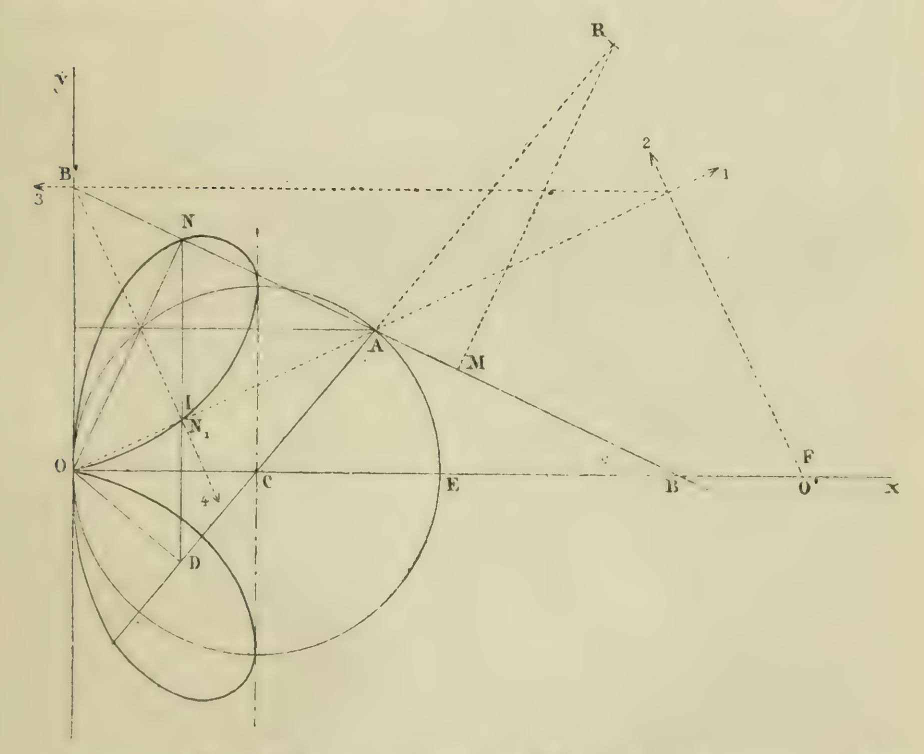
Cette propriété est une conséquence de la définition géomé-

trique de cette hypocycloïde comme enveloppe d'une droite obtenue en menant, de chaque point A d'une circonférence, une droite BAB′ faisant avec un diamètre fixe OCB le même angle que la corde OA.

Le point de contact M de la droite BAB′ avec son enveloppe s'obtient en projetant sur BAB′ l'extrémité R du rayon CA prolongé d'une longueur AD double de AC (*Bulletin de la Société math. de France*, t. I, 1873, p. 224-226).

Le cercle C est tangent intérieurement à l'hypocycloïde; OCB est un axe de symétrie de cette courbe, et si l'on prend OF = 2. OE = 4. OC = $4a$, le point O est son sommet, C son centre, et F un point de rebroussement.

Cela posé, le *folium double* N est la podaire du point O, et le *trifolium droit* N′ est la podaire du point E.



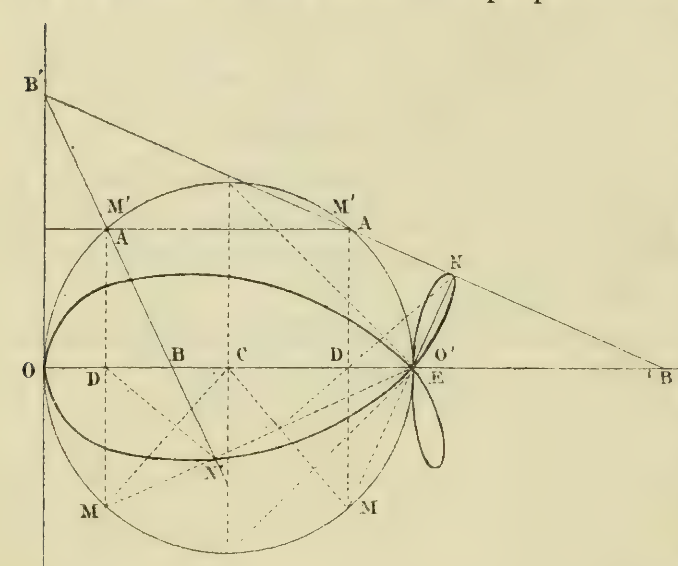
Joignant N et N′ au milieu de OM, on a la normale à ces podaires en N et N′.

La figure 108 (*) se transforme alors ainsi, et le point N

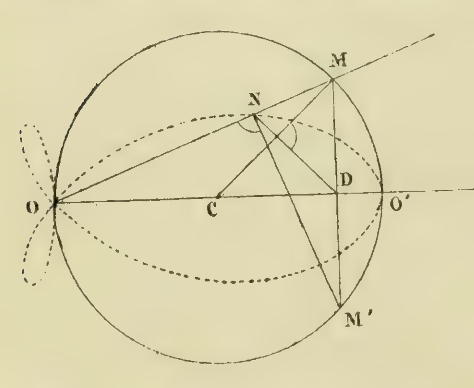
(*) *Journal*, 1886; p. 251.

s'obtiendra en menant OD perpendiculaire à AC, puis DN parallèle à OY, jusqu'à sa rencontre avec BAB'.

De même, la figure 112 (*) pourra être ainsi modifiée: projeter M en D sur OO' et mener DN perpendiculaire à CM, jusqu'à sa rencontre avec O'M, où recouper O'M par un arc de cercle ayant D pour centre et DM pour rayon.



Ces indications suffisent pour la solution complète de la question 346 que j'ai proposée dans *Mathesis* (Etudier les podaires d'une hypocycloïde à trois rebroussements, le point fixe étant pris sur l'un des axes de l'hypocycloïde, t. IV, 1884, p. 143).



Je ne puis affirmer qu'elles ajoutent quelque chose au paragraphe cité de votre *Traité de Géométrie analytique* (p. 512), ni aux résultats que vous avez réservés au § 130 (*loc. cit.*, p. 281). Je vous les communique donc, à tout hasard.

Enfin, le *trifolium équilatéral*, podaire du point C, donne lieu à une remarque intéressante. Cette courbe est formée de trois boucles égales, et les extrémités A'A'' de deux cordes rectangulaires C'A, CA'' sont à une distance constante A'A'' égale au rayon AC (propriété évidente).

(*) *Journal*, 1886; p. 254.

VARIÉTÉS

SUR LES FONDEMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Par M. **G. Milhaud**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée du Havre.

(*Suite*, voir p. 44.)

II

L'infiniment petit n'est ni une quantité déterminée, ni un zéro, mais une variable qui tend vers zéro, en *restant* constamment inférieure à une quantité donnée ε aussi petite que l'on voudra. C'est un cas particulier de la variable qui a une limite. Les infiniment petits qui interviennent dans les applications du calcul différentiel sont les variations de certaines grandeurs, ou, comme on dit, les accroissements positifs ou négatifs de ces grandeurs. Quand on veut étudier la loi d'un phénomène quelconque, il est souvent commode de donner aux variables d'où dépend le phénomène des accroissements finis, de chercher une relation entre eux, et d'en déduire, en les faisant tendre vers zéro, celle qui relie les éléments du phénomène lui-même. Cela revient en somme à se placer, pour résoudre un problème, dans des conditions différentes de celles que définit l'énoncé, mais qui, suivant la loi de variation continue des éléments qui interviennent dans la question ont pour limites celles du problème.

La relation à établir entre les accroissements finis des variables est une question qui peut présenter telle ou telle difficulté, mais qui en tous cas rentre dans le cadre de l'algèbre élémentaire. Le calcul différentiel donne un ensemble de notations et de règles générales permettant d'en déduire le plus rapidement et le plus simplement possible ce qu'on

peut appeler *la relation limite*, en ce sens qu'elle répond au cas limite de celui qui a fourni la première relation.

Prenons un exemple. Soit à déterminer la tangente en un point M d'une courbe. C'est, par définition, la position limite d'une droite tournant autour du point M de façon qu'un deuxième point de rencontre avec la courbe M′ se rapproche indéfiniment du premier. A la tangente substituons une sécante voisine, MM′, c'est-à-dire une droite faisant avec la tangente un angle infiniment petit. (Cela ne signifie pas un angle tout petit, moindre par exemple qu'un millième de seconde, encore moins un angle nul, mais un angle variable qui va tendre vers zéro).

Un point M de la courbe sera défini, pour simplifier, à l'aide de deux axes rectangulaires ox, oy, par son x, OP, et son y, MP ; et la courbe elle-même sera définie par une relation donnée entre l'x et l'y d'un quelconque de ses points. Si un mobile qui la décrit passe de M en M′, son x augmente de PP′ ou de MQ, son y augmente de MQ. α désignant l'angle que fait la droite mobile MM′ avec la parallèle à ox Mx', le triangle rectangle MM′Q nous donne

$$M'Q = MQ.\operatorname{tg}\alpha$$

M′Q, MQ, les accroissements des éléments x et y se désignent par Δx, Δy. La relation précédente s'écrira donc

$$\Delta y = \Delta x.\operatorname{tg}\alpha$$

ou

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Lorsque Δx tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque M′ se rapproche indéfiniment de M, Δy tend aussi vers zéro si la fonction y est continue ; l'angle α a pour limite l'angle α_1, que fait la tangente avec Mx'. Supposons que le raport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ait une certaine limite K, nous écrirons, pour déterminer α_1, la relation

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = K.$$

Ainsi, soit $y = x^2$, l'équation de la courbe, nous trouverons

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 2x \ (^*).$$

Reprenons maintenant le même problème, et, sans rien changer au fond de la solution, tâchons d'introduire le langage du calcul différentiel. Nous avons trouvé :

$$\Delta y = \operatorname{tg} \alpha . \Delta x,$$

$\operatorname{tg} \alpha$, ayant pour limite $\operatorname{tg} \alpha_1$ peut se désigner par $\operatorname{tg} \alpha_1 + \varepsilon$, ε étant alors une variable qui tendra vers zéro. La relation précédente devient

$$\Delta y = (\operatorname{tg} \alpha_1 + \varepsilon)\Delta x$$

ou, en appliquant à notre exemple,

$$2x\Delta x + \Delta x^2 = \operatorname{tg} \alpha_1 . \Delta x + \varepsilon\Delta x \qquad \text{(A)}$$

Si, pour essayer d'en tirer « la relation limite », on faisait simplement tendre Δx vers zéro, on obtiendrait zéro pour la limite de chaque expression, et on serait conduit à écrire

$$0 = 0,$$

ce qui est juste évidemment, mais n'apprend rien.

Mais considérons attentivement la composition des deux membres de (A). Dans le premier, figure la somme de deux infiniment petits $2x\Delta x$ et Δx^2 de nature essentiellement distincte : le rapport du premier à Δx, ou $2x$, n'est plus un infiniment petit, tandis que le rapport du second à Δx, ou Δx est encore un infiniment petit. Le second membre est composé de la même manière.

Dès lors, si on forme les rapports à Δx des deux membres de (A), et qu'on en cherche la limite, les éléments Δx^2 et $\varepsilon . \Delta x$ ne donnent rien, et en écrivant que les limites sont égales, on aura

$$2x = \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Mais alors, on le voit, il était plus simple, au lieu d'écrire l'égalité (A), d'écrire seulement

$$2x\Delta x = \operatorname{tg} \alpha_1 . \Delta x \qquad \text{(B)}$$

Cela revient à prendre tout de suite l'angle α_1 qui corres-

(*) En demandant de déterminer la position de la tangente à une courbe en un point, on suppose que la tangente ou la position limite de la sécante variable existe. Cette existence est démontrée précisément par le fait que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ou $\operatorname{tg} \alpha$, et par suite α, a une limite.

pond à la tangente, à la condition de substituer en même temps à Δy l'élément $2x.\Delta x$. Cet élément est la *différentielle* de y. On voit qu'elle en est la définition : l'accroissement Δy qui correspond à l'accroissement Δx de la variable arbitraire est la somme de deux parties : l'une, dont le rapport à Δx ne tend plus vers zéro, l'autre dont le rapport à Δx est encore infiniment petit. C'est la première qui est la différentielle. Un calcul élémentaire dont on peut avoir quelque idée par l'exemple précédent donne les différentielles des diverses fonctions de x. Ainsi d'une manière générale, on établit que x^n a pour différentielle $nx^{n-1}\Delta x$; en particulier, celle de x^2 est $2x\Delta x$. La différentielle de y se représente par le symbole dy. Si on remarque que, d'après la définition même, la différentielle de x coïncide avec l'accroissement de x, ou que $\Delta x = dx$, la relation (B) peut s'écrire

$$dy = \mathrm{tg}\alpha_1 . dx.$$

Et nous avons là ce qu'on appelle une équation différentielle. C'est la relation entre les différentielles, au lieu de la relation entre les accroissements. C'est celle qu'un mathématicien eût écrite immédiatement, et voici enfin, en deux mots, le raisonnement tel que l'eût donné la méthode de Leibniz :

La tangente est la droite qui joint deux points infiniment voisins M et M′. Soit α_1 l'angle qu'elle fait avec Mx', le triangle M′QM donne

$$M'Q = \mathrm{tg}\alpha_1 . MQ$$

ou

$$dy = \mathrm{tg}\alpha_1 . dx.$$

Si $y = x^2$, $dy = 2xdx$; on a donc finalement $2x = \mathrm{tg}\alpha_1$.

Au fond, on le voit, il n'y a là qu'un langage nouveau pour une suite d'idées toutes naturelles.

(A suivre.)

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 4400-7.

SUR LA RÉSOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE
DE L'ÉQUATION $x^3 + px + q = 0$.

Par M. **B. Niewenglowski.**

On *vérifie*, dans tous les cours de mathématiques spéciales, que, p et q étant réels et satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0,$$

les racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0, \tag{1}$$

sont proportionnelles à celles de l'équation

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{b}{4} = 0, \tag{2}$$

dans laquelle b désigne un nombre compris entre -1 et $+1$.

Je me propose de donner, de cette proposition, une démonstration *à priori*.

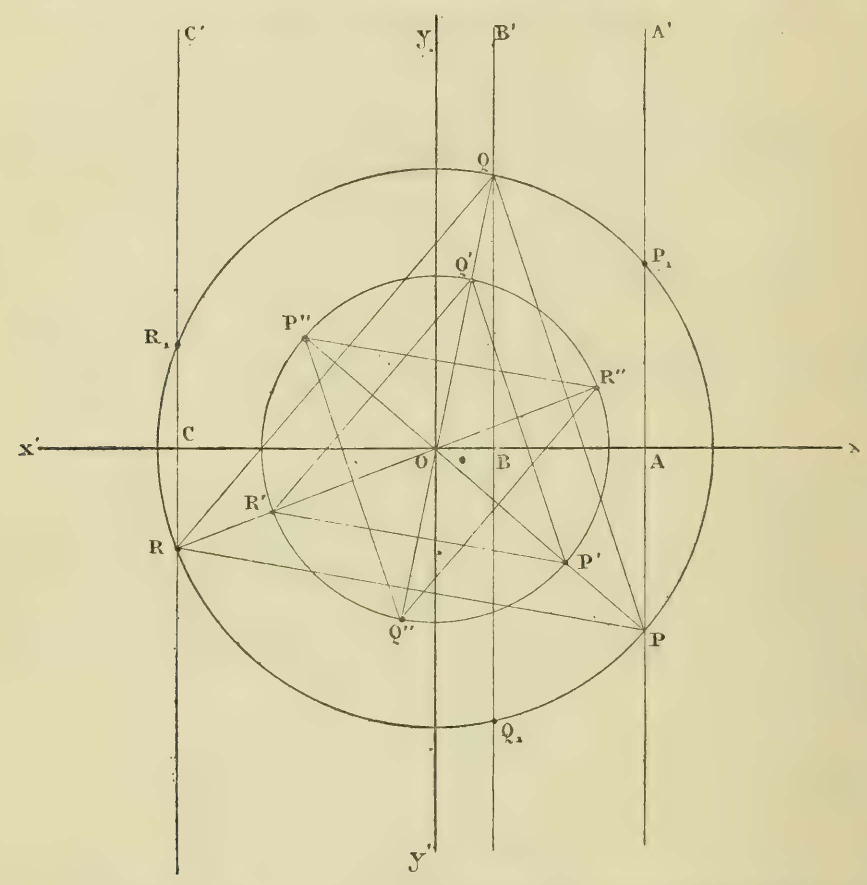
Soient x_1, x_2, x_3 trois nombres réels, inégaux et vérifiant la condition

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \tag{3}$$

Ces nombres sont les racines d'une équation de la forme (1). Traçons deux axes rectangulaires $x'x$, $y'y$; et, en supposant, pour fixer les idées, x_1 et x_2 positifs, prenons $OA = x_1$, $OB = x_2$, $OC = x_3$, puis menons les droites AA′, BB′, CC′ parallèles à $y'y$. Cela posé, on sait construire un triangle équilatéral ayant ses sommets sur trois droites parallèles, et l'on peut se donner arbitrairement la position d'un sommet. Dans ces conditions, le problème a deux solutions, et le centre de chacun des triangles obtenus est, à cause de la relation (3), situé sur $y'y$. Il est évident qu'on peut, dès lors, se donner, sur cette droite $y'y$, la position du centre et déterminer deux triangles équilatéraux PQR, $P_1Q_1R_1$ symétriques par rapport à l'axe des x.

Cela fait, construisons un triangle P′Q′R′ homothétique au triangle PQR et inscrit à un cercle de rayon égal à l'*unité*.

Si l'on fait la même transformation pour le triangle $P_1 Q_1 R_1$, on obtiendra un triangle symétrique de $P' Q' R'$ par rapport à l'axe des x. Il est évident que le triangle $P'Q'R'$ et son symétrique correspondent à une équation de la forme (2). Si α



désigne l'angle de OP (par exemple) avec ox, les distances des sommets P', Q', R' à $y'y$ sont, respectivement,

$$\cos\alpha, \quad \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right), \quad \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right).$$

ou, en posant $3\alpha = a$,

$$\cos\frac{a}{3}, \quad \cos\left(\frac{a}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{a}{3} + \frac{4\pi}{3}\right);$$

et, par suite,

$$x_1 = \lambda\cos\frac{a}{3}, \quad x_2 = \lambda\cos\left(\frac{a}{3} + \frac{4\pi}{3}\right), \quad x_3 = \lambda\cos\left(\frac{a}{3} + \frac{4\pi}{3}\right),$$

λ ayant la valeur $\dfrac{OP}{OP'}$.

Si donc on prend $b = \cos a$, les racines de l'équation (1) seront proportionnelles à celles de l'équation (2).

Mais il convient de remarquer qu'on aurait pu construire le triangle P″Q″R″, homothétique inverse du triangle PQR; dans ce cas, il suffit de remplacer α par $\alpha - \pi$ et de prendre

$$b' = -b \quad \lambda' = \frac{OP}{OP''} = -\frac{OP}{OP'} = -\lambda.$$

On retrouve bien ainsi, par des considérations de géométrie élémentaire, toutes les circonstances que présente le calcul.

On peut encore remarquer que le rayon R du cercle circonscrit au triangle PQR est déterminé par l'équation

$$R^2 = -\frac{2}{3}(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1);$$

ce qui donne $R^2 = -\frac{2p}{3}$, et, par suite,

$$\lambda = \sqrt{-\frac{2p}{3}}.$$

NOTE SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE

$$\frac{1}{b}\int_0^a x\sqrt{x(a-x)}dx$$

Par M. **J. Berthon,** élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

Dans le numéro de décembre 1885 de ce journal (p. 279), à propos de la quadrature des pyriformes. M. de Longchamps évalue géométriquement l'intégrale définie

$$\frac{1}{b}\int_0^a x\sqrt{x(a-x)}dx.$$

Nous nous proposons ici de la déterminer analytiquement.

Le produit $x(a-x)$, x variant de zéro à a, est positif, part de zéro, croît, puis revient à zéro, sa valeur maximum étant d'ailleurs $\frac{a^2}{4}$ pour $x = \frac{a}{2}$. Je puis donc poser :

$$x(a - x) = \frac{a^2}{4} \sin^2 \varphi; \qquad (1)$$

φ variant de o à π, quand x varie de o à a.

De (1), on tire

$$x = \frac{a}{2}[1 \pm \cos \varphi] \qquad dx = \mp \frac{a}{2} \sin \varphi d\varphi.$$

On a donc :

$$\frac{1}{b}\int_0^a x\sqrt{x(a-x)}dx = \mp \frac{a^3}{8b}\int_0^\pi \sin^2 \varphi[1 \pm \cos \varphi]d\varphi.$$

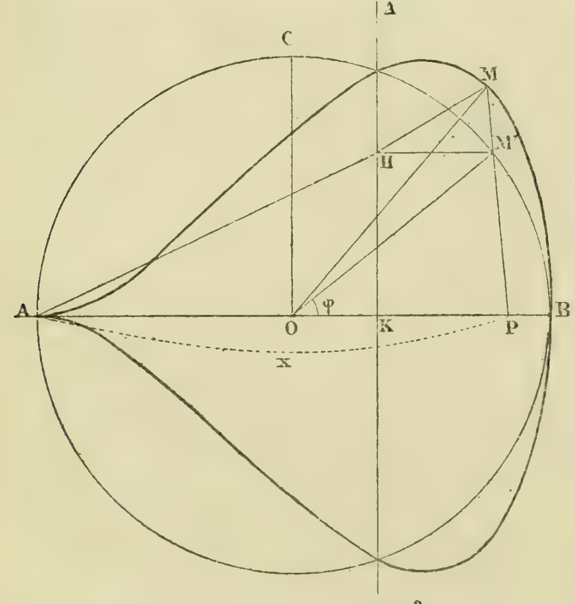
Or,

$$\int \sin^2 \varphi (1 \pm \cos \varphi)d\varphi = \int \sin^2 \varphi d\varphi \pm \int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$= \int \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \pm \int \sin^2 \varphi d \sin \varphi$$

$$= \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \pm \frac{\sin^3 \varphi}{3} + c.$$

Déterminant la constante c de façon que l'intégrale s'annule pour $\varphi = 0$; on trouve $c = 0$.



Nous aurons donc, finalement,

$$\pm \frac{a^3}{8b}\int_0^\pi \sin^2 \varphi [1 \pm \cos\varphi]d\varphi = \mp \frac{\pi a^3}{16b}.$$

Prenant le signe +, et doublant pour avoir l'aire de la courbe toute entière, nous avons, pour l'expression de l'aire des pyriformes, la quantité $\frac{\pi a^3}{8b}$ (*).

(*) J'ai dit, par erreur (p. 280; l. 24) $\frac{\pi a^3}{2b}$; il faut lire $\frac{\pi a^3}{8b}$, comme le trouve ici M. Berthon. G. L.

Cette quantité peut s'écrire $\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2b}$, ce qui démontre que la surface de la pyriforme s'obtient en multipliant celle du cercle par le rapport $\frac{a}{2b}$. Si on suppose $a = b$ on retrouve le théorème démontré géométriquement par M. de Longchamps.

Remarque. — L'angle φ qui m'a servi dans l'intégration précédente a une signification géométrique très simple. Considérons un point de la pyriforme : soient x son abcisse, MP son ordonnée, M′ le point où cette ordonnée rencontre le cercle ; on a :

$$\overline{M'P}^2 = x(a - x)$$

et $M'T = \frac{a}{2} \sin M'OB$, donc $M'OB = \varphi$. L'angle φ n'est autre que l'anomalie excentrique du point du cercle ayant même abscisse que le point correspondant de la pyriforme.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 58).

8. — Problème I. *Sachant trouver le point* M_p, *réciproque d'ordre* p *de* M, *construire le point* M_{-p} *réciproque d'ordre* — p *de* M.

On prend :

1° Le réciproque M_o de M ;

2° Le réciproque $M_{o,p}$ d'ordre p de M_o

3° Le proint réciproque $M_{o,p,o}$ de $M_{o,p}$.

Le point $M_{o,p,o}$, ainsi obtenu, n'est autre que le point M_{-p} cherché.

9. — Problème II. *Sachant trouver le point* M_p *réciproque d'ordre* p *de* M, *construire le point* M_{p+2} *réciproque d'ordre* (p+2) de M.

On prend :

1° Le réciproque $M_{p,o}$ de M_p ;

2° Le point inverse $M_{p,o,2}$ de $M_{p,o}$.

Le point $M_{p,0,2}$ est le point réciproque M_{p+2} d'ordre $(p+2)$ cherché.

10. — Problème général. *Construire le point réciproque* M_p *d'ordre* p *quelconque (positif ou négatif) correspondant à un point donné* M.

Nous savons construire directement les points réciproques d'ordres 0, 1, 2; en appliquant le problème II aux points réciproques d'ordre 0 ou 2, nous obtenons tous les points réciproques d'ordre pair; en l'appliquant aux points réciproques du premier ordre, nous avons les points réciproques d'ordre impair. Le problème I donnant les points réciproques d'ordre négatif, nous pouvons donc construire facilement les points réciproques d'un ordre quelconque.

11. Coordonnées des points réciproques d'ordre quelconque. — Les coordonnées barycentriques d'un point M étant (α, β, γ) celles des points M_0, M_1, M_2..., M_p réciproques des différents ordres seront respectivement :

$$\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right); \quad \left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}\right); \quad \left(\frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma}\right) \cdots \left(\frac{a^p}{\alpha}, \frac{b^p}{\beta}, \frac{c^p}{\gamma}\right).$$

On voit immédiatement qu'on peut obtenir les points réciproques d'ordres pairs positifs et négatifs en partant de M et en prenant alternativement le point réciproque et le point inverse du point précédent; on a, en effet :

$$M_{0,2,0,2,0} = M_{-4} \qquad M_{0,2,0,2,0,2,0} = M_{-6}$$
$$M_{2,0,2} = M_4 \qquad M_{2,0,2,0,2} = M_6.$$

En général (*).

$$M_{0,2,0,2,0,2\ldots,0} = M_{-2p} \qquad M_{2,0,2,0,2,0\ldots,2} = M_{2p}.$$

D'une manière générale on a :

$$M_{m,n,p\ldots,q,r,s} = \begin{cases} M_{s-r+q-\ldots,\pm p\mp n\pm m} & \text{quand le nombre des transformations est } \textit{impair}; \\ \text{ou bien :} & \\ M_{0,s-r+q-\ldots,\pm p\mp n\pm m} & \text{quand le nombre des transformations est } \textit{pair}. \end{cases}$$

(*) Comparez : J. Neuberg, *Mémoire sur le tétraèdre*, 1884, p. 15.

12. Potentiels d'ordre p, associés d'un point donné. — Nous dirons avec M. Neuberg qu'un point M^p $(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p)$ est le potentiel d'ordre p associé d'un point donné M (α, β, γ) lorsque les égalités

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}$$

et

$$\frac{\alpha_p}{A^p} = \frac{\beta_p}{B^p} = \frac{\gamma_p}{C^p}$$

sont vérifiées.

On peut construire directement les *potentiels d'ordre* p *associés à un point donné* en employant une méthode générale (*J.E.* 1886, p. 177-179). Mais cette construction étant un peu longue, nous allons indiquer des constructions particulières pour les potentiels des premiers ordres associés à un point M (*).

13. Construction du deuxième potentiel associé à un point M. — On prend le point M'_0 symétrique de M′ par rapport au milieu de BC et par C on mène une droite qui coupe AB, AM, AM'_0 respectivement en R, P, N, de telle façon que :

$$CN = NR.$$

Par le point P on mène une parallèle à AB qui coupe BC en V. La droite AV et les deux analogues concourent au point M^2 cherché (**).

14. Potentiels proprement dits. — Le cas particulier où

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

présente un intérêt spécial dans la géométrie du triangle. Les points potentiels qui correspondent à ce cas sont les *potentiels proprement dits*.

Si nous remarquons que les coordonnées $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ du centre

---

(*) Pour tout ce qui concerne les points potentiels, on peut consulter le mémoire de M. G. de Longchamps, *Généralités sur la géométrie du triangle* (*J. E.* 1886, p. 177-179, 198-206).

(**) Voir deux autres constructions (*loc. cit.*, 199-201).

de gravité sont égales, les égalités

$$\frac{\alpha}{a^p} = \frac{\beta}{b^p} = \frac{\gamma}{c^p} \text{ peuvent s'écrire } \frac{\alpha\alpha_0}{a^p} = \frac{\beta\beta_0}{b^p} = \frac{\gamma\gamma_0}{c^p}.$$

Elles montrent que *les potentiels proprement dits d'ordre* p *sont les réciproques d'ordre* p *du centre de gravité* G. Pour ce motif, nous appellerons simplement ces derniers, *potentiels d'ordre* p et nous les noterons par la lettre G avec un indice indiquant l'ordre de réciprocité (*).

Nous allons encore construire les potentiels proprement dits du troisième et du quatrième ordre.

15. Construction du troisième potentiel (G_3). — Le troisième potentiel s'obtient en prenant :

1° Le réciproque du centre du cercle inscrit;

2° L'inverse de ce réciproque.

16. Construction du quatrième potentiel (G_4). — La position de ce point s'obtient en prenant :

1° Le réciproque du point de Lemoine;

2° L'inverse de ce point.

17. — La détermination des points réciproques et des points potentiels revient à ce problème.

Trouver sur l'un des côtés d'un triangle un point qui le divise proportionnellement aux p^{mes} *puissances des côtés adjacents.*

Cette question a été résolue par plusieurs géomètres qui en ont donné des solutions très diverses (**) et le lieu des

---

(*) Il faut bien observer que le *potentiel d'ordre* p, *associé d'un point donné* (A, B, C), est celui dont les coordonnées sont (A^p, B^p, C^p) : le mot plus simple *potentiel d'ordre* p (sans autre qualificatif) désigne le *potentiel proprement dit*, point qui a pour coordonnées (a^p, b^p, c^p); a, b, c étant les longueurs des côtés du triangle de référence.

(**) Consulter :

A. Peyronny. — *Construction geométrique du rapport* $\frac{a^p}{b^p}$ (*N. A. M.*, (2) III, 1844, pp. 371-374).

Poudra. — *Problème sur les côtés d'un triangle élevés à des puissances données.* (*N. A. M.* (1), XVI, 1856, pp. 217).

H. Brocard. — *Étude sur un nouveau cercle du plan du triangle* (*A. F.*, Alger, 1881, p. 150).

points du plan du triangle, tels que les droites qui joignent les sommets à ces points divisent les côtés opposés en segments proportionnels aux $p^{\text{ièmes}}$ puissances des côtés adjacents, est généralement une courbe transcendante que M. de Longchamps appelle *Potentielle triangulaire* (*M.*, 1886, pp. 246-248). Cette courbe a d'ailleurs fait l'objet de diverses recherches. M. H. Faure a donné son équation en coordonnées normales (*N. A. M.*, 1863, p. 293). M. Lemoine l'a étudiée au Congrès de La Rochelle (*A. F.*, 1882), et a donné son équation cartésienne, en prenant pour axes deux côtés du triangle, sous la forme :

$$\frac{(ay)^{\log \frac{b}{c}}}{(bx)^{\log \frac{a}{c}}} = (ab - ay - bx)^{\log \frac{b}{a}}.$$

Au Congrès de Nancy (*A. F.*, 1886), M. Lemoine a fait voir que, en coordonnées normales, cette courbe a pour équation :

$$(ax)^{\log \frac{b}{c}} . (by)^{\log \frac{c}{a}} . (cz)^{\log \frac{a}{b}} = 1$$

Enfin M. de Longchamps (*M.* 1886, p. 246) a donné son équation barycentrique sous la forme (*) :

$$\gamma^k = \alpha^{k-1}\beta.$$

Cette courbe présente des propriétés curieuses qui peuvent se résumer ainsi :

1° L'équation de la courbe reste la même en coordonnées normales et en coordonnées barycentriques.

2° La potentielle triangulaire est une courbe *anallagmatique* (**) (sens général) quand on effectue une transformation réciproque d'ordre quelconque.

E. Lemoine. — *Quelques théorèmes* (*J. S.*, 1883, p. 74) (*A. F.*, La Rochelle 1882).

M. d'Ocagne. — *Sur les propriétés segmentaires du triangle* (*N. A. M.*, (3) II, 1883, pp. 497-500).

G. Boubals. — *Problème de géométrie* (*J. E.*, 1885, pp. 31-33).

G. de Longchamps. — *Généralités sur la géométrie du triangle* (*J. E.*, 1886, pp. 127-129, 203).

(*) Dans cette formule la lettre k désigne une constante qui peut être calculée par la formule $c^k = a^{k-1}b$; et, en supposant pour fixer les idées $a < b < c$, on vérifie que : $0 < k < 1$.

(**) Voir *J. S.*, 1882, p. 102.

3° Lorsque a, b, c, vérifient la relation

$$c^r = a^p b^q.$$

r, p, q, désignant trois nombres tels que

$$r = p + q, \qquad (1)$$

k devient un nombre commensurable $\left(k = \frac{r}{q}\right)$ et la potentielle devient une courbe algébrique ayant pour équation

$$\gamma^{p+q} = \alpha^p \beta^q.$$

En particulier, quand $p = q = 1$, la potentielle, comme l'a observé M. Lemoine (A. F. *Nancy*, 1886) devient une conique.

Dans l'hypothèse contraire à l'égalité (1), k est incommensurable et la potentielle est, alors, une courbe transcendante.

Dans le premier cas, elle est *unicursale ;* dans le second, on peut dire qu'elle est du *genre unicursal* et, dans les deux cas, on peut la construire points par points.

4° La potentielle triangulaire passe par un grand nombre de points remarquables : centre de gravité, centre du cercle inscrit, point de Lemoine... et leurs réciproques d'ordre quelconque. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extraits de plusieurs lettres de M. CATALAN.

... L'intéressante Note de M. d'Ocagne me suggère les remarques suivantes :

1° Les constructions de la normale à l'ellipse, indiquées par le jeune et ingénieux Géomètre, sont, peut-être, *moins commodes* que celle où l'on fait usage des foyers.

2° Quoiqu'il en soit, le premier théorème de la page 31 peut être énoncé ainsi :

M, M' *étant deux points correspondants, sur l'ellipse* AB *et sur le cercle* AC (*); *si l'on trace les normales* MR M'R *à ces courbes; le lieu du point* R *est la circonférence décrite du point* O *comme centre, avec* a + b *pour rayon.*

3° Ce théorème, dû à M. d'Ocagne, peut être généralisé.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Soient deux ellipses ayant un axe commun. Soient, sur ces courbes, M, M′ *deux points correspondants; c'est-à-dire, ayant même projection sur l'axe commun. Soient, enfin,* MR, M′R *les normales respectives, en* M, M′. *Le lieu du point* R *est une ellipse dont les axes sont dirigés suivant les axes des courbes données* (*).

Autre chose :

Voici, à propos de séries, une proposition qui peut être utile.

Soit une série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad \text{(A)}$$

On supprime les termes u_α, u_β, u_γ..., *dont les indices vont en augmentant, et qui sont tels que la série auxiliaire*

$$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots$$

soit convergente. Il reste

$$u_1 + u_3 + \ldots + u_{\alpha-1} + u_{\alpha+1} + \ldots u_{\beta-1} + u_{\beta+1} + \ldots \qquad \text{(B)}$$

Cela posé, les séries (A), (B) *sont, simultanément, convergentes, divergentes ou indéterminées.*

Application : On demande si la série

$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \ldots$$

est convergente ou divergente.

Je supprime

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \ldots \text{ (série convergente).}$$

Il reste

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \ldots \text{ (série divergente).}$$

Donc la proposée est *divergente*.

Autre application :

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots \text{ (A) (**)}.$$

(*) Les demi-axes de cette troisième ellipse sont déterminés par les formules

$$A = a + \frac{bb'}{a}, \quad B = b + b'.$$

(**) Voici la loi des termes :

1° *Si* $n = 2^\alpha$, $u_n = \frac{1}{n}$;

2° *Si* n *est impair*, $u_n = \pm \frac{1}{n}$, *selon que* $n = 4\mu \pm 1$;

3° *Si* $n = 2^\alpha i$, i *étant impair*, $u_n = u_i$.

Je supprime

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2.$$

Il reste

$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots \quad (B).$$

Je supprime

$$-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{24}-\ldots=-\frac{2}{3}.$$

Il reste

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}-\frac{1}{15}+\ldots \quad (B').$$

Je supprime

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\ldots=\frac{2}{5}, \text{ etc.}$$

Si l'on continue *indéfiniment* les suppressions, la limite des restes est zéro. Or, on a supprimé

$$2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Donc la série (A) est convergente, et a pour *somme* $\frac{\pi}{2}$.

Voici une question qui intéressera, peut-être, quelques-uns de vos lecteurs.

Pour toute valeur réelle de x,

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{(1+x)(1+x^2+x^4)}+\frac{x^3}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4+x^8)}$$
$$+\frac{x^9}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8+x^{16})}$$
$$+\frac{x^{21}}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}+x^{32})}+\ldots \; (*).$$

Enfin, à propos de questions, en voici une que je crois très difficile à résoudre directement.

Théorème. — *La somme des fractions*

(*) Les exposants sont :
$0=3-3,\quad 3=6-3,\quad 9=12-3,\quad 21=24-3.$

$$(2n-1)\frac{2.3\ldots n}{3.5.7\ldots 2n+1}, \quad (2n-3)\frac{4.5\ldots n}{5.7\ldots 2n-1},$$
$$(2n-7)\frac{6.7\ldots n}{7.9\ldots 2n-3}, \ldots, \text{ égale l'unité.}$$

N.-B. — D'après l'*origine* de ces fractions, la dernière est $\frac{1}{n+1}$ ou $3\frac{1}{n+2}$, selon que n est *pair* ou *impair*.

Pour finir :

1° x *étant compris entre* 0 *et* 1, *on a*

$$\frac{1}{2.3(2+x)^2}+\frac{x^2}{4.5(2+x)^4}+\frac{x^4}{6.7(2+x)^6}+\ldots =$$
$$\frac{1}{2.3.4}-\frac{4x}{3.4.8}+\frac{11x^2}{4.5.16}-\frac{26x^3}{5.6.32}+\ldots$$

2° *Quand* x *surpasse l'unité, la première série reste convergente; mais la seconde devient divergente.*

3° *En conséquence, l'égalité ci-dessus*, vraie *dans le premier cas, est absurde dans le second.*

A-t-on remarqué ce genre de discontinuité ?

BIBLIOGRAPHIE

Histoire des sciences mathématiques et physiques, par M. Maximilien Marie; répétiteur de mécanique, examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique; tome X, de Laplace à Fourier.

Le dixième volume de cette importante publication a pour sous-titre : de Laplace à Fourier. Il contient la fin de la treizième période, celle qui s'étend de Lagrange à Laplace et le développement de la quatorzième période. Celle-ci comprend, pour citer les noms les plus célèbres : Laplace, Legendre, Carnot, Ivory, Meusnier, Mascheroni, Simon Lhuillier. C'est à ce dernier géomètre qu'est dû, pour un triangle sphérique rectangle, le théorême exprimé par l'égalité :

$$\sin^2\frac{a}{2}=\sin^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}+\sin^2\frac{c}{2}\cos^2\frac{b}{2}.$$

Cette relation, comme le fait observer M. Marie, est, dans la géométrie de la sphère, l'analogue du théorème de Pythagore, dans la géométrie plane; elle a été démontrée en 1810, dans les Annales de Gergonne. Nous la citons ici parce qu'elle nous semble constituer un exercice intéressant de trigonométrie sphérique ; mais elle n'est pas, bien entendu, autrement importante.

L'attention, dans la lecture du dixième volume de M. Marie, se portera

principalement : sur la vie de Monge, dont le récit est placé aux premières pages ; sur celle de Laplace, dans laquelle on trouvera (p. 87) une intéressante remarque de M. Marie, relative à la précession des équinoxes ; enfin sur celles de Legendre et de Carnot. On trouvera, dans le chapitre consacré à ce dernier géomètre, sur les infiniment petits et sur les équations différentielles, à propos de l'ouvrage intitulé *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*, une dissertation parfaitement conduite, après laquelle M. Marie conclut que si Carnot n'a pas exprimé sa pensée dans une forme juste, son idee n'était pourtant pas inexacte et c'est, en effet, croyons-nous, le meilleur résumé qu'on puisse faire de l'ouvrage en question (*). G. L.

QUESTIONS D'EXAMEN

4. — *Lieu des centres des coniques tangentes à quatre droites* (**).

On sait que ce lieu est une droite ; cette propriété due à Newton (*C. M. S.*, p. 348) peut s'établir de la manière suivante.

Soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

l'équation d'une conique Γ ; cette courbe sera tangente à la droite représentée par l'équation

$$u_ix + v_iy + w_iz = 0,$$

si l'on a (*loc. cit.*, p. 132)

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & u_i \\ B'' & A' & B & v_i \\ B' & B & A'' & w_i \\ u_i & v_i & w_i & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Les coordonnées(x, y, z) du centre de Γ vérifient les relations

$$Ax + B''y + B'z = 0,$$
$$B''x + A'y + Bz = 0.$$

D'après cela, le déterminant Δ peut s'écrire, en utilisant

(*) A propos des principaux ouvrages de Carnot, nous avons été surpris de ne pas voir cité le *Traité de la corrélation des figures*, que Chasles d'ailleurs a, lui-même, à peine mentionné (Aperçu historique, p. 370).

(**) Voyez les *Examens d'admissibilité et d'admission à l'École polytechnique*, 1886, p. 16. (Croville-Morant, éditeur, 20, rue de la Sorbonne.)

une combinaison naturelle

$$\begin{vmatrix} A & B'' & o & u \\ B'' & A' & o & v_i \\ o & o & A''z + B'x + By & u_ix + v_iy + w_iz \\ u_i & v_i & u_ix + v_iy + w_iz & o \end{vmatrix} = o.$$

Ce déterminant développé donne

$$\frac{(u_ix + v_iy + w_iz)^2}{Av_i^2 - 2B''u_iv_i + A'u_i^2} = \frac{A''z + B'x + By}{B''^2 - AA'}.$$

En donnant à i, dans cette relation, successivement les valeurs 1, 2, 3, 4 et en posant

$$P_i = u_ix + v_iy + w_iz,$$
$$Av_i^2 - 2B''u_iv_i + A'u_i^2 = \rho_i,$$

on a
$$\frac{P_1^2}{\rho_1} = \frac{P_2^2}{\rho_2} = \frac{P_3^2}{\rho_3} = \frac{P_4^2}{\rho_4} = -\frac{1}{t}$$

et, par suite

$$\Sigma_i = Av_i^2 - 2B''u_iv_i + A'v_i^2 + tP_i^2 = o. \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

En éliminant A, B'', A' et t entre les quatre équations linéaires et homogènes

$$\Sigma_1 = o, \quad \Sigma_2 = o, \quad \Sigma_3 = o, \quad \Sigma_4 = o,$$

on a l'équation du lieu sous la forme

$$\begin{vmatrix} u_1^2 & v_1^2 & 2u_1v_1 & (u_1x + v_1y + w_1z)^2 \\ u_2^2 & v_2^2 & 2u_2v_2 & (u_2x + v_2y + w_2z)^2 \\ u_3^2 & v_3^2 & 2u_3v_3 & (u_3x + v_3y + w_3z)^2 \\ u_4^2 & v_4^2 & 2u_4v_4 & (u_4x + v_4y + w_4z)^2 \end{vmatrix} = o. \qquad (1)$$

Ce déterminant se simplifie et l'on a :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1^2 & 2u_1v_1 & w_1(2u_1x + 2v_1y + w_1) \\ u_2^2 & v_2^2 & 2u_2v_2 & w_2(2u_2x + 2v_2y + w_2) \\ u_3^2 & v_3^2 & 2u_3v_3 & w_3(2u_3x + 2v_3y + w_3) \\ u_4^2 & v_4^2 & 2u_4v_4 & w_4(2u_4x + 2v_4y + w_4) \end{vmatrix} = o. \qquad (2)$$

Ce dernier déterminant est du premier degré en x et y; il représente la droite de Newton. Le déterminant (1) donne le lieu cherché sous une forme remarquable, bien connue (Paul Serret, *Geométrie de Direction*, p. 71 ; et *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IV, p. 145),

$$\Sigma_1^4 \lambda_1 P_1 = o,$$

équation dans laquelle on donne aux coefficients λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 des valeurs telles que les coefficients des termes du second degré disparaissent.

Il reste à reconnaître que la droite trouvée passe par les points milieux des diagonales du quadrilatère formé par les quatre droites données. La vérification directe serait assez pénible, mais on peut éviter cet effort de calcul en prenant deux des droites proposées pour axes de coordonnées et en observant que la forme

$\Sigma_1^4 \lambda_1 P_1^2$ *devient* $\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 + \mu_3\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1\right)^2 + \mu_4\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1\right)^2$

μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 étant déterminés de telle sorte que les termes du second degré disparaissent; en effet, une forme linéaire reste, après la transformation linéaire, une forme linéaire.

On obtient alors une équation qui est celle que l'on trouve habituellement (*C. M. S.*, p. 351).

$$x(q - q') + y(p - p') + \frac{1}{2}(p'q' - pq) = 0,$$

et sur laquelle on vérifie sans peine la propriété en question.

On peut aussi utiliser la forme remarquable

$$\Sigma_1^4 \lambda_1 P_1^2 = 0, \qquad (N)$$

donnée à l'équation de la droite de Newton, pour reconnaître que, dans les coniques correspondant à l'équation précédente (lorsque les paramètres λ sont quelconques), deux sommets opposés du quadrilatère sont conjugés. De là on conclut facilement, comme l'a fait M. P. Serret *(loc. cit.)* la propriété de la droite de Newton. Il suffit de considérer l'équation (N) comme représentant une conique constituée par la droite de Newton et par la droite de l'infini.

QUESTION 124

Solution par M. J. Rat, élève de Mathématiques spéciales, au Lycée Saint-Louis (classe de M. Piéron).

On fait une section droite dans un cylindre parabolique. Par le foyer de cette section, on mène dans le plan de la courbe une perpendiculaire à l'axe, qui coupe la courbe en deux points A *et* B. *Au point* A, *on mène dans le plan de la parabole la normale* AM *à cette courbe; puis par* AM, *on fait passer des*

plans variables. Lieu des foyers des paraboles, suivant lesquelles ces plans coupent le cylindre. Ce lieu est une courbe plane.

(Amigues.)

Prenons pour plan des xy le plan de la parabole de section droite, pour axes des x et des y l'axe et la tangente au sommet de cette parabole et pour axe des z la perpendiculaire à son plan, menée par son sommet. L'équation du cylindre parabolique est alors :

$$y^2 - 2px = 0.$$

L'équation de la normale AM du plan des xy est d'autre part :

$$x + y - \frac{3p}{2} = 0,$$

et l'équation générale des plans passant par cette normale est :

$$x + y - \frac{3p}{2} + \lambda z = 0.$$

Soient α, β, γ les coordonnées d'un des points du lieu. Ce point se trouve dans un des plans passant par la normale AM à la parabole de section droite. On a donc :

$$\alpha + \beta - \frac{3p}{2} + \lambda\gamma = 0. \qquad (1)$$

Exprimons que le point (α, β, γ) est foyer de la courbe de section du cylindre par le plan, c'est-à-dire que les tangentes menées du point (α, β, γ) à la courbe de section forment une conique de l'espèce cercle. Cela revient à exprimer que le plan donné

$$x + y - \frac{3p}{2} + \lambda z = 0$$

est un plan cyclique du cône circonscrit à la surface, et ayant pour sommet le point (α, β, γ).

Ce cône se compose évidemment de deux plans perpendiculaires au plan des xy et a pour équation :

$$(y^2 - 2px)(\beta^2 - 2p\alpha) - [p(x + \alpha) - \beta y]^2 = 0,$$

et l'équation générale des quadriques passant par l'intersection du plan considéré et du cône précédent est :

$$(y^2 - 2px)(\beta^2 - 2p\alpha) - [p(x + \alpha) - \beta y]^2$$
$$+ \left(x + y + \lambda z - \frac{3p}{2}\right)(Ax + By + Cz + D) = 0.$$

Il s'agit d'exprimer que parmi ces quadriques se trouve une sphère, ce qui donne les conditions :

$$B - 2p\alpha = A - p^2 = \lambda C, \qquad (2)\ (3)$$

$$2p\beta + A + B = 0, \qquad (4)$$

$$C + A\lambda = 0, \qquad (5)$$

$$C + B\lambda = 0. \qquad (6)$$

Si entre les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), on élimine A, B, C, et λ, on aura les équations d'une ligne, qui représentera le lieu cherché. Les équations (4), (5), (6), donnent :

$$A = B = -p\beta.$$

L'équation (1) donne :

$$\lambda = -\frac{\alpha + \beta - \frac{3p}{2}}{\gamma}.$$

substituant dans (5), on en tire :

$$C = -A\lambda = \frac{-p\beta\left(\alpha + \beta - \frac{3p}{2}\right)}{\gamma}.$$

Enfin substituant dans (2) et (3) ces valeurs de A, B, C et λ, on a les équations du lieu, qui sont, en remplaçant α, β, γ par x, y, z :

$$x = \frac{p}{2}$$

et

$$y\left(x + y - \frac{3p}{2}\right)^2 + (y + p)z^2 = 0.$$

La première de ces équations montre que le lieu est une courbe située dans un plan parallèle au plan des yz, mené par le foyer de la parabole de section du cylindre parabolique par le plan des xy.

Pour avoir l'équation de cette courbe dans ce dernier plan, je fais $x = \frac{p}{2}$, dans la seconde équation du lieu, et j'ai ainsi :

$$y(y - p)^2 + z^2(y + p) = 0,$$

d'où

$$z^2 = \frac{-y(y - p)^2}{y + p}.$$

De cette équation on déduit immédiatement la forme du

lieu. Il est compris tout entier entre les droites $y = 0$ et $y + p = 0$, et cette dernière droite est une asymptote du lieu. Enfin le lieu est tangent à l'axe des z à l'origine O, il est symétrique par rapport à Oy, et il a un point double isolé, le point A de Oy, tel que $OA = OB = p$.

On déduit de ces observations diverses les formes du lieu lequel est une cubique constituée par une branche unique de forme conchoïdale.

NOTA. — Solution analogue par M. Grolleau, élève au lycée de Marseille.

VARIÉTÉS

SUR LES FONDEMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Par M. **G. Milhaud**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée du Havre.

(*Suite*, voir p. 44.)

III

En dernière analyse, les principes de la méthode infinitésimale se ramènent donc à deux notions : celle de *limite* et de *variation continue*. Etudions séparément chacune de ces deux idées, et demandons-nous si, en fondant sur elle tout un développement nouveau, les sciences mathématiques pouvaient encourir le reproche d'altérer le caractère de leurs méthodes.

Je rappelle la définition de la limite.

Une quantité variable X a pour limite une quantité déterminée A, quand on peut, si petit qu'il plaise à l'esprit de choisir un nombre ε, trouver, dans la variation de X, un instant (*) à partir

(*) Ce mot est employé ici dans un sens purement logique et n'implique nullement l'idée du temps.

duquel la différence A — X reste moindre, en valeur absolue, que ε. Malgré la longueur de cet énoncé, la définition est des plus claires. Elle indique nettement la propriété spéciale de la variation de X, qui s'exprimera par ces mots : X, a pour limite A. Elle ne vise aucune loi de variation définie, n'exige pas que X augmente ou diminue constamment. Quelle que soit la façon dont X varie, le fait de la limite consiste exclusivement en ce que la différence entre une quantité fixe et la variable peut devenir et rester moindre que toute quantité donnée. Cette propriété de X pourrait être incompatible avec telle ou telle loi de variation, mais évidemment elle ne l'est pas avec la seule autre condition imposée a X, à savoir que X varie, puisqu'au contraire elle l'exige.

Considérons l'exemple suivant :

$$X = \frac{1}{x} \cdot [x(x + 2)]$$

Si l'on fait tendre x vers zéro, le premier facteur $\frac{1}{x}$ croît indéfiniment ; cela veut dire qu'il peut dépasser n'importe quelle valeur, pourvu qu'on prenne x suffisamment petit ; le second facteur $x(x + 2)$ peut devenir, dans les mêmes conditions, aussi petit qu'on voudra. Le produit de ces deux facteurs, X, a pour limite 2. En effet, pour toute valeur de x, le produit

$$\frac{1}{x} \times x(x + 2)$$

a la même valeur que

$$X' = x + 2.$$

X et X' sont deux variables constamment égales. Ce sont deux expressions différentes d'une même quantité variable : la limite de cette quantité se voit, sans difficulté, sur l'expression X'. On reconnaît en effet, immédiatement, que $x + 2$ deviendra aussi voisin de 2 qu'on voudra ; 2 est donc la limite de X.

Il est essentiel de remarquer que ce raisonnement ne cache aucun mystère ; quand, de l'égalité $X = X'$, nous déduisons

cette autre

$$\lim X = \lim X',$$

nous ne sous-entendons aucun principe, ni postulat. Cette égalité est exigée par la définition même de la limite. Il y a identité entre les quantités X et X'; la loi de variation est la même, mais elle s'exprime de deux manières différentes, l'une plus commode que l'autre pour mettre en évidence l'existence de la limite, voilà tout.

X pourrait encore s'écrire sous forme de fraction $\frac{x(x+2)}{x}$, dont les deux termes tendent vers zéro et nous retrouvons alors, dans cet exemple, le type des rapports étudiés dans le calcul différentiel. On dit quelquefois, en considérant la première forme de X, le produit de zéro par l'infini donne 2, ou, en considérant la seconde, le quotient de zéro par zéro donne 2. Ce sont là des façons de parler, qui ne signifient rien absolument par elles-mêmes. On connaît la fameuse preuve de la création (du père Gratry), fondée sur ce que la multiplication de zéro par l'infini donne quelque chose de déterminé. Si jamais quelqu'un a pris cette plaisanterie au sérieux, il n'a certainement rien compris à la question. Sans doute, il peut arriver à un mathématicien d'employer telle ou telle locution bizarre, mais il faut alors avoir bien précisé le véritable sens qu'il y met. Ainsi, s'il dit jamais, à propos de l'exemple précédent, que zéro multiplié par l'infini donne 2, ce qu'il entend par là se réduit à cette idée si nette : On peut assigner à x une valeur assez petite pour que la quantité $\frac{1}{x}x(x + 2)$ diffère de 2, d'aussi peu qu'on voudra.

Qu'est-ce qui peut donc obscurcir des idées aussi claires et aussi précises ? Qu'est-ce qui a pu créer des difficultés troublantes pour tant d'esprits ? Je ne parle pas seulement des philosophes, à qui, quelquefois, on pourrait reprocher de ne s'être pas assez pénétrés des méthodes mathématiques; mais comment comprendre que Lagrange, par exemple, ait pu médire de la méthode des limites ?

Je crois en voir l'explication dans une idée qu'on ajoute souvent à la notion de limite et qui n'y est nullement conte-

nue, à savoir *qu'une variable atteint sa limite*. Beaucoup s'imaginent voir les mathématiciens suivre une variable jusqu'à sa limite, et arriver eux-mêmes à l'instant où elle l'atteint. C'est là une erreur des plus graves, qui a pu troubler les penseurs de tous les temps. Elle a suffi à engendrer des fantômes métaphysiques dont on a peine encore à se débarrasser.

Pour Lagrange, le doute n'est pas possible. « Cette méthode, dit-il à propos de la méthode des fluxions de Newton, a, comme celle des limites, qui n'en est que la traduction algébrique, le grand inconvénient de considérer les quantités dans l'état où elles cessent pour ainsi dire d'être des quantités; car, quoique l'on conçoive toujours bien le rapport de deux quantités tant qu'elles demeurent finies, ce rapport n'offre plus à l'esprit une idée claire et précise aussitôt que ses termes deviennent l'un et l'autre nuls à la fois. »

Lagrange voulait sans doute atténuer l'expression de sa pensée quand il déclarait que le rapport de deux quantités nulles n'offre pas une idée claire et précise : il aurait pu dire, il me semble, que ce rapport n'a aucune espèce de sens. Mais précisément la méthode des limites ne considère pas l'instant où les quantités cessent d'exister.

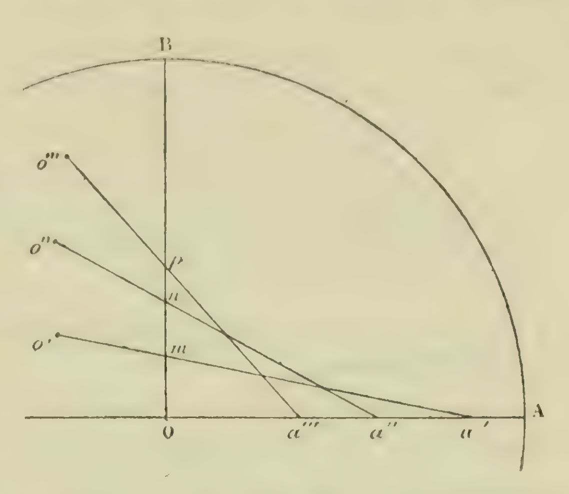
Quand on dit que le rapport $\frac{x(x+2)}{x}$ a pour limite 2, lorsque x tend vers zéro, on entend seulement parler des valeurs du rapport correspondant à des valeurs non nulles de x, et ce que l'on exprime c'est la propriété de ces valeurs de s'approcher de 2 autant qu'on le veut.

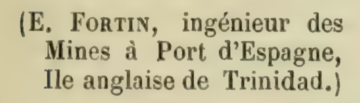
(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

219. — Une droite *ao*, se confondant d'abord avec le rayon AO, glisse par une de ses extrémités (*a*) sur ce rayon; elle est animée, en même temps, d'un mouvement de O en B,

sur le rayon OB perpendiculaire à AO, de telle sorte que les parties extérieures, mo', no'', po''',... soient toujours égales au chemin parcouru sur ce rayon. Donner l'équation de la courbe, ou de l'arc de courbe décrit par l'extrémité (o) de la droite mobile.




(E. Fortin, ingénieur des Mines à Port d'Espagne, Ile anglaise de Trinidad.)

Cette question est des plus simples; elle nous avait même été donnée pour le journal de *Mathématiques élémentaires*; mais elle conduit à diverses remarques intéressantes :

1° On examinera le cas où les rayons OA, OB, au lieu d'être rectangulaires font un angle quelconque θ, et l'on fera voir que le lieu est, dans ce cas, une strophoïde oblique.

2° Étant données deux droites rectangulaires Δ, Δ', se coupant en O, on cherchera l'enveloppe U des droites qui coupent Δ en A, Δ' en A', de telle sorte que

$$OA + AA' = a,$$

a désignant une constante donnée.

3° On fera voir que si l'on prend (dans la direction AA') AI = OA', le lieu de I est précisément la courbe U. Cette courbe est une quartique unicursale; elle peut donc être construite, bien simplement, par points et par tangentes.

4° Déduire de cette remarque, de celle qui constitue la question de M. Fortin et du principe de Chasles sur le centre instantané de rotation, une description, par points et par normales, des strophoïdes droites.

N.-B. — On pourra, avantageusement, croyons-nous, pour démontrer ces diverses propriétés, observer que les longueurs des trois côtés du triangle rectangle OAA' peuvent être représentées par :

$$OA' = \frac{a}{2}(1 - t^2), \qquad AA' = \frac{a}{2}(1 + t^2), \qquad OA = at;$$

t désignant un paramètre variable.

Les coordonnées de U sont alors

$$x = a\frac{2t^3}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{a}{2}\frac{(1 - t^2)^2}{1 + t^2}.$$

La quartique U est formée de deux bras paraboliques tangents à l'axe ox; elle possède sur oy un point de rebroussement.

Divers exercices conduisent à cette quartique; nous citerons le suivant.

Une parabole mobile P coupe oy en deux points fixes A, B; elle est, en outre, constamment tangente à ox. Soit C le point de contact. Le cercle ABC coupe P en un quatrième point I; l'enveloppe de CI est une quartique égale à la courbe U considérée ci-dessus; les axes ox, oy sont, bien entendu, rectangulaires. G. L.

220. — Etudier la série

$$1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{(1.2).2^2.5} + \frac{1.3}{(1.2.3).2^3.7} + \ldots + \frac{1.3..2n-3}{(n!)2^n(2n+1)} + \ldots$$

Montrer qu'elle est convergente et que sa valeur égale $2 - \frac{\pi}{4}$. (*Roux*, élève au lycée de Grenoble.)

Rectification. — *Année 1886*, p. 268, l. 3; *lisez*

$$\alpha' = \text{cotg}\,\frac{A}{2}\left(\frac{\beta}{\sin B} + \frac{\gamma}{\sin C}\right) = \text{tg}\,A'\left(\frac{\beta}{\sin 2B'} + \frac{\gamma}{\sin 2C'}\right).$$

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7414-7.

QUELQUES QUESTIONS

RELATIVES A L'ÉTUDE DES POINTS INVERSES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 53.)

6. — *Il y a d'autres couples de points inverses qui jouissent de propriétés analogues.*

En effet sur le milieu de CO_b j'élève une perpendiculaire qui coupe en φ_{cb}, φ'_{cb} la circonférence décrite sur $O_a\, O_b$ comme diamètre, on a :

$$\varphi'_{cb}\,\widehat{A}\,\varphi_{cb} = \varphi'_{cb}\,\widehat{B}\,\varphi_{cb} = 180 - \varphi'_{cb}\,\widehat{C}\,\varphi_{cb}.$$

Sur le milieu de CO_a j'élève une perpendiculaire qui coupe en φ_{ca}, φ'_{ca} la même circonférence, on a :

$$\varphi'_{ca}\,\widehat{A}\,\varphi_{ca} = \varphi'_{ca}\,\widehat{B}\,\varphi_{ca} = 180 - \varphi'_{ca}\,\widehat{C}\,\varphi_{ca}.$$

Cette circonférence a pour équation

$$c\gamma^2 + (b + a)\,\beta\gamma + (b + a)\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0, \qquad (10)$$

c'est le segment capable de $\frac{C}{2}$ décrit sur AB.

φ_{cb}, φ'_{cb} appartiennent à l'hyperbole équilatère

$$(c + a)\beta^2 + b\beta\gamma + (c + a)\alpha\gamma + b\alpha\beta = 0, \qquad (11)$$

qui passe par C, A, O_c, O_a.

φ_{ca}, φ'_{ca} appartiennent à l'hyperbole équilatère

$$(c + b)\alpha^2 + (c + b)\beta\gamma + a\alpha\gamma + a\alpha\beta = 0, \qquad (12)$$

qui passe par C, B, O_c, O_b.

L'équation de la droite $\varphi_{cb}\varphi'_{cb}$ est

$$(b - c)\alpha + (a + c)\beta + c\gamma = 0. \qquad (13)$$

L'équation de φ_{ca}, φ'_{ca} est

$$(c + b)\alpha + (a - c)\beta + c\gamma = 0. \qquad (14)$$

On obtient ces résultats en suivant une marche analogue à celle que nous avons indiquée pour les points F_c, F'_c.

On aurait aussi de même les points φ_{ba}, φ'_{ba} ; φ_{bc}, φ'_{bc} ; φ_{ab}, φ'_{ab} ; φ_{ac}, φ'_{ac}.

Les douze points φ sont toujours réels.

Les quatre droites $\varphi_{cb}\varphi'_{cb}$, $\varphi_{bc}\varphi'_{bc}$, $F_bF'_b$, $F_cF'_c$ concourent au milieu de O_cO_b, etc.

On trouverait, comme précédemment,

$$\cos^2 \frac{1}{2}\,\varphi_{cb}C\varphi'_{cb} = \frac{p-a}{2c} \qquad \cos \varphi_{cb}C\varphi'_{cb} = -\frac{p-b}{c},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}\,\varphi_{ca}C\varphi'_{ca} = \frac{p-b}{2c} \qquad \cos \varphi_{ca}C\varphi'_{ca} = -\frac{p-a}{c}.$$

Tous les angles de la figure se calculent facilement en fonction des côtés par leurs lignes trigonométriques, car on a :

$$AF_cB = AF'_cB = \frac{180 + C}{2},$$

$$F_cAC - F_cCA = F'_cAC - F'_cCA = \frac{A-C}{2},$$

$$F_cBC - F_cCB = F'_cBC - F'_cCB = \frac{B-C}{2}.$$

$$A\varphi_{cb}B = A\varphi'_{cb}B = \frac{C}{2}.$$

$$\varphi_{cb}AC - \varphi_{cb}CA = 90 - \frac{1}{2}(A - C).$$

$$\varphi'_{cb}CA - \varphi'_{cb}AC = 90 + \frac{1}{2}(A - C).$$

$$\varphi_{cb}BC - \varphi_{cb}CB = \frac{B-C}{2}.$$

$$\varphi'_{cb}CB - \varphi'_{cb}BC = 180 - \frac{1}{2}(B - C), \text{ etc., etc.}$$

REMARQUE. — Les cercles et les hyperboles équilatères dont nous avons parlé, c'est-à-dire les cercles décrits sur OO_a, OO_b, OO_c, O_bO_c, O_aO_c, O_aO_b, comme diamètres et les hyperboles représentées par les équations (5), (7), (11), (12), etc., sont des courbes qui sont à elles-mêmes leurs propres inverses. (Voir § 2 et § 3.)

On a donc, en tout, neuf couples de points inverses qui jouissent de la propriété que chaque couple est vu des trois sommets sous des angles égaux ou supplémentaires, un seul de ces couples peut devenir imaginaire, c'est F_c, F'_c et la chose a lieu si, C étant le plus petit côté, on a : $3c < a + b$.

On aurait facilement aussi les équations des coniques inscrites qui ont pour foyers deux des points φ.

Ainsi, par exemple, l'équation de l'Ellipse qui a pour foyers $\varphi_{cb'}$ et φ'_{cb} est

$$\sqrt{-a(c-b)\alpha} + \sqrt{-b(a+c)\beta} + c\sqrt{\gamma} = 0.$$

La conique inscrite qui a pour foyer φ_{ab}, φ'_{ab} est une hyperbole,

—	—	φ_{ac}, φ'_{ac}	—
—	—	φ_{bc}, φ'_{bc}	—
—	—	φ_{ba}, φ'_{ba}	ellipse réelle,
—	—	φ_{ca}, φ'_{ca}	—
—	—	φ_{cb}, φ'_{cb}	—

Remarquons enfin : 1° Que la conique inscrite qui a pour foyers F_c, F'_b touche, sur AC, la conique inscrite qui a pour foyers φ_{cb}, φ'_{cb} et touche, sur BC, la conique inscrite qui a pour foyers φ_{ca}, φ'_{ca}.

2° Que les quatre points (il n'y en a que quatre, au lieu de six, puisque nous venons de voir qu'il y a des points de contact communs) de contact des trois coniques inscrites ayant pour foyers F_c, F'_c; φ_{cb}, φ'_{cb}; φ_{ca}, φ'_{ca} avec les côtés CA et CB sont sur le cercle décrit de C comme centre avec AB pour rayon, cercle déjà considéré par M. de Longchamps (*J. S.*, p. 57 1886) et qu'il appelle Δ.

7. — Tous ces résultats ont été trouvés analytiquement, mais il est fort simple de les démontrer synthétiquement par la géométrie ; nous allons le faire brièvement pour les points F_c, F'_c; ce serait tout à fait analogue pour un autre couple de points F ou φ.

Soient F_c, F'_c les points où la perpendiculaire élevée sur le milieu de CO_c, coupe la circonférence OO_cAB décrite sur OO_c comme diamètre.

Joignons F_c et F'_c aux trois sommets,

OA, OB, OC sont les bissectrices des angles $F_cAF'_c$, $F_cBF'_c$, $F_cCF'_c$;

Joignons O_cF_c, $O_cF'_c$, F_cO,

$F_cAF'_c$, $F_cBF'_c$, $F_cO_cF'_c$ sont égaux, car ils ont pour mesure $\frac{1}{2}$ arc F'_cOF_c, mais comme $CF'_cO_cF_c$ est un losange, on a $F_cO_cF'_c = F_cCF'_c$; donc les trois angles $F_cAF'_c$, $F_cBF'_c$, F_cCF' sont égaux. C. Q. F. D.

On calcule facilement $\cos \widehat{OCF_c}$, car soit ω le milieu de CO_c on a

$$\cos^2 F_cCO = \cos^2 \frac{1}{2}\gamma = \frac{\overline{\omega C}^2}{\overline{CF_c^2}} = \frac{\overline{CO_c^2}}{4\overline{O_cF^2}} = \frac{\overline{CO_c^2}}{4\omega O_c . OO_c} = \frac{CO_c}{2OO_c} = \frac{p}{2c}.$$

Le problème se discute sans difficultés et l'on retrouve ainsi les résultats déjà établis.

Remarque. — Si α et β sont les points où le cercle $ABOO_c$ coupe CB et CA, $B\beta$ et $A\alpha$ sont perpendiculaires à CO.

Démontrons, pour terminer, que le cercle AOO_cB est son propre inverse et que l'hyperbole lieu du point K tel que $KAC - KCA = \frac{A - C}{2}$ est sa propre inverse.

Soit F_c un point quelconque du cercle AOO_cB; soit F'_c le point inverse de F_c

on a

$$F_cBA = B - F'_cBA, \quad \text{et} \quad F_cAB = A - F'_cAB,$$

ou

$$F_cBA + F_cAB = 180 - C - (F'_cBA + F'_cAB);$$

mais F_c appartenant au cercle AOO_cB

on a

$$F_cBA + F_cAB = 180 - AF_cB = \frac{180 - C}{2}.$$

donc

$$F'_cBA + F'_cAB = \frac{180 - C}{2},$$

donc

$$\widehat{BF'_cA} = BF_cA,$$

et F'_c est sur le cercle.

Soit maintenant F_c un point quelconque de l'hyperbole, lieu de K, un point tel que

$$KAC - KCA = \frac{A - C}{2},$$

F'_c le point inverse de F_c.

On a

$$F'_cAC = A - F_cAC, \quad \text{et} \quad F_cCA = C - F_cCA,$$

ou

$$F'_cAC - F_cCA = A - C - (F_cAC - F_cCA);$$

mais

$$F_cAC - F_cCA = \frac{A - C}{2}.$$

donc

$$F'_cAC - F'_cCA = \frac{A - C}{2}.$$

et F'_c appartient à la courbe.

NOTE SUR LES SURFACES RÉGLÉES

Par M. **Amigues,** professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée de Marseille.

Si, dans une surface réglée, la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est d'un ordre infinitésimal supérieur au troisième, la surface est un plan ou un cône, et la plus courte distance considérée est par suite rigoureusement nulle.

M. Bertrand qui examine cette question dans son *Traité de calcul différentiel* (pages 605 et 606) ne donne pour solution que les plans. L'analyse suivante, qui est fort simple, donne en outre tous les cônes.

J'adopterai les notations de la note que j'ai publiée récemment dans ce journal *(Janvier 1887, page 6).*

Pour que l'ordre d'infinitude soit supérieur au troisième, il faut et il suffit que l'on ait simultanément les équations :

$$dadq - dbdp = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{4}(d^2ad^2q - d^2bd^2p) + \frac{1}{6}(dad^3q + dqd^3a - dbd^3p - dpd^3b) = 0. \qquad (2)$$

La première s'écrit

$$\frac{da}{db} = \frac{dp}{dq}.$$

Soit m la valeur commune de ces deux rapports; on a, dès lors,

$$\left\{ \begin{aligned} da &= mdb, \\ dp &= mdq. \end{aligned} \right. \qquad (3)$$

Différentiant deux fois ces deux équations et portant dans l'équation (2) les valeurs de da, dp, d^2a, d^2p, d^3a, d^3p, on observe que les termes en m et en d^2m se détruisent. On a donc dm en facteur. Le résultat est, en effet,

$$dm(dbd^2q - dqd^2b) = 0.$$

Première Solution. — On prend pour m une constante arbitraire K. On a alors, en intégrant, les équations (1),

$$a = Kb + h,$$
$$p = Kq + r.$$

La droite génératrice est donc représentée par les équations,

$$\begin{cases} x = (Kb + h)z + Kq + r, \\ y = bz + q. \end{cases}$$

multipliant la seconde équation par $-$ K et ajoutant à la première, on a

$$x = Ky + hz + r,$$

équation dans laquelle K, h, r sont des constantes. La surface est donc un plan représenté par cette équation ; et comme K, h, r sont arbitraires, on obtient pour solution *tous les plans*.

Deuxième Solution. On a

$$\frac{d^2b}{db} = \frac{d^2q}{dq};$$

d'où, en intégrant une première fois,

$$dq = hdb;$$

et, en intégrant encore,

$$q = hb + g.$$

Mais, on a

$$\frac{da}{dp} = \frac{db}{dq} = \frac{1}{h}.$$

Donc $$dp = hda,$$
et $$p = ha + r.$$

La droite est alors représentée par les équations

$$\begin{cases} x = a(z + h) + r, \\ y = b(z + h) + g. \end{cases} \quad (4)$$

Cette droite passe par un point fixe, dont les coordonnées sont

$$x = r, \quad y = g, \quad z = -h.$$

La surface qu'elle décrit est donc un cône.

J'ajoute qu'on a *tous les cônes*.

En effet, a et b restant fonctions arbitraires de la variable t, on peut dire que b est fonction arbitraire de a, c'est-à-dire que l'on a

$$F(a, b) = 0, \qquad (5)$$

F étant une fonction arbitraire. L'équation de la surface s'obtient en éliminant a et b entre les équations (4) et (5), ce qui donne

$$F\left(\frac{x-r}{z+h}, \frac{y-g}{z+h}\right) = 0.$$

C'est l'équation de tous les cônes qui ont pour sommet le point dont les coordonnées sont $x = r$, $y = g$, $z = -h$. Mais les quantités r, g, h, introduites par l'intégration, sont des constantes arbitraires. On a donc bien tous les cônes, comme solution.

NOTE SUR LES POINTS ISOBARIQUES

Par M. **G. Rogier**.

---

1. Théorème. — *Si les coordonnées barycentriques des sommets d'un triangle Δ sont respectivement :*

$$A_1, B_1, C_1$$
$$A_2, B_2, C_2$$
$$A_3, B_3, C_3$$

avec les relations :

$$A_1B_2C_3 = B_1C_2A_3 = C_1A_2B_3; \qquad (1)$$

ou bien,

si les équations des côtés de ce triangle sont

$$M_1\alpha + N_1\beta + P_1\gamma = 0,$$
$$M_2\alpha + N_2\beta + P_2\gamma = 0,$$
$$M_3\alpha + N_3\beta + P_3\gamma = 0,$$

avec les relations :

$$M_1N_2P_3 = N_1P_2M_3 = P_1M_2N_3 \qquad (2)$$

le triangle considéré est triplement homologique au triangle de référence ABC.

En effet, les droites qui joignent les trois sommets du triangle Δ respectivement aux sommets A, B, C; puis B, C, A et enfin C, A, B du triangle de référence, ont pour équations :

$$C_1\beta - B_1\gamma = 0 \qquad A_1\gamma - C_1\alpha = 0 \qquad B_1\alpha - A_1\beta = 0$$
$$A_2\gamma - C_2\alpha = 0 \qquad B_2\alpha - A_2\beta = 0 \qquad C_2\beta - B_2\gamma = 0$$
$$B_3\alpha - A_3\beta = 0 \qquad C_3\beta - B_3\gamma = 0 \qquad A_3\gamma - C_3\alpha = 0$$

Or, il est visible que les relations (1) expriment la condition nécessaire et suffisante pour que les trois droites de chacun des groupes précédents, concourent en un même point.

Si l'on se place maintenant dans la seconde hypothèse et que l'on cherche les points d'intersection des côtés du triangle respectivement avec BC, AC, AB; puis avec AC, AB, BC; enfin avec AB, BC, AC, côtés du triangle de référence; on voit que les relations (2) expriment la condition nécessaire et suffisante pour que les points d'intersection que l'on obtient ainsi soient, trois à trois, sur une même droite.

Le théorème énoncé se trouve donc vérifié.

Il est bien évident que les relations (1) et (2) sont simultanément vérifiées pour un même triangle.

2. — Considérons maintenant trois points isobariques quelconques de même espèce :

$$M_1\ (A, B, C)\,;\ M_2\ (B, C, A)\,;\ M_3\ (C, B, A).$$

Le triangle $M_1M_2M_3$ est triplement homologique au triangle de référence, car, dans ce cas, la condition (1) devient une identité.

Les côtés de ce triangle ont respectivement pour équations:

$$\begin{matrix} A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0 & & A_1 = BC - A^2 \\ B_1\alpha + C_1\beta + A_1\gamma = 0 & \text{en posant} & B_1 = AC - B^2 \quad (3) \\ C_1\alpha + A_1\beta + B_1\gamma = 0 & & C_1 = AB - C^2 \end{matrix}$$

de telle sorte que les triangles ABC et $M_1M_2M_3$ admettent pour axes d'homologie les droites droites:

$$(\delta_1) \quad \frac{\alpha}{A_1} + \frac{\beta}{C_1} + \frac{\gamma}{B_1} = 0,$$
$$(\delta_2) \quad \frac{\alpha}{C_1} + \frac{\beta}{B_1} + \frac{\gamma}{A_1} = 0, \qquad (4)$$
$$(\delta_3) \quad \frac{\alpha}{B_1} + \frac{\beta}{A_1} + \frac{\gamma}{C_1} = 0,$$

qui sont visiblement les transversales réciproques des côtés du triangle $M_4M_5M_6$ formé par les isobariques de deuxième espèce des points considérés.

Si l'on cherche les centres d'homologie, on trouve que ces points Ω_1, Ω_2, Ω_3 ont pour coordonnées :

$$\Omega_1\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{C}, \frac{1}{B}\right);\quad \Omega_2\left(\frac{1}{C}, \frac{1}{B}, \frac{1}{A}\right);\quad \Omega_3\left(\frac{1}{B}, \frac{1}{A}, \frac{1}{C}\right).$$

3. — Les axes d'homologie forment un triangle qui a pour sommets :

$$\Delta_1\left(\frac{A}{A_1}, \frac{C}{C_1}, \frac{B}{B_1}\right);\quad \Delta_2\left(\frac{C}{C_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{A}{A_1}\right);\quad \Delta_3\left(\frac{B}{B_1}, \frac{A}{A_1}, \frac{C}{C_1}\right).$$

et les centres d'homologie, un triangle dont les côtés ont pour équations :

$$
\begin{aligned}
(\omega_1)\quad & \frac{A_1}{A}\alpha + \frac{C_1}{C}\beta + \frac{B_1}{B}\gamma = 0,\\
(\omega_2)\quad & \frac{C_1}{C}\alpha + \frac{B_1}{B}\beta + \frac{A_1}{A}\gamma = 0, \qquad (5)\\
(\omega_3)\quad & \frac{B_1}{B}\alpha + \frac{A_1}{A}\beta + \frac{C_1}{C}\gamma = 0.
\end{aligned}
$$

Donc, les sommets Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont les points harmoniquement associés aux droites ω_1, ω_2, ω_3.

En comparant les équations (4) et (5) on peut voir ensuite que les axes d'homologie δ_1, δ_2, δ_3 sont parallèles aux transversales réciproques des droites ω_1, ω_2, ω_3.

Le triangle formé par ces transversales réciproques, et le triangle des axes d'homologie ont pour centre d'homothétie le point E, centre de gravité commun.

Désignons par ω'_1, ω'_2, ω'_3 ces transversales ; par Ω'_1, Ω'_2, Ω'_3 les sommets du triangle qu'elles forment. Ces points ont pour coordonnées :

$$\Omega'_1\left(\frac{1}{A_1}, \frac{1}{B_1}, \frac{1}{C_1}\right);\qquad \Omega'_2\left(\frac{1}{B_1}, \frac{1}{C_1}, \frac{1}{A_1}\right);\qquad \Omega'_3\left(\frac{1}{C_1}, \frac{1}{A_1}, \frac{1}{B_1}\right).$$

Donc, Ω'_1, Ω'_2, Ω'_3 sont les points harmoniquement associés aux axes d'homologie. Ils ont pour coordonnées

$$(A_1, C_1, B_1);\qquad (C_1, B_1, A_1);\qquad (B_1, A_1, C_1);$$

et les côtés du triangle qu'ils forment ont pour équations :

$$A\alpha + C\beta + B\gamma = 0, \qquad (6)$$
$$C\alpha + B\beta + A\gamma = 0,$$
$$B\alpha + A\beta + C\gamma = 0.$$

On peut aisément démontrer que ces droites sont harmoniquement associées aux centres d'homologie Ω_1, Ω_2, Ω_3; et qu'elles sont parallèles aux côtés du triangle M_4, M_5, M_6.

On verrait aussi que les droites (5) sont parallèles aux transversales réciproques de (6).

Résumons, nous voyons que :

1° *Tout triangle qui a pour sommets trois points isobariques de même espèce* M_1, M_2, M_3 *est triplement homologique au triangle de référence.*

Les centres d'homologie sont les points réciproques des isobariques de deuxième espèce M_4, M_5, M_6.

Les axes d'homologie sont les transversales réciproques des côtés du triangle $M_4 M_5 M_6$.

2° *Les sommets du triangle des axes d'homologie sont harmoniquement associés aux côtés du triangle des centres d'homologie.*

3° *Les axes d'homologie sont parallèles aux transversales réciproques des côtés du triangle des centres d'homologie.*

4° *Les transversales réciproques des côtés du triangle des centres d'homologie forment un triangle qui a pour sommets les points harmoniquement associés aux côtés du triangle considéré* $M_1 M_2 M_3$.

5° *Les centres d'homologie sont harmoniquement associés aux droites qui joignent les points harmoniquement associés aux axes d'homologie.*

6° *Les droites qui joignent les points harmoniquement associés aux axes d'homologie sont parallèles aux côtés du triangle* $M_4 M_5 M_6$ *formé par les isobariques de deuxième espèce des points considérés.*

Les propriétés précédentes s'appliquent évidemment au triangle de Brocard A′B′C′. Et, dans ce cas particulier, on arrive aux conclusions suivantes, pour ne citer que les principales :

Les axes d'homologie d'un triangle quelconque ABC *et du triangle de Brocard correspondant, sont les transversales réciproques du*

triangle $KO_0O'_0$ *formé par le point de Lemoine et les réciproques des points de Brocard.*

Ces axes sont parallèles aux transversales réciproques des côtés du triangle DOO′ *formé par les points de Brocard et le réciproque dn point de Lemoine.*

Les sommets du triangle des axes d'homologie sont harmoniquement associés aux côtés du triangle DOO′.

Les points harmoniquement associés aux axes d'homologie appartiennent aux droites qui joignent le centre de gravité E *au point de Lemoine et aux réciproques des points de Brocard. Ils forment un triangle dont les côtés sont parallèles à ceux de* $KO_0O'_0$.

Signalons ici que l'un des côtés de ce triangle est précisément la droite δ, étudiée par M. de Longchamps dans son article sur le cercle Δ.

Nous devons aussi rappeler que plusieurs des propriétés précédentes ont été signalées par M. de Longchamps dans l'étude citée et dans ses articles sur les *points réciproques et potentiels d'ordre p*. Ce sont celles qui se rapportent à l'axe d'homologie, primitivement désigné par G par M. Brocard, et, actuellement, par la lettre (Ξ).

NOTE SUR LA TRANSFORMATION
DES COORDONNÉES DANS L'ESPACE

Par M. l'abbé **Reboul**, licencié ès sciences mathématiques, professeur au Collège de Belley.

---

1. — Si l'on désigne par a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'', les cosinus que font trois axes rectangulaires OX′, OY′, OZ′ avec trois axes primitifs, également rectangulaires, OX, OY, OZ, on a les relations connues .

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1 \quad (1) \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0 \\ ac + a'c' + a''c'' &= 0 \quad (2) \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0 \end{aligned}$$

Si l'on observe que a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' sont les cosinus que font les axes OX, OY, OZ avec les axes

OX′, OY′ OZ′, on a les six équations suivantes, équivalentes aux précédentes :

$$\begin{array}{lll} a^2 + b^2 + c^2 = 1 & & aa' + bb' + cc' = 0 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 & (3) & aa'' + bb'' + cc'' = 0 \quad (4) \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 & & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \end{array}$$

a, a′, a″; b, b′, b″; c, c′, c″ *désignant des quantités algébriques quelconques, les six équations* (1) *et* (2) *sont équivalentes aux six équations* (3) *et* (4).

Pour démontrer cette proposition, par un procédé algébrique direct, on peut, comme l'a montré Poisson, introduire six indéterminées auxiliaires ou, comme l'a indiqué M. de Longchamps (*) (*Géométrie analytique à trois dimensions*, p. 27) utiliser le principe de la multiplication des déterminants. Voici une démonstration tout à fait élémentaire et qui est peut-être nouvelle.

Élevons au carré les équations (1), après avoir tout fait passer dans le premier membre.

Élevons également au carré les équations (2), puis multiplions par 2.

Additionnons les équations (1) et (2), ainsi modifiées, on a :

$$\left.\begin{array}{l} (a^2+a'^2+a''^2-1)^2+(b^2+b'^2+b''^2-1)^2+(c^2+c'^2+c''^2-1)^2 \\ +2(ab+a'b'+a''b'')^2+2(ac+a'c'+a''c'')^4+2(bc+b'c'+b''c'')^2 \end{array}\right\} = 0,$$

ou, en développant :

$+a^4$ $+1$ $-2a^2$	$+a'^4$ $-2a'^2$	$+a''^4$ $-2a''^2$	$+2a^2a'^2$	$+2a^2a''^2$	$+2a'^2a''^2$
$+b^4$ $-2b^2$	$+b'^4$ $+1$ $-2b'^2$	$+b''^4$ $-2b''^2$	$+2b^2b'^2$	$+2b^2b''^2$	$+2b'^2b''^2$
$+c^4$ $-2c^2$	$+c'^4$ $-2c'^2$	$+c''^4$ $+1$ $-2c''^2$	$+2c^2c'^2$	$+2c^2c'^2$	$+2c'^2c''^2$
$+2a^2b^2$ $+2a^2c^2$ $+2b^2c^2$	$+2a'^2b'^2$ $+2a'^2c'^2$ $+2b'^2c'^2$	$+2a''^2b''^2$ $+2a''^2c''^2$ $+2b''^2c''^2$	$+4aa'bb'$ $+4aa'cc'$ $+4bb'cc'$	$+4aa''bb''$ $+4aa''cc''$ $+4bb''cc''$	$+4a'a''b'b''$ $+4a'a''c'c''$ $+4b'b''c'c''$

$= 0.$

Remarquons que chaque colonne verticale représente le

(*) Le procédé est bien connu. G. L.

développement d'un carré, on a donc :

$$\left.\begin{array}{l}(a^2+b^2+c^2-1)^2+(a'^2+b'^2+c'^2-1)^2+(a''^2+b''^2+c''^2-1)^2\\ +2(aa'+bb'+cc')^2+2(aa''+bb''+cc'')^2+2(a'a''+b'b''+c'c'')^2\end{array}\right\}=0.$$

Cette équation, dans laquelle nous supposons réelles les quantités a, a', a'', etc., étant la somme de six carrés parfaits, se décompose en six autres qui ne sont autres que les équations (3) et (4).

2. — Proposons-nous encore d'établir l'égalité, due à Jacobi,

$$a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2 = a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2.$$

1° Les équations (2) peuvent s'écrire :

$$-ab = a'b' + a''b'',$$
$$-ac = a'c' + a''c'',$$
$$-bc = b'c' + b''c''.$$

Multiplions membre à membre les équations ainsi écrites :

$$-a^2b^2c^2 = [a'^2b'c' + a''^2b''c'' + a'a''(b'c'' + b''c')](b'c' + b''c''),$$

ou :

$$-(a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2) = (a'^2 + a''^2)b'c'b''c'' + a'a''(b'c'' + b''c')(b'c' + b''c'').$$

Si, dans le second membre de cette équation nous remplaçons $(a'^2 + a''^2)$ et $a'a''$ par leurs valeurs $(2 - b'^2 - c'^2 - b''^2 - c''^2)$, $(-b'b'' - c'c'')$, tirées des équations (3) et (4), nous avons :

$$-(a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2) = (2 - b'^2 - c'^2 - b''^2 - c''^2)b'c'b''c'' - (b'b'' + c'c'')(b'c'' + b''c')(b'c' + b''c''). \quad (A)$$

2° Les équations (4) peuvent s'écrire :

$$-aa' = bb' + cc'$$
$$-aa'' = bb'' + cc''$$
$$-a'a'' = b'b'' + c'c''.$$

Multiplions membre à membre les équations ainsi écrites :

$$-a^2a'^2a''^2 = [b^2b'b'' + bc(b'c'' + c'b'') + c^2c'c''](b'b'' + c'c''),$$

ou :

$$-(a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2) = (b^2 + c^2)b'b''c'c'' + bc(b'c'' + b''c')(b'b'' + c'c'').$$

Si, dans le second membre de cette équation, nous remplaçons $(b^2 + c^2)$ et bc par leurs valeurs $(2 - b'^2 - c'^2 - b''^2 - c''^2)$, $(-b'c' - b''c'')$, tirées des équations (1) et (2), nous

avons :

$$-(a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2) = (2 - b'^2 - c'^2 - b''^2 - c''^2)b'c'b''c'' - (b'c' + b''c'')(b'c'' + b''c')(b'b'' + c'c''). \quad (B)$$

Les égalités (A) et (B) donnent :

$$a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2 = a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2,$$

c'est la relation de Jacobi.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne.

... Dans une note à laquelle je ne saurais reprocher que sa forme, trop flatteuse pour moi, M. Catalan émet l'avis que les constructions de la normale à l'ellipse que j'ai indiquées dernièrement sont peut-être moins commodes que celles où l'on fait usage des foyers. L'éminent professeur de l'Université de Liège n'aura sans doute pas pris garde qu'il s'agit là d'une *construction de chantier*. La construction au moyen de foyers (dans laquelle on doit prendre des bissectrices) est fort peu commode, pour ne pas dire plus, sur le chantier. Tandis que dans la première de celles que j'ai proposées qui est incontestablement *la plus pratique*, tout se réduit (voir *J. M. E.*, 1886, p. 29) au tracé des deux cours de parallèles M_1L_1, M_2L_2, M_3L_3,... et L_1N_1, L_2N_2, L_3N_3,... Or, à l'aide d'une règle munie de deux glissières engagées dans des rainures parallèles, le tracé d'un nombre quelconque de droites parallèles est la plus simple des opérations qu'on puisse avoir à effectuer sur un chantier, et ma construction se réduit absolument à cette opération répétée deux fois.

Il ne faut pas perdre de vue d'ailleurs, que les appareilleurs dressent leurs épures *à la grandeur d'exécution*. Il ne saurait, dans ces conditions, y avoir de construction plus commode que celle que je viens de rappeler, et j'ai recueilli là-dessus le témoignage d'un très grand nombre d'ingénieurs.

M. Catalan, pour qui je professe la plus grande vénération, ne m'en voudra certainement pas de cette déclaration, puis-

qu'il ne s'agit pas d'une controverse sur le terrain géométrique, où d'avance je lui rendrais les armes, mais bien sur le terrain pratique où mes fonctions m'ont permis de m'assurer d'une façon formelle de l'exactitude de mon observation....

Nota. — Pour le théorème énoncé à la page 31 et pour quelques propositions analogues on pourra consulter les *Nouvelles Annales* 1860 (p. 95-96; p. 235-238), et 1863 (p. 326-328).

Ce renseignement nous a été fourni par M. Brocard.

Un autre correspondant, M. Goulard, professeur au lycée de Marseille, nous signale ce même théorème comme proposé dans la *Géométrie analytique* de Briot et Bouquet dans la forme suivante :

Étant donnés une ellipse et le cercle construit sur le grand axe comme diamètre, on mène les normales au cercle et à l'ellipse aux points situés sur une même perpendiculaire au grand axe; trouver le lieu du point d'intersection de ces deux normales.

Quoi qu'il en soit du théorème énoncé à la page 31, la construction indiquée, dans la note en question, pages 29 et 30, pour le tracé de la normale à l'ellipse nous a paru nouvelle; dans tous les cas, elle est incontestablement simple et remarquable. G. L.

QUESTIONS D'EXAMEN

5. — *Démontrer que la plus courte distance de deux droites* Δ, Δ' *tangentes à une courbe gauche* Γ *et infiniment voisines, est un infiniment petit du troisième ordre.*

Cette proposition (*) due à Bouquet (V. Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 604) peut s'établir à la manière suivante.

(*) La droite Δ, dont il est ici question, et qui reste tangente à une courbe gauche donnée, engendre, comme l'on sait, une *surface développable*. Si l'on considère des surfaces gauches quelconques, le théorême correspondant à celui qui nous occupe s'énonce ainsi : *Dans une surface gauche la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est du même ordre infinitésimal que l'angle de ces génératrices.*

Soient x, y, z, les coordonnées d'un point M sur Γ; l'équation de la tangente Δ est comme l'on sait,

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz} \qquad (1)$$

Prenons sur Γ un point voisin M′ et soient $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, ses coordonnées; la tangente Δ' en M′ est représentée par les égalités

$$\frac{X - x - \delta x}{d(x + \delta x)} = \frac{Y - y - \delta y}{d(y + \delta y)} = \frac{Z - z - \delta z}{d(z + \delta z)}. \qquad (2)$$

La plus courte distance ζ des droites Δ, Δ' est, d'après une formule connue (*C. M. S.*, t. III, p. 66).

$$\zeta = \frac{\begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ dx & dy & dz \\ d(x + \delta x) & d(y + \delta y) & d(z + \delta z) \end{vmatrix}}{\sqrt{[dx d(y + \delta y) - dy d(x + \delta x)]^2 + \ldots}}. \qquad (3)$$

Dans toutes ces formules, nous supposons que x, y, z représentent des fonctions d'un paramètre variable t et nous allons montrer que, dans l'égalité (3), le numérateur est un infiniment petit du sixième ordre, tandis que le dénominateur est du troisième ordre seulement.

La formule

$$\text{(A)} \qquad \delta x = dx + \frac{d^2x}{1 \cdot 2} + \frac{d^3x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

donne

$$d(\delta x) = d^2x + \frac{d^3x}{1 \cdot 2} + \cdots$$

D'après cela, le numérateur de la formule (3) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \delta x - dx & \delta y - dy & \delta z - dz \\ dx & dy & dz \\ dx + d(\delta x) & dy + d(\delta y) & dz + d(\delta z) \end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{vmatrix} d^2x \ldots & d^2y \ldots & d^2z \ldots \\ dx & dy & dz \\ \frac{d^3x}{1 \cdot 2} \ldots & \frac{d^3y}{1 \cdot 2} \ldots & \frac{d^3z}{1 \cdot 2} \ldots \end{vmatrix}$$

et, sous cette forme, on voit immédiatement que la valeur principale du numérateur est un infiniment petit du sixième ordre.

Quant au dénominateur, l'un des termes qui constitue la quantité soumise au radical est

$$\{ dx[dy + d(\delta y)] - dy[dx + d(\delta x)] \}^2,$$

ou

$$\{ dxd^2y + \ldots - dyd^2x \ldots \}^2.$$

La valeur principale du dénominateur est donc égale à D, en posant

$$D = \sqrt{(dxd^2y - dyd^2z)^2 + (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2};$$

D est donc un infiniment petit du troisième ordre.

Cette expression se rencontre dans un grand nombre de questions d'analyse, relatives aux courbes gauches, et l'on sait, notamment (Bertrand, *loc. cit.*; p. 616), que

$$D = \frac{ds^3}{\rho},$$

ρ désignant le rayon de courbure et ds la différentielle de l'arc. On voit donc que D n'est pas nul, si ρ n'est pas infini. Le théorème énoncé se trouve donc établi, du moins dans le cas général; mais, pour rendre la démonstration tout à fait précise il resterait encore à montrer que le numérateur, abstraction faite du cas des courbes planes, ne s'abaisse jamais, au point de vue infinitésimal, au dessous du sixième ordre (*).

Remarque. — La formule (A), que nous avons utilisée ci-dessus, est une conséquence immédiate de la série de Taylor (Bertrand, p. 285).

Posons

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \ldots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\varphi^{n+1}(x+\theta h),$$

et représentons $\varphi(x)$ par y, h par dx; alors la différence $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ est égale à l'accroissement de y, c'est ce qu'on représente par δy; nous avons donc

$$\delta y = dx\frac{dy}{dx} + \frac{(dx)^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots$$

ou

$$\delta y = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \ldots$$

(*) Voyez, à ce propos, la note de M. Amigues, p. 101.

QUESTION 85

Solution par M. Charles MARTIN, élève au Lycée Condorcet.

On considère un cercle rapporté à deux diamètres rectangulaires Ox, Oy. *Soient* A, A′, *deux tangentes parallèles fixes et* PMQ, *une tangente mobile, ayant* M *pour point de contact et rencontrant* A *en* P, A′ *en* Q : 1° *sur* MP *et* MQ, *on décrit des cercles; le lieu décrit par le centre de similitude de ces circonférences est une quartique unicursale.* — 2° *Soit* B *le point de contact de* A *avec* C; *la droite* BM *rencontre le cercle, décrit sur* PQ *comme diamètre, en des points dont le lieu est une cubique.*

(G. L.)

Calculons les coordonnées du centre de similitude de ces deux cercles, en appliquant les formules connues :

$$x = \frac{aR' - a'R}{R' - R},$$

$$y = \frac{bR' - b'R}{R' - R},$$

a, b, a', b' désignant les coordonnées des centres des deux cercles et R et R′ leurs rayons.

Prenons pour axe des y le diamètre perpendiculaire à la direction des tangentes fixes.

Les coordonnées du point M sont : $R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$

celles de P : $\dfrac{R(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi}$, R;

celles de Q : $\dfrac{R(1+\sin\varphi)}{\cos\varphi}$, $-R$;

On aura donc pour a, b, a', b', R et R′ les valeurs suivantes :

$$a = \frac{R}{2}\left(\cos\varphi + \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) \qquad b = \frac{R}{2}(1+\sin\varphi)$$

$$a' = \frac{R}{2}\left(\cos\varphi + \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) \qquad b' = \frac{R}{2}(1-\sin\varphi)$$

$$R = \frac{R(1-\sin\varphi)}{2\cos\varphi} \qquad R' = \frac{R}{2}\,\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de x et de y, on obtient :

$$x = \frac{R}{2}\cos\varphi,$$

$$y = \frac{R}{2}\,\frac{1 + \sin^2\varphi}{\cos\varphi};$$

$\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ s'exprimant en fonction d'un seul paramètre t, la courbe est donc une unicursale. Son équation cartésienne est :

$$4x^2(x^2 + y^2) - R^2(4x^2 + y^2) + R^4 = 0,$$

quartique circulaire, admettant les droites $x = \frac{R}{2}$, $x = -\frac{R}{2}$, comme asymptotes, et l'origine comme centre. Elle a deux points doubles isolés, sur l'axe des x, d'abscisses $\frac{R}{\sqrt{2}}$ $-\frac{R}{\sqrt{2}}$; enfin elle est tangente au cercle c aux points de coordonées (O, R); (O, $-$R).

2° Le cercle décrit sur PQ comme diamètre est tangent à l'origine à l'axe Oy. Son centre est sur l'axe des x et son rayon est $\frac{R}{\cos\varphi}$. Son équation est donc :

$$x^2 + y^2 - 2\,\frac{R}{\cos\varphi}\,x = 0.$$

L'équation de la droite BM est :

$$x(1 - \sin\varphi) + (y - R)\cos\varphi = 0.$$

L'équation du lieu s'obtient en éliminant φ entre ces deux équations. On trouve l'equation :

$$(x^2 + y^2)y - 2R^2y + R^3 = 0$$

cubique circulaire, admettant l'axe Ox comme asymptote et coupant l'axe Oy en trois points dont les ordonnées sont : R, $\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$, $-\frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)$; de plus, elle est symétrique par rapport à cet axe.

VARIÉTÉS

SUR LES FONDEMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

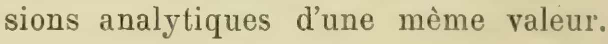
Par M. **G. Milhaud**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée du Havre.

(*Suite*, voir p. 91.)

Lorsque nous avons considéré la fonction $y = x^2$, nous avons dit que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a pour limite $2x$; en d'autres termes, quand des deux points M et M′ le second s'approche du premier en restant sur la courbe, la valeur $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ s'approche autant qu'on le veut de $2x$. Mais, dira-t-on, si de la relation $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$, on déduit pour l'angle α_1 de la tangente

$$2x = \operatorname{tg} \alpha_1$$

ne se place-t-on pas à l'instant où Δx et Δy sont nuls, où M′ est venu coïncider avec M, où la sécante est venue prendre la position de la tangente? Nullement. On considère deux variables constamment égales ou identiques $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $\operatorname{tg} \alpha$; en d'autres termes, on a deux formes différentes, deux expressions analytiques d'une même valeur.



L'expression $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se prête à un calcul très simple qui donne $2x$ pour la limite de ce rapport. D'un autre côté α_1 est, par définition même, la limite de l'angle α de la sécante avec la même direction. La définition de la tangente trigonométrique d'un arc montre immédiatement que si α se rapproche de α_1, $\operatorname{tg} \alpha$ tend vers $\operatorname{tg} \alpha_1$. Par conséquent, la deuxième expression $\operatorname{tg} \alpha$ conduit à la limite $\operatorname{tg} \alpha_1$. Il résulte de là que $2x = \operatorname{tg} \alpha_1$.

Il n'y a rien là qui ressemble à l'application d'un principe de raison suffisante, suivant lequel ce qui est vrai quel que soit Δx, le sera encore à l'instant où Δx est nul. On ne se place pas à cet instant. On ne suppose nullement que le point mobile M′ de la courbe ait achevé le chemin MM′, ni que la rotation de la sécante l'ait amenée à coïncider avec la tangente. Ce sont là des considérations d'un ordre absolument étranger à la simple notion de limite.

Mais il est une opinion diamétralement opposée à celle que nous venons de réfuter, aussi fréquente, et non moins inexacte.

M. Ch. de Freycinet, dans son étude sur l'analyse infinitésimale, nous paraît l'avoir nettement formulée.

« Ce qui caractérise la limite, c'est à la fois que la variable puisse en approcher autant qu'on le veut, et *néanmoins qu'elle ne puisse jamais l'atteindre rigoureusement*. Car, pour satisfaire à cette condition, il faudrait la réalisation d'une certaine infinité qui nous est interdite. Ainsi, pour que les polygones se confondissent exactement avec le cercle, il faudrait que le nombre des côtés devînt infini... La condition d'infinité, mêlée à ces questions leur enlève toute espèce de sens, on doit s'en tenir à l'idée d'une approximation indéfinie, c'est-à-dire de plus en plus grande à mesure que le nombre des côtés du polygone augmente davantage. »

Sans doute il faut qu'on s'en tienne à cette dernière idée, mais uniquement parce qu'elle seule est comprise dans la notion de limite; nullement parce que cette notion exclut la possibilité que la variable atteigne sa limite.

D'abord, dans quel sens entend-on que la variable n'atteint pas sa limite? Quelques lignes du même auteur vont nous éclairer : « Le propre de la limite, et ce qui fait que la variable ne l'atteint jamais exactement, c'est d'avoir une définition autre que celle de la variable, et la variable de son côté, tout en approchant de plus en plus de la limite ne doit jamais cesser de satisfaire à sa définition première. Cette circonstance capitale de deux définitions logiquement distinctes et telles néanmoins que les objets définis peuvent s'approcher de plus en plus l'un de l'autre, rend compte de

ce que paraît avoir d'étrange l'impossibilité de faire coincider exactement deux quantités dont on est maître d'ailleurs de diminuer la différence au-delà de toute expression. »

Sans aucun doute, la manière dont est comprise ici la question de savoir si la variable atteint sa limite revient à celle-ci : la limite est-elle un état possible pour la grandeur qui varie ? Indépendamment de toute espèce de variation, existe-t-il un état de la grandeur qui soit précisément celui que définit la limite ?

Pour répondre à cette question, en même temps que pour réfuter l'opinion que nous venons de citer, il suffit de se reporter à la définition de la limite.

La limite A, de X, est telle que la différence A — X peut devenir plus petite que toute quantité donnée ε. Je demande alors quel peut être le sens de cette différence, si A et X ne désignent pas les deux états d'une même grandeur.

Il ne peut intervenir dans un calcul, dans un raisonnement, dans une proposition mathématique quelconque, que la différence de deux grandeurs de même espèce, c'est-à-dire ayant la même définition mathématique. Si A et X ne sont pas de même nature, il ne saurait plus être question que d'une différence en qualité ; — mais alors comment apprécier, comment mesurer cette différence ; dans quel sens entendre qu'elle sera moindre qu'un élément ε ... ? ...

A, est nécessairement, en vertu de la définition même de la limite, un état particulier de la grandeur qui varie. Les objections, que semblent fournir quelques exemples bien connus, sont dus uniquement à un abus de langage et à une confusion d'idées.

Ainsi, la circonférence est, dit-on, la limite d'un polygone dont le nombre des côtés augmente indéfiniment. Quand on parle ainsi, on entend évidemment que la figure formée par le polygone ressemble de plus en plus à la circonférence. Ce langage est permis, puisqu'il exprime une idée nette de l'esprit. Mais, ni cette façon de parler, ni l'idée de cette ressemblance, ne sont admises en mathématiques. Il y a là abus du mot limite. Ce qui est rigoureusement mathématique, c'est la considération de telle ou telle quantité variable don

l'existence et la nature sont liées à celles de la courbe, par exemple, *la longueur de la circonférence.*

On appelle ainsi la limite (dont on a soin de démontrer l'existence) du périmètre d'un polygone inscrit, dont le nombre des côtés augmente indéfiniment, en même temps que chacun tend vers zéro. Cet élément de la circonférence qu'on nomme sa longueur, est donc l'état particulier d'une grandeur de l'espèce longueur, tout comme le périmètre de chaque polygone inscrit. Pour fixer les idées, supposons qu'on porte la longueur d'un quelconque des périmètres sur la droite ox, à partir d'un point O.

Soient OA_1, OA_2, .. OA_n, ... une série d'états différents de cette variable. On démontre qu'elle a une limite, cela veut dire qu'il existe un point L sur ox, dont le point A_n s'approche autant qu'on veut; OL représente donc la limite des périmètres des polygones inscrits. C'est une longueur, tout comme A_n, une quantité de même nature, qui en diffère de la même manière que deux états quelconques de la variable OA_p et OA_n diffèrent entre eux.

Considérons encore l'aire du cercle. Elle est égale (ce n'est plus ici une définition, mais l'objet d'une démonstration) à la limite des aires des polygones inscrits. Chacun des états de la variable est une surface définie par le nombre de mètres carrés ou de fractions de mètres carrés qu'il faut juxtaposer pour la recouvrir. En supposant, par exemple, que les polygones inscrits restent réguliers, leur surface est exprimée par $\frac{ph}{2}$, p étant le périmètre, h l'apothème. La quantité ainsi mesurée peut se représenter par un rectangle dont l'un des côtés soit p et l'autre $\frac{h}{2}$. Lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment p a pour limite la longueur de la circonférence (OL), h a pour limite le rayon du cercle. Le rectangle construit sur ces deux longueurs représente la limite de l'aire des polygones inscrits. Cette limite, l'aire du cercle, n'est-elle pas une quantité de même espèce que la variable? n'est-elle pas un état particulier de cette quantité

qu'on appelle une aire, et dont la définition mathématique ne porte que sur son rapport à l'unité de surface, sans tenir aucun compte de la forme du contour ?

Sans doute, on dit couramment en mathématiques qu'une certaine courbe a pour limite une courbe d'une autre espèce ; par exemple, une ellipse se déformant dans des conditions déterminées a pour limite une parabole. Mais on entend alors que l'ordonnée d'un point quelconque de l'ellipse, a pour limite l'ordonnée du point de la parabole qui a même abscisse. La quantité variable est, ici, cette ordonnée générale d'un point de la courbe.

En somme il y à là un point qui touche à la nature même des mathématiques : une courbe n'est pas, par *sa forme*, un être mathématique — mais bien par certaines quantités liées à son existence. Le cercle n'est nullement ce rond que nous représente notre imagination : le mathématicien ne connaît que les *points de cercle*, les extrémités de distances mesurées par un nombre fixe et comptées dans n'importe quelle direction à partir d'un point fixe. Il se trouve qu'en faisant se mouvoir, d'un mouvement continu, le point qui vient d'être défini, on engendre une ligne qui, pour notre esprit, est doué d'une certaine forme spéciale. Cette forme est une qualité, résultant nécessairement de la définition des points de cercle, mais qui n'intervient pas dans les déductions mathématiques.

(A suivre.)

Rectification. — Ajouter à la note placée au bas de la p. 81. le signalement d'une note publiée par M. d'Ocagne (J. M. E., 1885 ; p. 204.)

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 8978-7.

TRACÉ PAR POINTS

AVEC LA RÈGLE ET L'ÉQUERRE, D'UNE CONIQUE DONT ON CONNAIT DEUX SOMMETS ET UN POINT DE LA COURBE

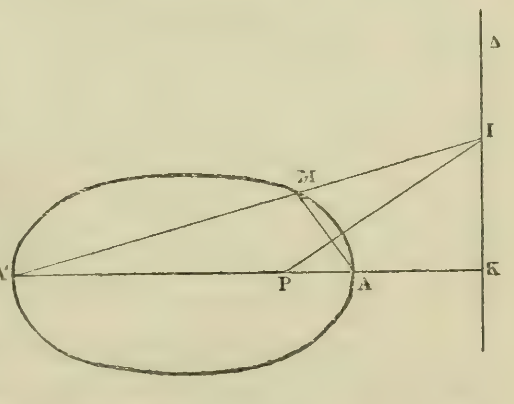
Par M. **Clément Thiry**, étudiant à la Faculté des Sciences de Gand.

M. de Longchamps dans son *Traité de Géométrie analytique*, p. 381, ainsi que dans ses intéressants articles sur la *Géométrie de la règle et de l'équerre,* indique un tracé, point par point (tracé s'effectuant au moyen de la règle et de l'équerre), pour une ellipse, dont on connaît : un point quelconque M et deux sommets A et A'. M. de Longchamps fait découler sa construction du théorème suivant.

Soient AA' *deux sommets et* M *un point quelconque de l'ellipse; la perpendiculaire à* AM, *en* A, *rencontre* A'M *en un point* I*; ce point décrit une droite* Δ, *perpendiculaire à* AA'.

Au moyen de cette remarque, une fois que la droite Δ est tracée, on voit comment on obtient aisément (avec la règle et l'équerre seulement) autant de points que l'on veut de l'ellipse.

Cette construction, au point de vue graphique, offre un inconvénient évident, que M. de Longchamps nous a signalé lui-même, si la forme de l'ellipse diffère peu de celle du cercle; c'est-à-dire, si l'excentricité de la conique est petite. Dans ce cas, on voit que Δ sort des limites de l'épure.



Voici un théorème, plus général que celui que nous venons de rappeler; il permet de répondre à la difficulté pratique, signalée ici.

Si du point de rencontre I de A'M avec une perpendiculaire quelconque Δ, à AA', on abaisse une perpendiculaire

sur MA, cette perpendiculaire passe constamment par un point fixe P.

En effet, l'ellipse étant rapportée à ses axes, soit

$$y = m(x + a),$$

l'équation de A'M

Si m' et m'' sont les coefficients angulaires de AM et de PI,

on a $$mm' = -\frac{b^2}{a^2}, \quad m'm'' = -1;$$

d'où $$m'' = m\frac{a^2}{b^2}.$$

Soit $y = h$, l'équation de Δ, celle de PI sera

$$y - m(h + a) = m\frac{a^2}{b^2}(x - h).$$

En faisant $y = 0$, on trouve

$$x = h - \frac{b^2}{a^2}(h + a) = h\frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a}.$$

Le point P est donc fixe.

Ce théorème, qui a lieu également, avec les modifications convenables, pour l'hyperbole et la parabole, est encore vrai pour les deux autres sommets B et B'. Appliquons-le maintenant au tracé, avec la règle et l'équerre, d'une conique dont on connaît deux sommets (A et A' par exemple) et un point M de la courbe.

Prenons Δ arbitrairement, *mais dans les limites de l'épure;* le point M nous donnera le point fixe P.

Cela fait, on joindra le point P à un point quelconque I de AK et la perpendiculaire à PI, menée par A, rencontrera IA' en un point de la courbe.

SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES

DE DEGRÉ QUELCONQUE

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

L'équation de la courbe algébrique de degré n la plus générale s'écrit, en coordonnées polaires,

$$Q_n\rho^n + Q_{n-1}\rho^{n-1} + \ldots\ldots + Q_1\rho + Q_0 = 0, \qquad (1)$$

Q_i étant une forme homogène de degré i en sin ω et cos ω.

Coupons cette courbe par une droite menée par l'origine O (qui est un point quelconque de son plan) et appelons ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n les vecteurs des points d'intersection.

Divisant la somme des produits $n - 1$ à $n - 1$ de ces vecteurs par leur produit, on a, en vertu de l'équation (1),

$$\sum \frac{1}{\rho_i} = \frac{(-1)^{n-1}Q_1}{(-1)^n Q_0} = \frac{A \cos \omega + B \sin \omega}{Q_0}, \qquad (2)$$

le signe Σ s'étendant aux valeurs 1, 2, 3, ..., n, de l'indice i.

De là, cette propriété bien connue :

Théorème I. — *Le lieu du centre des moyennes harmoniques, par rapport au point* O, *des points d'intersection d'une droite pivotant autour de ce point et d'une courbe algébrique quelconque* C *est une droite.*

Cette droite a, comme on sait, reçu le nom d'*axe harmonique* du point O par rapport à la courbe C.

Nous allons, de la formule (1), tirer d'autres théorèmes, en faisant usage des formules suivantes (*) où α_i représente l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, N_i la normale limitée à la perpendiculaire au rayon vecteur menée par l'origine O, R_i le rayon de courbure

$$d\rho_i = \rho_i \cot \alpha_i d\omega \qquad (3)$$

$$d\alpha_i = \left(\frac{N_i}{R_i} - 1\right) d\omega. \qquad (4)$$

Différentions (2); il vient

$$-\sum \frac{d\rho_i}{\rho_i^2} = \frac{-A \sin \omega + B \cos \omega}{Q_0} d\omega,$$

ou, d'après (3)

$$\sum \frac{\cot \alpha_i}{\rho_i} = \frac{A \sin \omega - B \cos \omega}{Q_0}. \qquad (5)$$

Appelons ρ'_1, ρ'_2, ρ'_3, ... les sous-tangentes correspondant à ρ_1, ρ_2, ρ_3, ..., ω' l'angle polaire de la droite sur laquelle sont comptées ces sous-tangentes. Nous avons

$$\rho'_i = \rho_i \operatorname{tang} \alpha_i, \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{\pi}{2} + \omega'.$$

(*) Voir ma note *sur les transformations centrales des courbes planes* (*Mathésis*, 1884.)

Par suite, la formule (5) peut s'écrire

$$\sum \frac{1}{\rho'_i} = \frac{A \cos \omega' + B \sin \omega'}{Q_0};$$

c'est-à-dire que :

Théorème II. — *Si une droite δ pivotant autour du point* O *coupe une courbe algébrique* C *de degré* n *aux points* M_1, M_2 …, M_n, *et que les tangentes en ces points à la courbe* C *coupent aux points* $T_1, T_2, \ldots, T_n$, *la perpendiculaire menée en* O *à la droite* δ, *le centre des moyennes harmoniques des points* $T_1, T_2, \ldots, T_n$, *relativement au point* O, *se trouve sur l'axe harmonique de ce point par rapport à la courbe* C.

Différentions encore la formule (5) ; il vient

$$-\sum \frac{\cot \alpha_i}{\rho_2^i} d\rho_i - \sum \frac{d\alpha_i}{\rho_i \sin^2 \alpha_i} = \frac{A \cos \omega + B \sin \omega}{Q_0} d\omega,$$

ou, en tenant compte des formules (2), (3) et (4),

$$-\sum \frac{\cot^2 \alpha_i}{\rho_2^i} - \sum \frac{1}{\rho_i \sin^2 \alpha_i}\left(\frac{N_i}{\rho_i} - 1\right) = \sum \frac{1}{\rho_i},$$

ou encore

$$-\sum \frac{N_i}{\rho_i R_i \sin^2 \alpha_i} + \sum \frac{1}{\rho_i} = \sum \frac{1}{\rho_i},$$

c'est-à-dire

$$\sum \frac{1}{R_i \sin^3 \alpha_i} = 0, \qquad (6)$$

d'où ce théorème :

Théorème III. — *La somme des inverses des produits des rayons de courbure aux points où une courbe algébrique est coupée par une droite quelconque, par les cubes des sinus des angles correspondants de cette courbe et de cette droite, est nulle.*

Dans le cas où la courbe est une conique, soient R_1 et R_2 les rayons de courbure en deux points M_1 et M_2 ; les tangentes en ces points se coupant au point T, posons $M_1T = t_1$, $M_2T = t_2$. La formule (6) donne alors

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{t_1^3}{t_2^3}.$$

C'est une propriété bien connue. J'en ai déduit (*) que

(*) *Nouv. Ann. de Mathém.*, 3e série, t. II, p. 462.

si r_1 et r_2 sont les projections de R_1 et R_2 sur la corde $M_1 M_2$, les parallèles respectivement menées par r_1 et r_2 à M_1T et M_2T se coupent sur la symédiane issue de T dans le triangle M_1TM_2.

Une classe intéressante de courbes algébriques, constituant, à certain égard, une généralisation du cercle, est formée par celles qui n'admettent d'autres directions asymptotiques que les directions isotropes, et que, pour cette raison, nous nommerons des *courbes isotropiques*. (*)

L'équation cartésienne d'une telle courbe, qui ne saurait être que de degré pair, est de la forme

$$(x^2 + y^2)^p + H_{2p-1} + H_{2p-2} + \dots + H_1 + H_0 = 0,$$

H_i, représentant une forme homogène, de degré i, en x et y. Son équation polaire sera dès lors

$$\rho^{2p} + \rho^{2p-1}Q_{2p-1} + \dots + \rho Q_1 + Q_0 = 0, \qquad (7)$$

Q_i, étant une forme homogène, de degré i, en sin ω et cos ω.

Si une droite menée par l'origine coupe la courbe en des points dont les vecteurs sont $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_{2p}$, l'équation (7) montre que

$$\rho_1\rho_2 \dots \rho_{2p} = Q_0, \qquad (8)$$

et, comme l'origine est un point quelconque, on peut énoncer ce théorème.

Théorème IV. — *Le produit des distances d'un point* O *quelconque aux points de rencontre d'une courbe isotropique et d'une droite menée par le point* O *est constant, quelle que soit la direction de cette droite.*

Q_0 étant la même chose que H_0, on voit qu'on peut compléter ce théorème (en appelant, comme Laguerre, *puissance* d'un point par rapport à une courbe le résultat de la substitution des coordonnées du point dans le premier membre de l'équation de la courbe) de la manière suivante :

Ce produit constant est égal à la puissance du point O *par rapport á la courbe isotropique considérée.*

(*) Ces courbes isotropiques, abstraction faite du mot (d'ailleurs bien choisi) que propose ici M. d'Ocagne. ont été considérées déjà. Voyez notamment, à propos de certaines propriétés des *Rosettes*, étendues à ces courbes, un article des *Nouvelles Annales*, 1848 ; p. 214

G. L.

Considérons deux courbes isotropiques de même degré

$$(x^2 + y^2)^p + U = 0,$$
$$(x^2 + y^2)^p + V = 0.$$

Le lieu des points d'égale puissance par rapport à ces deux courbes, qu'on pourrait appeler *courbe radicale*, sera

$$U - V = 0,$$

et, comme U et V sont généralement de degré $2n - 1$, il en sera de même de la courbe radicale. Prenons une troisième courbe isotropique de même degré.

$$(x^2 + y^2)^p + W = 0.$$

Ses courbes radicales avec les deux précédentes seront

$$W - U = 0$$
$$W - V = 0$$

dont les $(2n - 1)^2$ points d'intersection se trouvent sur la courbe radicale des deux premières. Ce seront les *centres radicaux* des trois courbes.

Prenant la différentielle logarithmique de (8), on a

$$\sum \frac{d\rho_i}{\rho_i} = 0.$$

ou, d'après (3),
$$\sum \cot \alpha_i = 0. \qquad (9)$$

De là, puisque l'origine est un point quelconque, ce théorème :

Théorème V. — *La somme des cotangentes des angles sous lesquels une courbe isotropique est rencontrée par une droite quelconque de son plan est nulle.*

Différentions (9); il vient

$$\sum \frac{d\alpha_i}{\sin^2 \alpha_i} = 0,$$

ou, d'après (4),
$$\sum \frac{1}{\sin^2 \alpha_i}\left(\frac{N_i}{R_i} - 1\right) = 0. \qquad (10)$$

Donc :

Théorème VI. — *Si une droite quelconque coupe une courbe isotropique sous les angles* α_1, α_2, α_3,... *en des points où les rayons de courbure sont* R_1, R_2, R_3,... *et qu'une perpendiculaire quelconque à cette droite détermine sur les normales correspondantes, à partir de leurs pieds respectifs, les segments* N_1,

N_2, N_3,... *on a*

$$\sum \frac{1}{\sin^2 \alpha_i}\left(\frac{N_i}{R_i} - 1\right) = 0.$$

Pour une autre perpendiculaire à la droite considérée, on aurait

$$\sum \frac{1}{\sin^2 \alpha_i}\left(\frac{N'_i}{R_i} - 1\right) = 0;$$

donc

$$\sum \frac{1}{\sin^2 \alpha_i} \cdot \frac{N_i - N'_i}{R_i} = 0,$$

ou

$$\sum \frac{1}{R_i \sin^3 \alpha_i} = 0.$$

On retombe ainsi sur la propriété énoncée dans le théorème III pour les courbes algébriques absolument quelconques.

Comme exemple de courbe isotropique, je citerai la quartique unicursale à laquelle j'ai dernièrement consacré une étude (*). On voit que tous les théorèmes contenus dans le § 7 de cette étude appartiennent soit aux courbes isotropiques générales coupées par une droite quelconque, soit même aux courbes algébriques absolument quelconques. C'est donc à tort que ces théorèmes ont figuré au nombre des propriétés particulières de la quartique unicursale en question.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 58).

18. Points complémentaires (M, M_c) **et anti-complémentaires** (M, M_{-c}) **dans un système quelconque de coordonnées.** — Etant donné un point M dont les coordonnées dans un système quelconque par rapport au triangle de référence ABC sont ξ, η, ζ on peut toujours lui faire correspondre un second point que nous noterons par M_c et qui a pour coordonnées :

(*) *Journal de Mathématiques Spéciales*, p. 79, 97 et 121.

$$\eta + \zeta, \quad \zeta + \xi, \quad \xi + \eta\,;$$

nous dirons que M_c est le *point complémentaire de* M *dans le système de coordonnées qu'on a adopté* et que M *est le point anti-complémentaire de* M_c (*).

Les coordonnées du point anti-complémentaire de M que nous noterons par (M_{-c}) seront :

$$-\xi + \eta + \zeta, \qquad \xi - \eta + \zeta, \qquad \xi + \eta - \zeta.$$

Il est bien entendu que nous ne donnons ici que des valeurs proportionnelles aux coordonnées et non pas les coordonnées absolues.

Les points qui coïncident avec leurs complémentaires sont donnés par les équations :

$$\frac{\xi}{\eta + \zeta} = \frac{\eta}{\xi + \zeta} = \frac{\zeta}{\eta + \xi}$$

qui admettent deux solutions

$$\xi = \eta = \zeta,$$
$$\xi + \eta + \zeta = 0.$$

La première donne un point déterminé L, la seconde une droite déterminée λ qui est la droite harmoniquement associée à L. Le point L se transforme donc en lui-même et tout point de la droite λ jouit de cette propriété.

Si l'on calcule les coordonnées d'une suite de points complémentaires on trouve :

$$\begin{array}{ccc} \xi, & \eta, & \zeta \\ \eta + \zeta, & \zeta + \xi, & \xi + \eta, \\ 2\xi + \eta + \zeta, & 2\eta + \zeta + \xi, & 2\zeta + \xi + \eta, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

expression que l'on peut remplacer par

$$\xi + C(\eta + \zeta), \qquad \eta + C(\xi + \zeta), \qquad \zeta + C(\xi + \eta)$$

(*) Voir la note jointe au § 20.

On peut consulter sur les points complémentaires et anti-complémentaires :

E. Hain. — *Archiv der Physik und Mathematiks von Grünert*, octobre 1885, p. 214-217.

G. de Longchamps. — *J. E.*, 1886, p. 131, 276. — *A. F.*, Nancy. 1886.

E. Lemoine. — *A. F.*, Nancy, 1886.

J. Neuberg. — *J. S.*, décembre 1886, p. 265-269.

E. Vigarié. — *M.*, 1887 ; la première partie de cette note est résumée dans le § 18 ci-dessus.

C étant un coefficient variable qui oscille autour de l'unité et a pour limite 1. Donc les coordonnées tendent à devenir égales. De là on conclut que, une suite de points, dont chacun est le complémentaire du précédent, a pour limite le point L.

Deux points complémentaires (M, M_c) *sont en ligne droite avec le point* L. — Car tout point N de la droite MM_c a des coordonnées de la forme (*)

$$m\xi + n(\eta + \zeta), \qquad m\eta + n(\xi + \zeta), \qquad m\zeta + n(\xi + \eta),$$

le rapport $\frac{n}{m}$ étant proportionnel à $\frac{NM}{NM_c}$. Si l'on fait $m = n$ on trouve trois quantités égales, c'est-à-dire les coordonnées du point L.

Si P *est le point d'intersection de* λ *avec* MM_c, *le rapport anharmonique :*

$$\frac{LM}{LM_c} : \frac{PM}{PM_c}$$

a la valeur constante (— 2).

En effet, représentons les coordonnées de L et P par

$$m\xi + n(n + \zeta), \qquad m\eta + n(\xi + \zeta), \qquad m\zeta + n(\xi + \eta),$$
$$m_1\xi + n_1(\eta + \zeta), \qquad m_1\eta + n_1(\xi + \zeta), \qquad m_1\zeta + n_1(\xi + \eta),$$

alors
$$\frac{LM}{LM_c} : \frac{PM}{PM_c} = \frac{n}{m} : \frac{n_1}{m_1}$$

Si on exprime que les coordonnées de P vérifient l'équation de λ, on trouve :

$$m_1\xi + n_1(\eta + \zeta) + m_1\eta + n_1(\xi + \zeta) + m_1\zeta + n_1(\xi + \eta) = 0.$$

(*) Les coordonnées normales absolues du point N qui divise la distance des points M, M_c ayant pour coordonnées absolues (x, y, z) (x_1, y_1, z_1) dans le rapport $\frac{NM}{NM_c} = -\frac{n}{m}$ sont $\frac{mx + nx_1}{m + n}$, $\frac{my + ny_1}{m + n}$, $\frac{mz + nz_1}{m + n}$. Si les coordonnées sont prises dans un autre système, mais sont toujours absolues (c'est-à-dire vérifient l'identité fondamentale analogue à $ax + by + cz = 2S$) les mêmes formules conviennent. Mais si (x, y, z) (x_1, y_1, z_1) diffèrent des coordonnées absolues par des facteurs que nous supposerons être respectivement λ et λ_1, les coordonnées sont :

$$\frac{\lambda x . NM_c - \lambda_1 x_1 . NM}{NM_c - NM}, \qquad \frac{\lambda y . NM_c - \lambda_1 y_1 . NM}{NM_c - NM}, \qquad \frac{\lambda z . NM_c - \lambda_1 z_1 . NM}{NM_c - NM},$$

on voit par là que les coordonnées de N sont de la forme $(mx + nx_1)$, $(my + ny_1)$, $(mz + nz_1)$

où
$$\frac{m}{n} = -\frac{\lambda}{\lambda_1} . \frac{NM_c}{MN} .$$

D'où $$\frac{m_1}{n_1} = -2.$$

Et comme on a déjà vu que $n = m$, on a bien :

$$\frac{\text{LM}}{\text{LM}_c} : \frac{\text{PM}}{\text{PM}_c} = \frac{n}{m} : \frac{n_1}{m_1} = -2.$$

De là on déduit les propriétés suivantes :

1° Le rapport des distances du point limite L au point M et à son complémentaire M_c dépend de la position du point donné M.

2° La droite qui joint un point à son complémentaire passe par le point limite L.

3° Le rapport anharmonique des quatre points M, M_c, P, L est constant et égal à (-2).

Etant donnée une figure quelconque F, les complémentaires des différents points de F forment une figure F_c appelée *figure complémentaire* de F ; de même F est la *figure anticomplémentaire* de F_c.

Une droite d a pour figure complémentaire une droite d_c ; le point de rencontre de d avec λ étant son propre homologue appartient aussi à la droite d_c donc :

Deux droites complémentaires ou anticomplémentaires se coupent sur λ.

Cette propriété, jointe à celle des points complémentaires, d'être alignés avec L, montre que deux figures complémentaires ou anticomplémentaires sont homologiques, le centre d'homologie étant L et l'axe d'homologie λ.

Soient L′, L″, L‴ les points de rencontre de AL, BL, CL avec BC, CA, AB; ces points sont les complémentaires de A, B, C. Cette remarque nous conduit à la construction suivante du point M_c complémentaire d'un point donné M :

On joint L′ au point de rencontre de AM avec λ ; cette droite coupera LM au point cherché M_c:

19. Points supplémentaires (M, M_σ) **et points antisupplémentaires** $(M, M_{-\sigma})$. — Lorsque les coordonnées sont normales, le point $M(x, y, z)$ a pour complémentaire le point $(y + z, z + x, x + y)$ que nous noterons par la

lettre M_σ et que nous appellerons, comme l'a proposé M. J. Neuberg (*J. E.* 1886, p. 276), *point supplémentaire* de M. Le point antisupplémentaire de M sera :

$$M_{-\sigma}(-x+y+z,\ x-y+z,\ x+y-z).$$

Le point limite L est le centre du cercle inscrit à ABC, et la droite λ passe par les pieds des bissectrices extérieures.

20. Points complémentaires (M, M_γ) **et points anticomplémentaires** $(M, M_{-\gamma})$. *(Complémentaires et anticomplémentaires barycentriques).* — Le cas le plus simple des figures complémentaires est celui où les coordonnées sont barycentriques, c'est aussi le plus important. Pour ce motif nous sous-entendrons le mot *barycentriques* et quand nous dirons simplement points complémentaires ce sera les points complémentaires *barycentriques* que nous aurons en vue.

Dans les autres cas (sauf celui où les coordonnées sont normales) on devra expliciter le système de coordonnées que l'on emploie.

A un point donné M (α, β, γ) correspondra un point complémentaire (*) que nous noterons par la lettre M_γ et un point anticomplémentaire que nous désignerons par $M_{-\gamma}$.

(*) La méthode de transformation que nous étudions dans ces paragraphes a été indiquée pour la première fois par N. E. Hain (Archives de Grunert, 1885, p. 214). M. E. Hain proposait d'appeler *points complémentaires*, les points dont il a été question ci-dessus, dans le système des coordonnées normales. M. de Longchamps a généralisé cette idée et a proposé, pour éviter toute ambiguïté, d'expliciter le système de coordonnées que l'on emploie; il a, en même temps, introduit l'idée des points anticomplémentaires (*J. E.* 1886, p. 131) qui n'avait pas été donnée par M. Hain.

Plus récemment, M. J. Neuberg a proposé d'établir encore une plus grande distinction : de conserver les termes de *points complémentaires* et *anticomplémentaires* quand il s'agit des coordonnées barycentriques, et d'adopter les termes de *points supplémentaires* et *antisupplémentaires* quand on se sert des coordonnées normales.

On peut employer indifféremment les termes proposés par MM. de Longchamps et Neuberg ; néanmoins nous adopterons ici ceux proposés par M. J. Neuberg qui sont plus courts : les coordonnées normales et barycentriques étant généralement les seules employées (*).

(*) A ces deux systèmes principaux, il faut pourtant ajouter les *coordonnées tripolaires*. Elles ont conduit M. Neuberg à la considération de points remarquables qu'il a nommés *centres isologiques* et *centres isodynamiques ;* elles nous paraissent appelées à jouer, dans cette intéressante géométrie du triangle, un rôle important. C'est ce que M. Neuberg ne tardera pas, croyons-nous, à prouver, en publiant dans Mathesis les remarquables articles dont il nous a communiqué la substance. G. T.

$$M_\gamma \ldots (\beta + \gamma,\ \gamma + \alpha,\ \alpha + \beta)$$
$$M_{-\gamma} \ldots (-\alpha + \beta + \gamma,\ \alpha - \beta + \gamma,\ \alpha + \beta - \gamma).$$

Le point limite L se confond avec le centre de gravité du triangle et la droite λ est rejetée à l'infini. Dans ce cas on voit que :

Les figures complémentaires sont homothétiques, le centre d'homothétie étant le centre de gravité G.

Comme ici $\dfrac{PM}{PM\gamma} = 1$, alors $\dfrac{GM}{GM\gamma} = -2$.

D'où la construction suivante pour déterminer le point $M\gamma$, complémentaire d'un point donné M.

On joint MG et l'on prolonge cette droite au delà du point G d'une longueur $GM\gamma = \frac{1}{2}MG$. Pour le point anticomplémentaire, on prend $GM\gamma = 2MG$ (*). *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne.

... Le mode de génération des *tridents* que vous avez fait connaître dans le *Journal de Mathématiques Spéciales* (1886, p. 225), m'a suggéré une construction excessivement simple de la normale à ces courbes.

Soient, en effet, A et B deux pôles, U une courbe quelconque, M un point mobile sur cette courbe. Nous menons BI, parallèle à AM, et MI, perpendiculaire à AB; le point I décrit une courbe V.

Rapportons les courbes U et V à l'axe polaire AB et, respectivement, aux pôles A et B.

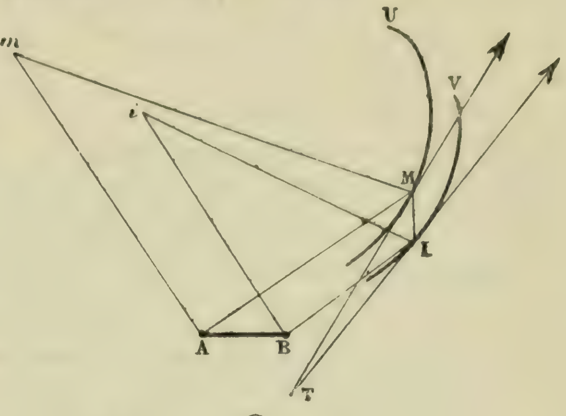
Si ω est l'angle que font AM et BI avec AB, on a, pour les

(*) Voici une autre construction empruntée à un exercice proposé par M. d'Ocagne (*J. M. E.*).

Si M_1, M_2, M_3 sont les symétriques de M par rapport aux milieux des côtés de ABC, les droites AM_1, BM_2, CM_3 concourent au complémentaire de M.

arcs infiniment petits simultanés décrits par les points M et I

$$d(\mathrm{M}) = \mathrm{M}m.d\omega \qquad d(\mathrm{I}) = \mathrm{I}i.d\omega,$$



Mm et Ii étant les normales aux courbes U et V, limitées aux perpendiculaires Am et Bi aux rayons vecteurs AM et BI.

Mais la droite MI se déplaçant parallèlement à elle-même, on a

$$\frac{d(\mathrm{M})}{d(\mathrm{I})} = \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{IT}} = \frac{\sin \widehat{\mathrm{I}}}{\sin \widehat{\mathrm{M}}}.$$

Par suite,

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{I}i} = \frac{\sin \widehat{\mathrm{I}}}{\sin \widehat{\mathrm{M}}},$$

ou

$$\mathrm{M}m.\sin \widehat{\mathrm{M}} = \mathrm{I}i.\sin \widehat{\mathrm{I}} \ ;$$

c'est-à-dire que *les projections des normales* Mm *et* Ii *sur* MI *sont égales*, d'où la construction immédiate de l'une des normales lorsque l'on connaît l'autre.

Dans le cas où la courbe U est une parabole dont l'axe passe en A, perpendiculairement à AB, la courbe V, ainsi que vous l'avez remarqué, est un *trident de Newton*. On a donc ainsi une construction simple de la normale à cette dernière courbe.

Extrait d'une lettre de M. Catalan.

... Voulez-vous aussi adresser tous mes remerciements à mon jeune Camarade, M. d'Ocagne. Du moment qu'il s'agit d'une construction *sur le chantier*, je suis incompétent, et mes objections ne subsistent plus.

BIBLIOGRAPHIE

Notions élémentaires du calcul différentiel et du calcul intégral, par J. Pauly, ingénieur civil, etc.... (Librairie polytechnique, Baudry et Cie, 15, rue des Saints-Pères, Paris. — Prix 7 fr. 50 c.

On sait que les derniers programmes de l'École Polytechnique ont ouvert la porte aux premiers principes du calcul différentiel et du calcul intégral. En se reportant à la publication de la librairie Croville-Morant (*Questions d'examens*, 1886) on peut rapidement se convaincre de l'importance qu'ont prise, dans les examens d'admission à cette école, les exercices élémentaires, sur ces deux calculs. A ce point de vue, tout au moins, le livre de M. Pauly nous paraît devoir être consulté avec utilité par les élèves de mathématiques spéciales. Les principes y sont exposés avec clarté; de plus, l'ouvrage renferme de nombreuses et intéressantes applications sur les rectifications, les aires, les volumes, les centres de gravité, etc. G. L.

QUESTIONS D'EXAMEN

6. — *Si la normale δ en un point* M *mobile sur une surface* Σ *rencontre constamment une droite fixe* Δ, Σ *est une surface de révolution dont l'axe est la droite* Δ.

Prenons des axes rectangulaires, Δ étant l'axe des z, et menons par M un plan perpendiculaire à Δ; ce plan coupe Σ suivant une courbe U qui se projette, en vraie grandeur, sur le plan xoy; soit u cette projection. La tangente δ' à U, au point M, et δ, forment un angle droit; δ' étant parallèle à yox cet angle se projette sur ce plan, suivant un angle droit.

On conclut de là, et de ce fait que δ rencontre oz, que u est une courbe telle que la normale en un point pris sur elle, arbitrairement, passe par un point fixe O.

Cette remarque prouve que u est une circonférence.

En effet, l'équation de la normale étant

$$\frac{X - x}{dy} + \frac{Y - y}{dx} = 0,$$

on a, dans l'hypothèse présente,

$$xdx + ydy = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 = K.$$

D'après cela, la courbe u est une circonférence. Par suite, la courbe U est aussi un cercle ayant son centre sur oz; si l'on observe enfin que oz est perpendiculaire au plan de ce cercle, en un point qui coïncide avec son centre, on voit que Σ est une surface de révolution.

7. — *Trouver le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à des plans fixes soit constante ; déterminer le centre* O *de la surface cherchée* Σ, *et démontrer que ce point est le centre de gravité des pieds des perpendiculaires abaissées de* O *sur les plans donnés.*

Prenons des axes rectangulaires; l'équation de la surface Σ est

$$\Sigma \frac{(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)^2}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} = 0.$$

Les coordonnées du centre (α, β, γ) vérifient les relations:

$$(H) \begin{cases} \Sigma \dfrac{A_1(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1)}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} = 0, \\ \Sigma \dfrac{B_1(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1)}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} = 0, \\ \Sigma \dfrac{C_1(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1)}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} = 0. \end{cases}$$

D'autre part, les coordonnées x_1, y_1, z_1, du pied H_1 de la perpendiculaire abaissée, de O, sur le plan P_1 correspondant à l'équation

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

sont données par les formules :

$$\frac{\alpha - x_1}{A_1} = \frac{\beta - y_1}{B_1} = \frac{\gamma - z_1}{C_1} = \frac{-(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1)}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.$$

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité des points H; en supposant que les plans donnés soient en nombre égal à m, on a

$$m\xi = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = m\alpha + \Sigma \frac{A_1(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1)}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.$$

En comparant ce résultat avec la première des équations (H) on voit que $\xi = \alpha$; on trouve de même $\eta = \beta$ et $\zeta = \gamma$; le point O est donc le centre de gravité des points H.

8. — *Soient* α, β, γ; α', β', γ' *les cosinus directeurs de deux directions principales; on sait que*

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0; \qquad (1)$$

en déduire que l'équation en S *a ses racines réelles.*

Si l'équation en S avait une racine imaginaire S′, (l'équation de la quadrique considérée étant, bien entendu, à coefficients réels), cette équation en S admettrait aussi une seconde racine imaginaire conjuguée S″.

Les expressions correspondantes α, α'; β, β'; γ, γ'; seraient, deux à deux, imaginaires conjuguées et l'on pourrait poser

$$\alpha = a + bi, \qquad \beta = c + di, \qquad \gamma = e + fi,$$
$$\alpha' = a - bi, \qquad \beta' = c - di, \qquad \gamma' = e - fi.$$

D'après cela, l'égalité (1) deviendrait

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 0, \text{ etc.} \dots$$

Cette démonstration est due à M. A. Buchheim, (*Messenger of Mathematics*, 1884); nous l'avons empruntée à *Mathesis* (n° de mars 1887, p. 63).

9. — *Prendre la dérivée, par rapport à* S, *de la fonction* Δ(S),

$$\Delta(S) \equiv \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix}.$$

En développant Δ(S), on sait que l'on a

$$\Delta(S) \equiv (A - S)(A' - S)(A'' - S) + 2BB'B'' - (A - S)B^2 - (A' - S)B'^2 - (A'' - S)B''^2,$$

et, par suite,

$$\Delta'(S) \equiv B^2 - (A' - S)(A'' - S) + B'^2 - (A'' - S)(A - S) + B''^2 - (A - S)(A' - S).$$

Ce résultat peut s'écrire sous la forme

$$\Delta'(S) \equiv - \begin{vmatrix} A' - S & B \\ B & A'' - S \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A'' - S & B' \\ B' & A - S \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A - S & B'' \\ B'' & A' - S \end{vmatrix};$$

mais la question posée a pour objet l'établissement direct de cette égalité, le déterminant Δ(S) n'étant pas développé en mineurs. En d'autres termes, on propose, d'une façon générale, de *trouver la dérivée d'un déterminant.*

Prenons d'abord un déterminant du second ordre et soit

$$U = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix},$$

A, B, C, D désignant des fonctions d'une variable x.

Nous avons

$$U = AD - BC,$$

et, par conséquent,

$$U' = AD' + DA' - BC' - CB',$$

ou

$$U' = \begin{vmatrix} A & B' \\ C & D' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A' & B \\ C' & D \end{vmatrix}.$$

La loi observée ici, sur ce cas simple, est générale; elle donne lieu à l'énoncé suivant :

Pour prendre la dérivée d'un déterminant dont les éléments sont des fonctions d'une variable x, *on écrit qu'elle est égale à une somme de déterminants déduits, du déterminant proposé, en prenant toutes les colonnes, à l'exception d'une seule et en substituant à celle-ci une colonne dont les éléments sont égaux aux dérivés des termes de la colonne envisagée.*

En supposant la loi vraie pour un déterminant d'ordre $(n - 1)$, on reconnaît, sans difficulté, qu'elle subsiste pour un déterminant d'ordre n; la loi que nous venons d'énoncer est donc générale.

QUESTION 20

Solution par M. X. Barthe.

On considère une surface fixe du second degré et des surfaces homothétiques du second degré circonscrites à la première. Trouver le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à ces surfaces.

Prenons, par exemple, l'ellipsoïde rapportée à ses axes principaux :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

L'équation générale des ellipsoïdes homothétiques *(et concentriques)* (*), est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda=0.$$

Le cône ayant pour sommet le point (x, y_0, z_0) et circonscrit à ces surfaces aura pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-\lambda\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-\lambda\right)+\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\lambda\right)$$
$$-\frac{2xyx_0z_0}{a^2b^2}-\frac{2xzx_0y_0}{a^2c^2}-\frac{2yzy_0z_0}{b^2c^2}+\cdots=0.$$

Pour qu'il soit de révolution, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{1}{a^2}\left(-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-\lambda\right)=\frac{1}{b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-\lambda\right)$$
$$=\frac{1}{c^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-\lambda\right)$$

éliminant λ entre ces équations, et rendant les coordonnées courantes, on a, pour le lieu,

$$\frac{x^2}{a^2}(b^2-c^2)+\frac{y^2}{b^2}(c^2-a^2)+\frac{z^2}{c^2}(a^2-b^2)=0.$$

C'est un cône réel ayant l'origine pour sommet.

QUESTION 125

Solution, par M. Ferval, élève au Lycée Henri IV.
(Classe de M. Macé de Lépinay.)

Une parabole de forme invariable glisse entre deux droites rectangulaires Ox, Oy; *trouver le lieu décrit par l'extrémité du diamètre qui passe par l'origine.*

La courbe est du huitième degré; mais elle peut se mettre, en coordonnées polaires, sous la forme remarquable :

$$\frac{p}{\rho}=1-\cos 4\omega \text{ (**)}.$$

(*) Condition évidemment oubliée dans l'énoncé. G.-L.

(**) Énoncé rectifié; une erreur d'impression avait fait écrire

$$\frac{p}{\rho}=1-4\cos\omega.$$

Déduire de cette équation les points d'inflexion que présentent les quatre branches de la courbe. G.-L.

Prenons les deux droites Ox, Oy pour axes de coordonnées, l'équation de la parabole tangente aux deux axes en leurs points de rencontre A, B avec une droite mobile

$$ux + vy - 1 = 0,$$

est

$$(ux - vy)^2 - 2(ux + vy) + 1 = 0.$$

En appliquant l'égalité bien connue

$$p^2 = \frac{-\Delta}{(A + A')^3},$$

qui donne en axes rectangulaires le paramètre p d'une parabole, on a ici :

$$p^2 = \frac{4u^2v^2}{(u^2 + v^2)^3}. \qquad (1)$$

Observons que les coordonnées x, y de l'extrémité du diamètre passant par l'origine sont les moitiés de celles du milieu de AB, c'est-à-dire :

$$x = \frac{1}{4u} \qquad y = \frac{1}{4v}. \qquad (2)$$

Remplaçons dans (1), qui n'est autre que l'équation tangentielle de l'enveloppe de AB, u et v par leurs valeurs, nous obtenons le lieu cherché :

$$p^2 = \frac{64x^4y^4}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Si l'on passe en polaires, l'équation du lieu devient :

$$p^2 = 64.\rho^2 \sin^4 \omega \cos^4 \omega = 4\rho^2 \sin^4 2\omega = \rho^2(1 - \cos 4\omega)^2$$

ou

$$\frac{p}{\rho} = \pm (1 - \cos 4\omega).$$

La courbe qui correspond à cette équation est constituée par quatre branches paraboliques doublement infléchies. Les axes et les bissectrices sont des axes de symétrie et il suffit de construire la partie de la courbe qui correspond à la variation de ω, depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{4}$. Les autres branches se déduisent, de celle qu'on obtient ainsi, par symétrie.

Cherchons les points d'inflexion.

Ils sont donnés par la résolution de l'équation

$$\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = 0,$$

qui donne, ici,

$$\cos 4\omega = -\frac{1}{15}.$$

On peut ainsi trouver facilement le plus petit arc qui correspond à cette formule et qui est voisin de 24°. Les huit points d'inflexion que l'on peut trouver avec la règle et le compas sont situés sur un cercle de centre O et de rayon égal à $\frac{15}{16}p$.

Nota. — Autres solutions par MM. Lucien Marchis, élève au lycée de Rouen; Hugon, à Poligny; Vacquant, ancien élève de mathématiques spéciales à Lille.

QUESTION 147

Un quadrilatère variable OGHM *se déplace et se déforme suivant les conditions suivantes :*

1° Le point O *est fixe ;*

2° La longueur OG *est constante ;*

3° L'angle G *est droit ;*

4° Le côté HM *est à chaque instant parallèle à* OG

5° L'angle GOM *varie de grandeur et de position, mais il a toujours même bissectrice.*

Trouver le lieu du sommet M.

Prenons le point O, pour origine ; la bissectrice fixe, pour axe ox; et, pour axe oy, une perpendiculaire à ox.

Ayant posé :

$$OM = \rho, \qquad MOx = \omega, \qquad OG = a$$

en observant que le point M, d'après la construction indiquée,

se projette au milieu de OH, on a

$$OR = \frac{OH}{2} = \rho \cos \omega. \qquad (1)$$

D'ailleurs, le triangle OGH donne

$$OH = \frac{a}{\cos \omega}; \qquad (2)$$

on a donc, en comparant (1) et (2),

$$\rho = \frac{a}{2 \cos^2 \omega}.$$

C'est l'équation polaire du lieu. La courbe correspondante se construit facilement; elle est constituée par deux branches paraboliques.

VARIÉTÉS

SUR LES FONDEMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Par M. **G. Milhaud,** professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée du Havre.

(*Suite*, voir p. 91.)

On dit souvent que Descartes a substitué des équations à des formes de lignes ou de surfaces. Rien n'est plus faux; une forme, par elle-même, ne peut entrer dans les calculs que si sa définition était déjà mathématique, c'est-à-dire que si on connaissait déjà une propriété de quantité appartenant au point ou à la ligne dont le mouvement engendre la figure. L'ellipse est le lieu d'un point dont la somme des distances à deux points fixes est constante. Le cône de révolution est engendré par une droite qui fait un angle constant avec une droite fixe, qu'elle rencontre en un point fixe. Il n'est pas de courbes ou surfaces géométriques définies par leur forme. Descartes n'a donc pas eu à substituer des équations, à la forme, soit dans les définitions, soit dans

l'étude des êtres géométriques, mais seulement à trouver une méthode générale qui permît de dégager simplement et de traduire par des équations algébriques les propriétés de quantités qui faisaient des figures de la géométrie des êtres mathématiques.

Mais laissons-là ces réflexions qui nous entraîneraient trop loin. Il nous paraît suffisamment établi maintenant que la croyance à l'impossibilité logique de faire coïncider la limite d'une variable, avec un état particulier de cette variable, est une erreur absolue et nous pourrons envisager maintenant, sans craindre aucun malentendu sur la signification du problème, la question de savoir si la variable atteindra cet état particulier qui est la limite. Cette question est absolument étrangère à la notion mathématique. Il est plus que dangereux, il est contraire à l'esprit même des raisonnements mathématiques, d'en faire dépendre la solution de l'idée de limite. Et il faut approuver aussi peu la tendance de quelques-uns à parler de l'impossibilité pour la variable d'atteindre sa limite, que l'idée, plus communément répandue, suivant laquelle la limite est le terme effectif d'une variation.

Il suffira, pour le montrer, d'insister un peu sur le sens de cette question. On peut l'entendre de deux façons : ou bien on suppose réalisée la variation de la grandeur étudiée, et on se demande s'il arrivera un instant, dans le temps, où elle prendra la valeur particulière, qui est celle de la limite ; ou bien l'esprit cherche à concevoir la génération même de la grandeur limite à l'aide de la variable et se demande s'il peut reconstituer cette limite, par une série illimitée d'approximations successives.

Voyons la première de ces questions. Avant tout, elle exige pour la réalisation objective de la variation, qu'on se donne un certain nombre de circonstances précises, dont la nature déterminera la solution du problème, en particulier une certaine loi liant au temps la valeur de la variable dont on dispose. Celle-ci devient fonction du temps et la question est déplacée. Il s'agit de savoir si, le temps s'écoulant, elle parviendra à la valeur qui fait prendre, à la première grandeur, sa valeur limite.

Exemple : La variable sera la longueur OA_n portée sur Ox à partir du point O, qui serait égale à la somme des n premiers termes de la progression

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\cdots$$

On sait que cette somme a une limite, ici égale à la fraction 10/9, quand n croît indéfiniment. L'extrémité A_n de la longueur OA_n a donc pour limite un certain point L situé à 10/9 de mètre de l'origine O. Le point A_n arrivera-t-il en L ? Supposons, par exemple, que la vitesse de A_n change, à chaque élément nouveau du chemin qu'on fait décrire, de façon qu'il les parcoure tous dans des temps égaux : le mobile A_n ne parviendra jamais en L. Au contraire qu'il marche d'un mouvement uniforme de vitesse 1 de façon à parcourir chaque élément nouveau en 10 fois moins de temps que le précédent : il est clair qu'il aura parcouru 10/9 de mètre en 10/9 de seconde.

Ces exemples suffiront, je pense, à bien établir que la quesde savoir si la variable parviendra réellement, à un instant, plus ou moins éloigné dans l'avenir, au terme de sa variation, est absolument distincte du fait de l'existence de la limite. *(A suivre.)*

QUESTIONS PROPOSÉES

221. — Mener, à une circonférence fixe, une tangente Δ telle que le segment AA' intercepté sur cette droite, par deux droites fixes D, D', ait une longueur donnée.

A propos de ce problème, généralisation de celui de Pappus, on cherchera le lieu du point M obtenu en traçant par A une parallèle à D', et par A' une parallèle à D.

Ce lieu est une quartique. On déterminera les formes diverses affectées par cette courbe.

Enfin, on fera voir que le problème proposé se résout complètement par le tracé d'ellipses et d'hyperboles.

(Ph. F.)

222. — On considère un triangle AOB rectangle en O; par les points A et B on mène deux droites rectangulaires mobiles qui se coupent en S et l'on imagine une parabole P, de sommet S, ayant pour axe SA et passant par O.

1° La tangente en O, à P, rencontre AS en un point I; démontrer que le lieu décrit par I est une circonférence.

2° L'enveloppe des paraboles P est une cissoïde oblique.

(G. L.)

223. — Lieu des centres des cercles coupant l'ellipse en quatre points tels que trois d'entre eux soient les sommets d'un triangle équilatéral. Ce lieu est une ellipse.

Enveloppe de la droite qui joint le centre au quatrième point, et lieu du milieu de cette droite; on trouvera pour l'enveloppe demandée une développée d'ellipse; le dernier lieu est une ellipse. *(X.)*

224. — Étant donnés, dans un plan, deux droites et un point fixe, on fait tourner une droite autour de ce point. Trouver le lieu des points de contact, situés sur cette droite, des circonférences tangentes aux deux droites fixes données et à la droite mobile. *(Ernest Lebon.)*

225. — Soient P_1 et P_2 deux points fixes pris sur une parabole, P un point variable sur la même courbe. Les droites PP_1 et PP_2 coupent le diamètre conjuguée de la corde P_1P_2 en des points qui sont symétriques par rapport au point où ce diamètre coupe la parabole.

(D'Ocagne.)

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 10828-7.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

SUR QUELQUES CERCLES REMARQUABLES

(CERCLES DE NEUBERG ET DE M'CAY).

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 121).

6. Équation des cercles de Neuberg (*). — *1° Coordonnées cartésiennes.* — Prenons pour axes des coordonnées le côté BC et la perpendiculaire élevée en son milieu et cherchons le lieu d'un point A tel que l'angle de Brocard du triangle ABC ait une valeur constante. x, y étant les coordonnées du point A, on trouve :

$$\text{cotg } C = \frac{\frac{a}{2} + x}{y}, \qquad \text{cotg } B = \frac{\frac{a}{2} - x}{y},$$

$$\text{cotg } A = \frac{1 - \text{cotg } B \text{ cotg } C}{\text{cotg } B + \text{cotg } C} = \frac{x^2 + y^2 - \frac{a^2}{4}}{ay}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$\text{cotg } A + \text{cotg } B + \text{cotg } C = \text{cotg } \omega,$$

on trouve

$$x^2 + y^2 - ay \text{ cotg } \omega + \frac{3a^2}{4} = 0.$$

Ce lieu est donc une circonférence telle que les tangentes issues de D_a milieu de BC et de B soient respectivement égales à la hauteur du triangle équilatéral construit sur BC et au côté BC.

2° Coordonnées barycentriques. — L'équation d'un cercle

(*) Dans ce paragraphe et dans quelques-uns des suivants, l'article de M. Vigarié emprunte certaines considérations analytiques, qui ne sont pas tout à fait élémentaires ; mais nous n'aurions pu les supprimer sans nuire sensiblement à l'ensemble du sujet traité.

quelconque est:

$$a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta - (A\alpha + B\beta + C\gamma)(\alpha + \beta + \gamma) = 0,$$

A, B, C étant les puissances des cercles par rapport aux sommets de référence (*J. S.* 1886, p 57). Les puissances de N_a par rapport à ces sommets étant o, a^2, a^2, les équations barycentriques des cercles de Neuberg seront :

$$N_a \ldots\ldots a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta - a^2(\beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) = 0,$$
$$N_b \ldots\ldots a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta - b^2(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta + \gamma) = 0,$$
$$N_c \ldots\ldots a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta - c^2(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + \gamma) = 0.$$

Les axes radicaux de ces cercles combinés avec le cercle ABC sont évidemment les parallèles à a, b, c, menées par A, B, C.

L'axe radical des cercles N_b et N_c a pour équation :

$$b^2(\alpha + \gamma) - c^2(\alpha + \beta) = 0$$

Le centre radical satisfait à :

$$a^2(\beta + \gamma) = b^2(\alpha + \gamma) = c^2(\alpha + \beta) \qquad (1)$$

On sait que le point D centre d'homologie du triangle ABC et *du premier triangle de Brocard* a pour coordonnées barycentriques

$$\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$$

Les formules (1) montrent que le centre radical des cercles N_a, N_b, N_c est l'*anti-complémentaire* du point D.

Les trois triangles N_aBC, N_bCA, N_cAB étant isocèles et semblables, les droites AN_a, BN_b, CN_c se coupent en un même point de l'*hyperbole de Kiepert*. Ce point est le *point* N *de Tarry* (*) (Voir *J. S.* 1886, p. 75) on a donc ce théorème :

7. Théorème IV. — 1° *Le centre radical des trois cercles de Neuberg est l'anti-complémentaire du point* D. 2° *Les droites qui joignent* A, B, C *aux centres* N_a, N_b, N_c *de ces cercles se coupent au point de Tarry.*

(*) Voici une démonstration géométrique de cette partie. Il faut démontrer que les droites AN_a, BN_b se coupent sur le cercle ABC ou font entre elles un angle égal à C. Désignons par F_a, F_b, F_c trois figures semblables construites sur BC, CA, AB. Les centres N_a, N_b sont des points homologues de F_a, F_b. L'homologue de B considéré comme faisant partie de F_b est dans F_a, le point A_2. Donc BN_b, A_2N_a sont des lignes homologues de F_b, F_a ; elles font entre elles l'angle C ; les rayons N_aA_2, N_aA du triangle AA_2A semblable à ABC font l'angle 2C : donc AN_a, BN_b font entre elles l'angle C.

8. Théorème V. — *On construit sur les côtés* BC, CA, AB *du triangle* ABC *trois figures semblables* F_a, F_b, F_c; *soient* I_a, I_b, I_c *trois points homologues. Si les droites* AI_a, BI_b *sont parallèles, la droite* CI_c *est parallèle à la même direction et les points* I_a, I_b, I_c *qui jouissent de cette propriété décrivent les cercles de Neuberg* (**).

En effet, le point B considéré comme faisant partie de F_b a pour homologue A_2 dans F_a; donc les BI_b, A_2I_a lignes homologues de F_b, F_a font l'angle C; mais par hypothèse BI_b, AI_a sont parallèles; donc les lignes AI_a, A_2I_a font entre elles l'angle C. L'angle $\widehat{AA_1A_2}$ est aussi égal à C. De là on conclut que I_a appartient au cercle N_a. De même I_b appartient au cercle N_b.

Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Si deux cordes des cercles N_a, N_b *menées par* A *et* B *sont constamment parallèles, leurs secondes extrémités sont des points homologues de* F_a, F_b. *Cette propriété s'étendant aux cercles* N_a N_c, *on voit que* CI_c *est parallèle à* AI_a. *(A suivre).*

VARIÉTÉS

ESSAI
SUR LA
GEOMETRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 126).

131. Le cas des deux obstacles. — On peut imaginer que le point qu'il faut obtenir, au delà d'un obstacle donné, soit situé dans un terrain où les alignements dont nous avons parlé, dans les diverses solutions qui précèdent, ne puissent être exécutés. Tel est le cas où un autre obstacle se trouve

(**) Les nos 8 et 9 résolvent complètement la question (*J. E.*, 1882, p. 24. Comparer aussi *J. S.* 1886, p. 75. — J. Casey. *A treatise on conic sections*, pp. 248-253.

situé dans le voisinage de celui que l'on veut franchir et dans la partie où doit pénétrer le prolongement cherché.

Nous indiquerons deux cas correspondant à ce genre de difficultés.

Premier Cas. — Supposons d'abord que l'on puisse jalonner, entre les deux obstacles, une ligne droite ne rencontrant ni l'un ni l'autre de ces obstacles, et, néanmoins, assez étendue pour pénétrer dans les régions où peuvent, sans difficulté, s'effectuer les alignements nécessaires, représentés par la figure 164.

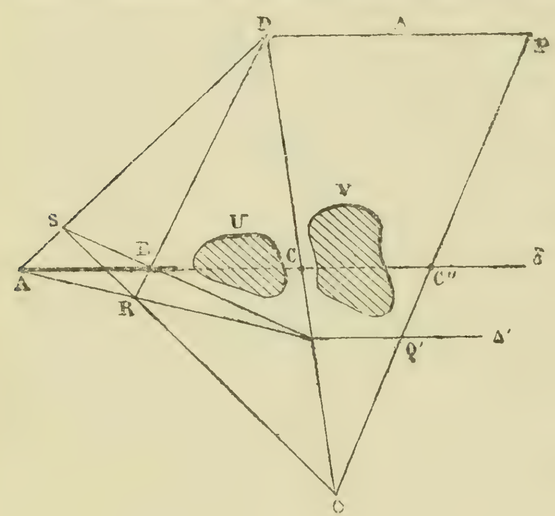


Fig. 164

Le théorème de Jean de Ceva, appliqué au triangle APQ, donne la relation

$$\frac{PC}{QC} = \frac{SP}{AS} \cdot \frac{AR}{RQ}.$$

On connaît donc le rapport des segments PC, QC et leur somme ; le point C se trouve ainsi déterminé. Mais cette solution exige plusieurs chaînages.

Si la droite RS rencontre PQ dans les limites du terrain (et l'on peut toujours, par quelques tâtonnements, faire en sorte qu'il en soit ainsi, en rapprochant suffisamment Q du point inconnu C), on a

$$\frac{2}{C'C} = \frac{1}{C'Q} + \frac{1}{C'P}$$

et la table des inverses, dont nous parlerons bientôt, par un calcul rapide, donne C′C.

Pour prolonger AB au-delà du second obstacle, on pourra mener, par les points P, Q, des parallèles Δ, Δ′ à AB, et, après avoir jalonné une droite C′Q′P′, on prendra sur celle-ci un point C″, la longueur C′C″ étant calculée au moyen de l'égalité

$$\frac{2}{C'C''} = \frac{1}{C'Q'} + \frac{1}{C'P'}.$$

On peut d'ailleurs, la chose est manifeste, obtenir le prolongement δ de AB en considérant les deux obstacles U et V comme constituant un seul et même obstacle. Alors pour déterminer de δ, on appliquera l'une des méthodes que nous avons indiquées plus haut; ou toute autre, car elles sont innombrables. Mais on a bien compris que l'intérêt de la remarque précédente porte, non, sur la construction de δ, mais uniquement sur la détermination du point C, point situé *entre* les deux obstacles et sur le prolongement de AB.

Second Cas. — Supposons maintenant que les obstacles U et V soient disposés comme le montre la *fig. 165;* alors on ne peut prolonger PQ de part et d'autre des obstacles, comme dans le cas que nous venons d'examiner. Sans doute, on pourrait répéter la construction indiquée en prenant les points P et Q sur une semi-droite partant de la région comprise entre U et V; mais nous profiterons de la disposition particulière que nous venons d'imaginer pour signaler une autre solution.

Jalonnons deux alignements AR, AS, et d'un point M pris sur AB, abaissons des perpendiculaires MP, MQ; puis, jalonnons une droite RS parallèle à PQ et choisie de telle sorte que les perpendiculaires élevées aux droites Δ, Δ' aux points R, S, pénètrent dans la région qui est située entre U et V. Nous avons ainsi construit deux figures homothétiques, et le point C, obtenu par cette construction, est situé sur AB.

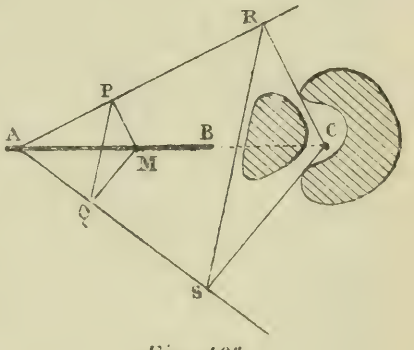


Fig. 165.

Si l'on opère avec une fausse équerre, on remplacera les angles droits que nous avons considérés par des angles quelconques, mais égaux, deux à deux; le principe des figures homothétiques étant d'ailleurs appliqué comme il vient d'être dit.

32. Examen du cas où l'obstacle est inaccessible. — L'obstacle peut être inaccessible dans plusieurs

conditions; pour chacune d'elles se présentent des difficultés que nous allons successivement considérer.

Premier cas particulier. — Supposons, pour donner une idée de la difficulté matérielle que nous abordons ici, que l'obstacle que nous avons à considérer soit constitué par une île boisée, située au milieu d'une rivière.

Les solutions que nous avons données jusqu'ici supposent, toutes, que l'on puisse librement circuler autour de l'obstacle, au moins dans l'une des régions qui correspondent à la droite que l'on veut prolonger, de façon à pouvoir jalonner les alignements nécessaires. Dans le cas présent, les jalonnements peuvent bien être faits successivement, sur une rive, puis sur l'autre; mais il existe entre ces deux opérations une discontinuité matérielle, causée par la présence de la rivière qui entoure l'obstacle. Nous devons donc indiquer comment doivent être exécutés les jalonnements, ainsi séparés les uns des autres.

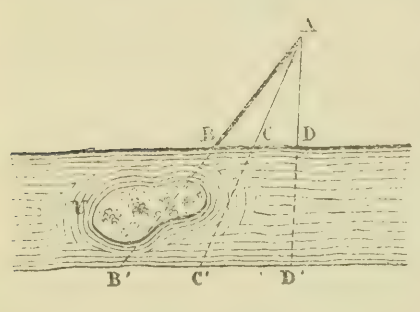


Fig. 166.

Soient Δ et Δ' deux parallèles tracées sur les rives opposées. Pour prolonger AB sur la rive Δ', à travers l'obstacle U, on prendra sur Δ un point arbitraire C, puis $CD = BC$ et l'on fixera des jalons aux points A, C et D.

Après avoir franchi la rivière, on détermine alors sur Δ', les points C' et D' qui, sur Δ, sont en ligne droite avec : A, C d'une part; A, D d'autre part. Enfin, ayant pris, avec le cordeau, $C'B' = D'C'$; le point B', ainsi trouvé, représente le point où AB prolongé rencontre Δ'. En répétant cette opération pour une droite Δ'' parallèle à Δ', on obtient un second point B'' du prolongement cherché, et celui-ci se trouve, ainsi, complètement déterminé.

Remarque. — Nous avons supposé, dans la solution précédente, que les rives Δ, Δ' étaient parallèles, ou, du moins que l'on avait jalonné, de part et d'autre de la rivière, deux alignements parallèles. Ces alignements imaginés ici, sont

toujours faciles à obtenir, soit avec la fausse équerre, soit avec l'équerre ordinaire. Pourtant, si l'on n'a pas d'équerre à sa disposition, on peut néanmoins résoudre, sans autre emploi que les jalonnements et avec l'aide du cordeau, le problème précédent, en opérant comme nous allons l'indiquer.

Prenons sur Δ des points C, D et E, soit arbitrairement, soit, ce qui est préférable, de telle sorte que

$$ED = EC = BC;$$

nous adopterons cette seconde hypothèse.

La propriété du rapport anharmonique, appliquée aux deux ponctuelles qui se trouvent sur Δ et sur Δ', donne

$$\frac{B'C'}{B'D'} = \frac{E'C'}{4E'D'}.$$

Le point B′ peut être déterminé d'après cette égalité; et, bien que la solution, signalée ici, présente, dans sa réalisation, quelques longueurs; elle offre pourtant un intérêt réel, si l'on se refuse l'emploi de l'équerre.

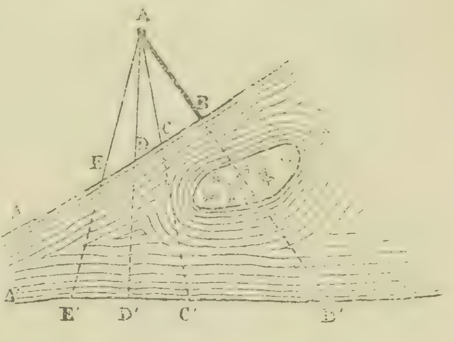


Fig. 167.

Deuxième cas particulier. — Deux points A et B sont visibles, mais ils sont situés dans une région inaccessible; on propose de jalonner, dans la région accessible, le prolongement de AB, en supposant : soit que les points A et B soient séparés par un obstacle qui ne permet pas de les viser, simultanément, dans la région accessible; soit que le segment AB rencontre, dans la région où il est situé, un obstacle qui le masque complètement à l'observateur placé dans la partie accessible.

Soit V l'espace inaccessible dans lequel se trouvent deux points A, B visibles de certains points placés dans la région accessible V′; mais la droite AB est cachée par un obstacle U pour un observateur placé au point C où AB rencontre la droite Δ qui sépare les deux régions V, V′; et dans ces conditions, on demande de déterminer C.

1° Supposons d'abord que les points A et B ne soient pas très éloignés de Δ. Nous pourrons, avec l'équerre d'arpenteur,

jalonner les droites $\alpha A'$, $\beta B'$, qui, dans l'espace V', représentent les perpendiculaires abaissées des points A et B sur Δ. Soit O le milieu de AB. Ayant jalonné dans V' les prolongements de AO et de BO, nous obtenons deux points A', B'. La droite A'B' rencontre Δ en C' et le point inconnu C est le symétrique de C' par rapport à O.

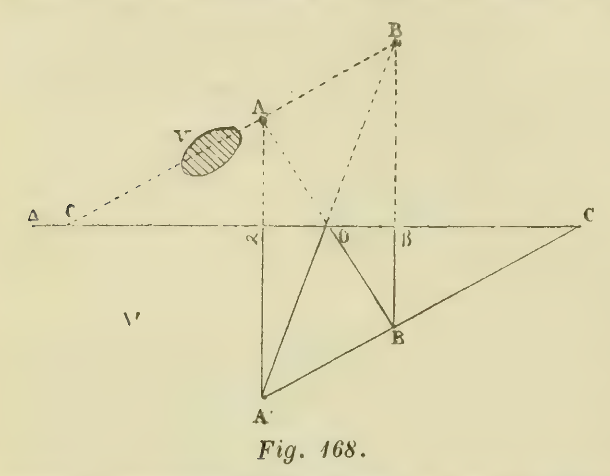


Fig. 168.

2° Cette solution cesse d'avoir un caractère pratique si les points A et B sont à une grande distance de Δ (*). Voici, dans cette seconde hypothèse, une solution préférable.

Supposons, pour varier la disposition relative de l'obstacle V et des points A et B, que V soit placé entre A et B; AB rencontre Δ en un point M que nous nous proposons de déterminer. A cet effet, prenons dans la partie accessible V' un point J d'où l'on puisse apercevoir simultanément A et B. Soit MI le prolongement inconnu de AB; ayant mené la droite CG parallèlement à Δ nous avons

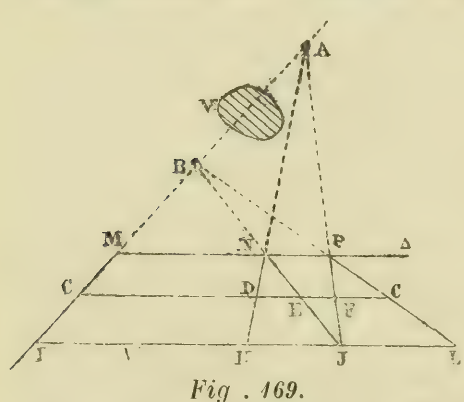


Fig. 169.

$$\frac{MN}{NP} = \frac{CD}{DF} = \frac{CE}{EG}$$

d'où

$$\frac{CD}{CE} = \frac{DF}{EG}.$$

(*) Cette condition n'a pas été indiquée sur la figure. Pour plus de commodité, on a donné à celle-ci de petites dimensions; le lecteur imaginera que l'obstacle V, ainsi que les points A et B qui, sur la figure 169, sont voisins de Δ, sont, au contraire, beaucoup plus éloignés de cette droite.

Cette relation très simple permet de déterminer le point C et, si l'on observe que CG est une droite quelconque, parallèle à Δ, on aura de la sorte autant de points que l'on voudra du prolongement de AB. En appliquant la remarque précédente à LI, droite menée par J parallèlement à Δ, on a

$$\frac{IK}{IJ} = \frac{KJ}{JL},$$

ou

$$\frac{1}{JI} = \frac{1}{JK} - \frac{1}{JL}.$$

En utilisant la table aux inverses, on aura immédiatement la longueur JI. Si l'un des points est visible du point I (ce que nous avons supposé) on jalonnera IM, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à la détermination d'un second point; sinon, on fixera la position du point I et du point C, comme il vient d'être dit.

Troisième cas particulier. — Enfin, pour amener le problème qui nous occupe à une complication plus grande encore, supposons que la droite inaccessible AB soit déterminée par deux points qui ne soient pas visibles *à la fois* pour l'observateur se déplaçant dans la partie accessible. C'est ainsi que dans la figure 171 la partie accessible est divisée en trois

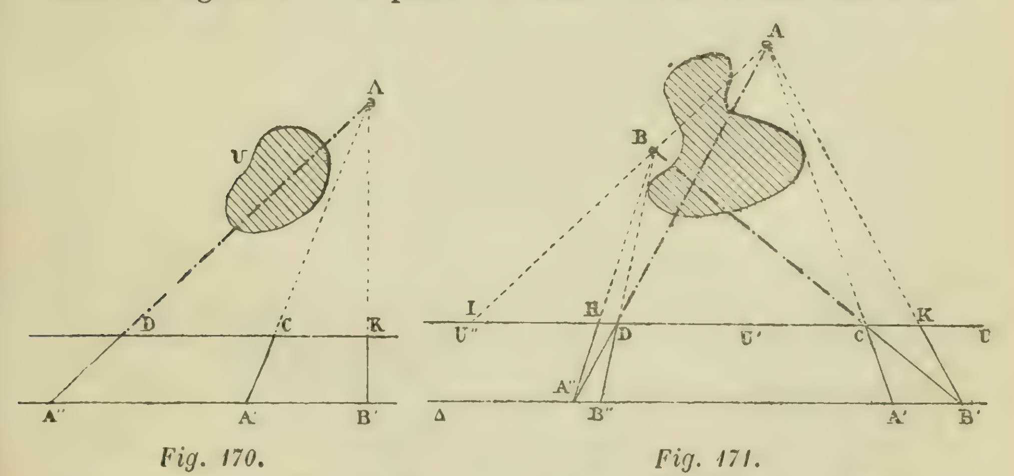


Fig. 170. *Fig. 171.*

régions U, U′, U″; de U, on voit A, mais non B; de U″, on peut apercevoir B, mais non A; enfin, de U′ on ne peut viser ni A, ni B. Dans ces conditions, on propose de jalonner, dans la partie U″, le prolongement de AB.

Nous ferons d'abord observer que, un point A *(fig. 170)* étant invisible pour un observateur placé en D, on peut néanmoins jalonner la droite DA″ qui représente le prolongement de DA; voici comment cette détermination peut être obtenue :

Traçons deux droites parallèles A′B′ et CD; nous avons

$$\frac{A'A''}{B'A'} = \frac{CD}{KC};$$

Cette égalité permet de calculer la longueur A′A″, le point A″ trouve donc déterminé.

D'après cela, nous pouvons *(fig. 171)* nous accorder la connaissance des droites DA″, CB′ qui représentent les prolongements des droites DA, CB, bien que, encore une fois, ces lignes de visée ne puissent être effectuées.

Cela posé, considérons le quadrilatère ABCD et la droite Δ qui est parallèle à CD.

Le triangle A′DH et la transversale BAI donnent

$$\frac{BH}{BA''} \cdot \frac{AA''}{AD} \cdot \frac{ID}{IH} = 1;$$

d'autre part, nous avons

$$\frac{AA''}{AD} = \frac{A'A''}{CD},$$

et

$$\frac{BH}{BA''} = \frac{BD}{BB''} = \frac{CD}{B'B''}.$$

De ces égalités, nous concluons

$$\frac{IH}{ID} = \frac{A'A''}{B'B''}.$$

Nous aurions de même

$$\frac{IC}{IK} = \frac{A'A''}{B'B''}$$

et, par suite,

$$\frac{IH}{ID} = \frac{IC}{IK} = \frac{A'A''}{B'B''}.$$

Le point I cherché se trouve ainsi déterminé; on observera que les points C et D sont arbitrairement choisis sur la droite δ qui sépare la partie accessible et la région inaccessible; pourvu que, de C, on puisse voir A; et, de D, l'autre point B. Quant

aux points K et H, ils ont été obtenus en visant A et B des points A″, B″ déterminés comme on l'a expliqué.

La détermination du point I exige, comme on le voit, un certain effort portant, tout à la fois, sur les jalonnements des alignements nécessaires et sur le nombre des coups de chaîne; mais le problème, dans les conditions imposées, offre d'évidentes difficultés.

Voici d'ailleurs, dans le même ordre d'idées, un problème encore plus compliqué. *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Vire

(*Suite*, voir p. 135.)

48. — Quel que soit x on a :

$$3 \operatorname{séc}^2 3x - 2 \operatorname{séc}^2 2x - \operatorname{séc}^2 x \equiv 2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x$$
$$(\operatorname{coséc} 2x + 2 \operatorname{coséc} 4x + 3 \operatorname{coséc} 6x)$$

49. — A, B, C étant les angles d'un triangle, les deux égalités

$$4 \cos\frac{A-B}{2} \cos\frac{A-C}{2} \cos\frac{B-C}{2} - 1 = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}, \quad (1)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - C\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - B\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - A\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - C\right)$$
$$+ \sin\left(\frac{\pi}{4} - A\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = 0 \quad (2)$$

établissent une même relation entre les angles. Il résulte de cette relation que le périmètre, la somme des hauteurs, et la somme des distances de l'orthocentre aux trois sommets sont trois quantités en progression arithmétique.

L'égalité (1) équivaut à

$$\cos(B - C) + \cos(A - C)$$
$$+ \cos(A - B) = \sin A + \sin B + \sin C. \quad (3)$$

L'égalité (2) peut s'écrire en transformant chaque produit de sinus en une différence de cosinus:

$$\cos(B - C) - \sin(B + C) + \cos(A - C) - \sin(A + C).$$
$$+ \cos(A - B) - \sin(A + B) = 0$$

ce qui revient à (3)

Enfin, (3) donne :

$$2(\sin B \sin C + \sin A \sin C + \sin A \sin B) =$$
$$= \sin A + \sin B + \sin C + \cos A + \cos B + \cos C.$$

Multipliant les deux membres par 2R, R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, et remarquant que, H désignant l'orthocentre :

$$h = 2R \sin B \sin C$$
$$a = 2R \sin A, \qquad AH = 2R \cos A$$

il vient

$$2(h + h' + h'') = 2p + (AH + BH + CH).$$

C. Q. F. D.

50. — On considère un triangle quelconque ABC, une droite MN parallèle à BC et telle que la circonférence décrite sur MN comme diamètre soit tangente en A′ à BC; une seconde droite M′N′ extérieure au triangle, parallèle à BC et telle aussi que la circonférence décrite sur M′N′ comme diamètre soit également tangente en A″ à BC. Soient B′, C′, B″, C″ les points analogues sur les autres côtés. Démontrer :

1° Les trois droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes.

2° Les trois droites AA″, BB″, CC″ sont concourantes.

3° Les trois premières passent respectivement par les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés du triangle ABC.

4° Les trois secondes passent respectivement par les centres des carrés construits intérieurement sur les côtés du triangle ABC.

5° BC est la moyenne harmonique des longueurs MN, M′N′.

Soit x la distance de MN à BC, on a :

$$BA' = x(1 + \cot g B)$$
$$CA' = x(1 + \cot g C)$$

d'où

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{1 + \cot g B}{1 + \cot g C}$$

de même

$$\frac{CB'}{AB'} = \frac{1 + \cot g C}{1 + \cot g A}, \qquad \frac{AC'}{BC'} = \frac{1 + \cot g A}{1 + \cot g B}$$

d'où

$$\frac{BA'.CB'.AC'}{CA'.AB'.BC'} = 1.$$

2° Même démonstration; seulement les droites M′N′ peuvent se trouver dans l'angle opposé par le sommet à A.

3° Si on cherche le point où la droite AE, qui passe par le centre du carré construit extérieurement sur BC, coupe BC, on trouve que ce point partage BC dans le même rapport que A′. Donc ces points se confondent.

4° Même démonstration.

6° Les triangles semblables donnent

$$MN = \frac{2ah}{a + 2h} \qquad M'N' = \frac{2ah}{2h - a}$$

d'où

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{MN} + \frac{1}{M'N'}.$$

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

1° A propos de l'article que nous avons consacré à un opuscule de M. Thiry (*), M. l'abbé Reboul appelle notre attention sur un traité de géométrie qu'il a récemment publié (**). Cet ouvrage, auquel nous nous sommes reporté, sur l'indication qui nous était donnée, est composé avec beaucoup d'ordre et de méthode; nous le signalons bien volontiers à l'attention de nos lecteurs. Sous une forme très claire, et pourtant très condensée, il renferme tous les matériaux nécessaires à la préparation aux baccalauréats, et même à celle des examens d'entrée à l'école de Saint-Cyr. Nous y avons remarqué la démonstration du théorème qui donne la longueur de la bissectrice, démonstration basée sur le théorème de Stewart que l'auteur ne connaissait probablement pas (car il n'en cite pas le nom) et qu'il a sans doute inventé, pour le plus grand bien de certaines démonstrations.

La théorie des sections coniques est aussi, dans l'ouvrage en question, fort bien exposée. La propriété fondamentale de la tangente aux coniques y est établie en prenant pour base, comme l'ont fait quelques auteurs (***), cette proposition, facile à démontrer: *une droite* Δ *ne rencontre une ellipse* (ou une hyperbole) *qu'en deux points* M, M'; *de plus, si l'on joint*

(*) *Journal*, 1887, p. 45.

(**) *Éléments de Géométrie*, par l'abbé Reydellet; 7e édition, entièrement refondue et mise en harmonie avec les programmes officiels, etc., par l'abbé Reboul, licencié ès sciences. mathématiques etc. (Delagrave. 1885; prix 4 fr. 50 c.

(*** Combette, *Géométrie*, p. 546. Vacquant, *Géométrie*, p. 594.

l'un des foyers F', *au point* F_1, *symétrique de* F *par rapport à* Δ, $F'F_1$ *rencontre* Δ *sur le segment* MM'.

Cette démonstration (*) convenablement modifiée, s'applique aussi à la parabole. Elle nous paraît très appropriée à l'enseignement élémentaire, parce qu'elle évite, autant qu'il est possible, toute considération de géométrie infinitésimale.

2° M. Chapron nous signale les fautes typographiques suivantes (*Journal*, 1886, p. 160) :

Dans la décomposition de

$10^{17} - 1$ *lire :* 5363222357,

$10^{33} - 1$ *ajouter le facteur* 37,

$10^{20} + 1$ *lire :* 73.137.

BIBLIOGRAPHIE

Tables de logarithmes à cinq décimales des nombres et des lignes trigonométriques, par J. Bourget, ancien élève de l'École Normale supérieure, recteur de l'Académie de Clermont. (Librairie E. Belin, 52, rue de Vaugirard; prix 2 fr 50.)

L'innovation heureuse, importante, l'idée nouvelle qui a porté M. Bourget à entreprendre ce long et utile travail, c'est la réunion, dans un même volume, d'une table de logarithmes et d'une table d'anti-logarithmes. On a senti depuis longtemps le besoin d'une table servant à remonter aux nombres aussi facilement que l'on trouve le logarithme d'un nombre : des tables d'anti-logarithmes ont été publiées en Angleterre, en Allemagne, il y a plusieurs années.

Il était intéressant de réunir dans un même volume ces deux tables, par la disposition bien simple que voici :

Une colonne, nommée colonne des *Arguments*, renferme tous les nombres successifs de 1 à 10,000. A droite, dans la colonne *Log.*, se trouvent les logarithmes des arguments considérés comme des nombres; à gauche, dans la colonne *Antilog.*, se trouvent les nombres correspondants aux arguments regardés comme l'ensemble des quatre premières décimales d'un logarithme.

Grâce à cette disposition, les élèves, les calculateurs, trouvent donc sans peine le nombre, correspondant à un logarithme donné, par un calcul entièrement semblable à celui qui leur donne le logarithme d'un

---

(*) Elle est probablement très ancienne.

nombre; de plus, la correction de l'antilogarithme se fait par une petite multiplication à vue, comme celle du logarithme.

Nous signalerons aussi quelques perfectionnements typographiques, que les calculateurs apprécieront.

1° M. Bourget indique par un signe (—) les nombres approchés par excès. Ce signe très apparent est préférable à ceux qui ont été choisis jusqu'ici.

L'indication du sens de l'erreur d'un nombre approché n'est pas toujours nécessaire; mais dans certains calculs, elle est indispensable. D'un autre côté, cette indication permet d'opérer avec une table à cinq décimales, à peu près aussi exactement qu'avec une table à six décimales. En effet, chaque nombre dépourvu de signe est en erreur, par défaut, d'une quantité moindre que la demi-unité du dernier ordre; ajoutons-lui le quart d'unité du dernier ordre, ou 0.25, il sera en erreur par défaut ou par excès d'une quantité moindre que le quart d'unité du dernier ordre. On peut faire une observation analogue pour les nombres suivis du signe —.

En opérant avec les nombres approchés ainsi altérés, on aura, à peu près, les mêmes résultats que ceux qu'on eut obtenus avec les tables à six décimales, n'indiquant pas le sens de l'erreur.

Terquem, dans les *Nouvelles Annales*, avait, plusieurs fois, fait remarquer toute l'importance de cette indication.

2° M. Bourget divise les nombres en *triolets*. Cette division est de beaucoup préférable à celle qui a été adoptée généralement (par groupes de cinq). Il est impossible à l'œil de confondre une ligne avec une autre.

Cette division permet en outre d'introduire des blancs nombreux, sans aucun inconvénient, parce que les parties supprimées, sont toujours dans le champ de l'œil. Tous les calculateurs savent les inconvénients des suppressions, qui obligent à regarder, loin du point où l'on se trouve, les chiffres qu'il faut restituer.

3° Le choix des caractères, chose particulièrement importante dans un ouvrage de ce genre, a été l'objet d'une attention minutieuse. Le papier est légèrement teinté de jaune, et, de la sorte, les chiffres se lisent sans fatigue. Les tables trigonométriques sont séparées des tables de logarithmes des nombres, par quelques pages destinées à en expliquer l'usage,

Tel est ce livre qui se recommande, à tant de titres, à l'attention des professeurs. L'usage des tables à sept décimales nous paraît d'ailleurs appelé à disparaître bientôt. L'approximation qu'elles donnent dépasse toujours les besoins des services; pourquoi donc s'obstiner à maintenir ces tables dans les épreuves des examens, pour l'entrée aux Écoles? Dans tous les cas, l'enseignement spécial, qui échappe aux programmes auxquels nous venons de faire allusion, peut adopter avec confiance les tables de M. Bourget; car cet ouvrage s'adresse tout particulièrement aux classes de cet enseignement.

G. L.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

FACULTÉ DE LILLE

SESSION DE NOVEMBRE 1886 (*)

1re série. — Maximum du produit d'un nombre quelconque de facteurs positifs variables dont la somme est constante, dans l'hypothèse où ces facteurs ne sont soumis à aucune condition. Maximum du produit $x^m y^n$, quand les deux facteurs x, y sont positifs et ont une somme constante a.

— Un rectangle ABCD se meut d'un mouvement de translation uniforme avec la vitesse v, les côtés AB, CD glissant respectivement sur les droites indéfinies et parallèles xx', yy'. Au moment où le rectangle est dans la position ABCD, un point O, situé sur la droite CB prolongée, est lancé avec une vitesse V suivant la direction OB. On demande : 1° de déterminer à quelles époques et en quels points F, G, le mobile rencontrera les côtés AB, CD ; 2° d'évaluer la distance FG et l'angle de cette droite avec la droite BC. — On donne les distances $OB = b$, $BC = a$.

Application : $v = 30^m$; $V = 240^m$; $a = 3^m,5$; $b = 50^m$.

2e série. — Connaissant la durée A = 365 j. 256 de l'année sidérale, et la durée S = 29 j. 530 de la révolution synodique de la lune, calculer la révolution sidérale de celle-ci.

— Par un point C qui divise une droite AB en deux segments $AC = m$, $BC = n$, on mène une droite $CD = p$ faisant avec AB l'angle $DCB = y$; puis on tire AD, BD. 1° Déterminer $\alpha = ADC$ et $\beta = BDC$; 2° trouver la valeur que doit avoir y, pour que l'angle en D soit droit.

3e série. — Mener, par un point A d'un cercle, une sécante telle que la différence entre la corde interceptée et la projection de cette corde sur le diamètre qui passe au point A ait une valeur déterminée l. Discuter.

4e série. — Soit RO une ligne verticale sur laquelle on a pris un point M, distant du point K d'une longueur l. Soit P un point pris dans le plan horizontal passant par le point O. Du point P, à l'aide d'un graphomètre convenablement disposé, on mesure les angles $OPM = \alpha$, $OPK = \beta$. Connaissant l, α, β, calculer KO et OP.

Application : $l = 150^m$; $\alpha = 20°$; $\beta = 55°$.

— Bascule du commerce ou de Quintenz.

5e série. — Quand on sait que la projection horizontale d'une droite est perpendiculaire sur la trace horizontale d'un plan, que peut-on conclure sur la situation respective de la droite et du plan?

— Considérant une tige homogène pesante BAC, recourbée à angle

(*) Énoncés communiqués par M. Richard, professeur à Condé-sur-Escaut.

droit en A et dont les deux parties AB, AC ont pour longueurs c et b; respectivement, on propose de déterminer la position de son centre de gravité et celle du point O qu'il faudrait fixer sur le côté le plus large AC pour que, lors de la position d'équilibre que la tige prendrait dans un plan vertical, B et C soient dans un même plan horizontal.

6e série. — Déterminer le coefficient inconnu λ de telle sorte que la fraction $\dfrac{3-2x}{x^2+\lambda x+7}$ ait pour valeur maxima $\dfrac{1}{2}$. Étudier les variations de la fraction ainsi déterminée, x variant de $-\infty$ à $+\infty$.

7e série. — Calculer le $\dfrac{1}{2}$ angle à la base d'un cône droit, sachant que le rapport de sa surface latérale à la surface de la sphère inscrite est égal à un nombre donné $\dfrac{K}{4}$. Discuter.

8e série. — Trouver deux nombres connaissant leur différence d et la différence de leurs cubes K^3.

— Expliquer comment on peut trouver le centre de gravité de la surface d'un quadrilatère homogène pesant. Donner une construction géométrique du résultat.

SOLUTION DE LA QUESTION 150 (*)

Un angle constant tourne autour d'un point fixe A, *pris sur un cercle, et les côtés rencontrent le cercle en* B *et* C. *Soient* M, N, P *les pieds des hauteurs du triangle* ABC *démontrer que deux des côtés du triangle* MNP *sont tangents à des cercles fixes, et que le troisième se déplace parallèlement à lui-même.* (Weill.)

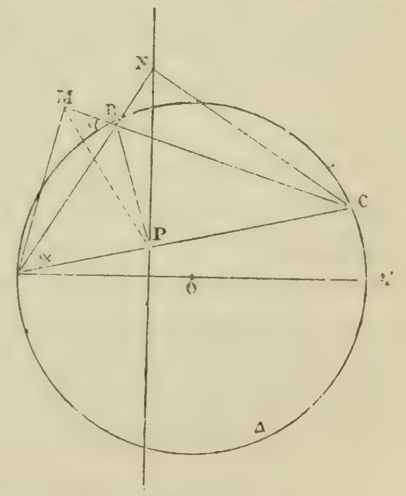


Fig. 1.

1° On voit d'abord que NP est une droite perpendiculaire au diamètre AOA'. En effet, le quadrilatère inscriptible PBNC donne

$$AP.AC = AB.AM.$$

On peut donc considérer la droite NP comme la transformée du cercle par rayons vecteurs réciproques. On sait que cette transformée est une droite, perpendiculaire à AA'.

2° Pour trouver l'enveloppe de la droite MP, considérons deux positions infiniment voisines de l'angle BAC ; la droite BC enveloppe un cercle Δ', concentrique à Δ. Soient R'M, R'M' deux tangentes, infiniment voisines, à Δ' ; projetons le point fixe A sur ces tangentes en N et en M'. Le quadrilatère ABPM *(fig. 1)* étant inscriptible MP fait avec MBC un angle égal à l'angle donné α. Par suite, la droite MP et la droite correspondante, infiniment voisine, M'P' seront représentées *(fig. 2)* par les

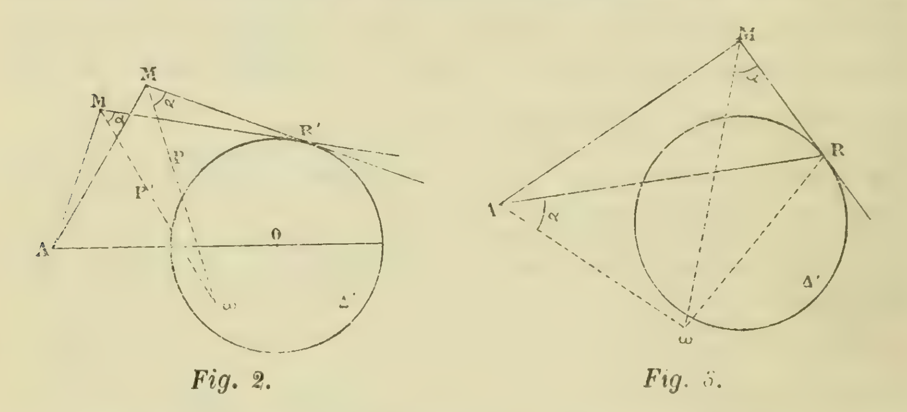


Fig. 2. *Fig. 3.*

droites MPω', M'P'ω' inclinées de l'angle α, respectivement sur MR' et sur M'R'. On conclut de là que le point ω' appartient au cercle décrit sur AR' comme diamètre.

Cela posé, passons à la limite et supposons que les deux points M, M' viennent se confondre ; le point ω' a pour position limite *(fig. 3)* un point ω situé à l'intersection du cercle décrit sur OR comme diamètre avec une droite, partant de M et faisant avec MR l'angle donné α.

Le triangle OωR, qui est rectangle, reste donc semblable à lui-même ; dans ces conditions, on sait que si R décrit une certaine courbe U, le sommet ω décrit une autre courbe semblable à celle-ci. Concluons donc que le lieu de ω, c'est-à-dire l'enveloppe de la droite MP est un cercle.

Le même raisonnement s'applique à la droite MN qui, elle aussi, enveloppe un cercle, distinct de celui qui correspond à la droite MP.

Nota. — Nous avons reçu, la rédaction précédente étant déjà imprimee, une solution de cette question par M. Chapron. Cette solution est plus courte que celle qu'on vient de lire ; mais elle est synthétique.

M. Chapron observe, et la remarque a son intérêt, qu'en prenant à

partir de A, de part et d'autre, des arcs AR = AS (*) tellement choisis que RS soit le supplément de l'arc BC. l'un des cercles cherchés est tangent : à la corde RS, à la tangente en A, et à la tangente en S; l'autre, à la corde RS, à la tangente en A et à la tangente en T.

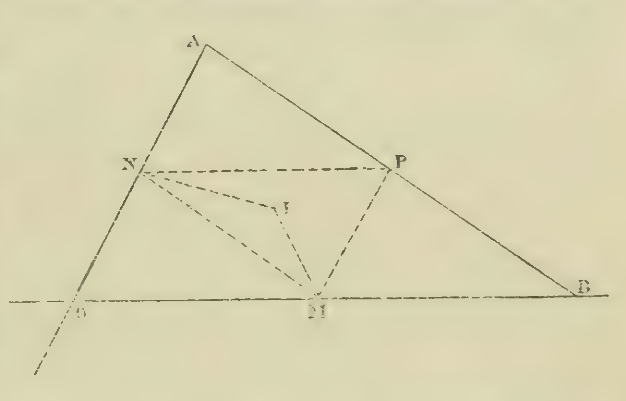
G. L.

QUESTION 151

Solution par M. J. CHAPRON.

Les extrémités A *et* B *d'une droite* AB *de longueur constante, glissent sur deux droites fixes* OA, OB. *Trouver le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* AOB. (Weill.)

Soient M, N, P les milieux des côtés du triangle AOB ; on veut trouver le lieu décrit par le point I centre du cercle circonscrit au triangle MNP. L'angle NIM est le double de NPM, ou le double de AOB, si l'on préfère. L'angle NIM étant constant, le triangle NIM étant isocèle et $MN = \frac{AB}{2}$



étant constant, le lieu du point I peut être consdéré comme celui qui est décrit par le sommet d'un triangle de grandeur invariable dont les deux autres sommets se meuvent sur des droites fixes. On sait (mais le théorème n'est peut-être pas très connu en mathématiques élémentaires) que le lieu décrit par un point mobile dans les conditions que nous venons de préciser, est une ellipse (V. Briot et Bouquet; *Géom. an.*; p. 156)

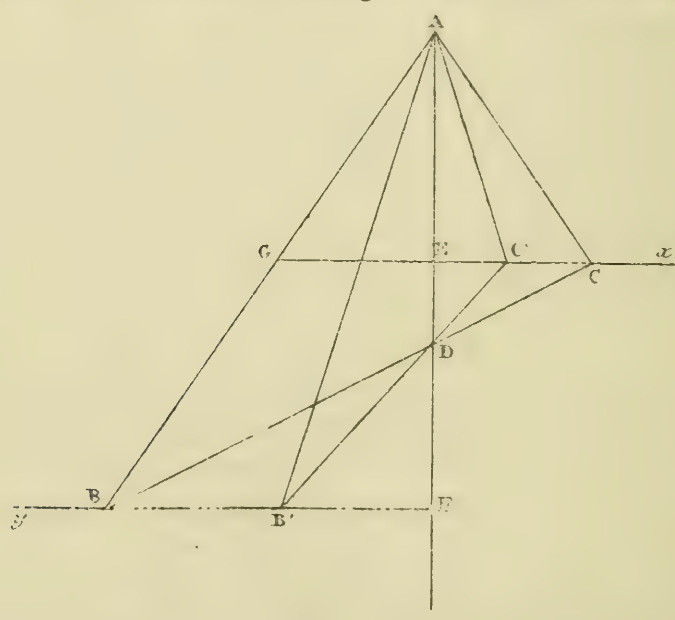
(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

QUESTION 162.

Solution par M. A. Fitz-Patrick, élève de mathématiques élémentaires au Lycée de Poitiers.

Une droite AD *représente, en grandeur et en situation, la bissectrice d'un triangle* ABC; *on suppose en outre que le rapport de* AB *à* AC *conserve une valeur constante, et l'on demande le lieu décrit par le point* B *et par le point* C. *On trouvera que ce lieu est constitué par deux droites perpendiculaires à* AB, *et la partagent harmoniquement. Déduire de cette remarque des applications diverses, Exemple : Construire un triangle connaissant : 1° la bissectrice; 2° le rapport des deux côtés qui la comprennent; 3° une troisième condition qui peut être tantôt une hauteur, tantôt une médiane, etc.* (G. L.)

Soit B′AC′ un second triangle dont les côtés AB′, AC′



sont dans le rapport de AB à AC et et ayant AD pour bissectrice de l'angle A. Menons les droites BB′, CC′ qui coupent AD en F et E. Par hypothèse

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} \quad \text{et} \quad \widehat{BAB'} = \widehat{CAC'}.$$

les deux triangles BAB', CAC' sont donc semblabes, et il en résulte que l'on a

$$\widehat{ACC'} = \widehat{ABB'}.$$

Les deux triangles DBB' DCC' sont également semblables puisque

$$\widehat{BDB'} = \widehat{CDC'} \quad \text{et} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{DB'}{DC'},$$

par suite

$$C'CD = DBB',$$

et les deux droites CC', BB' sont parallèles. Si donc, l'on prolonge CC' jusqu'à sa rencontre en G avec AB, on aura

$$\widehat{B'BA} = \widehat{CGA} = \widehat{GCA},$$

c'est-à-dire que le triangle AGC est isocèle.

La bissectrice AD de l'angle A est donc perpendiculaire sur GC et BF. D'ailleurs

$$\frac{DF}{DE} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AE},$$

ce qui montre bien que les deux points E, F sont conjugués harmoniques sur AD.

La réciproque est vraie et se démontre facilement.

APPLICATIONS

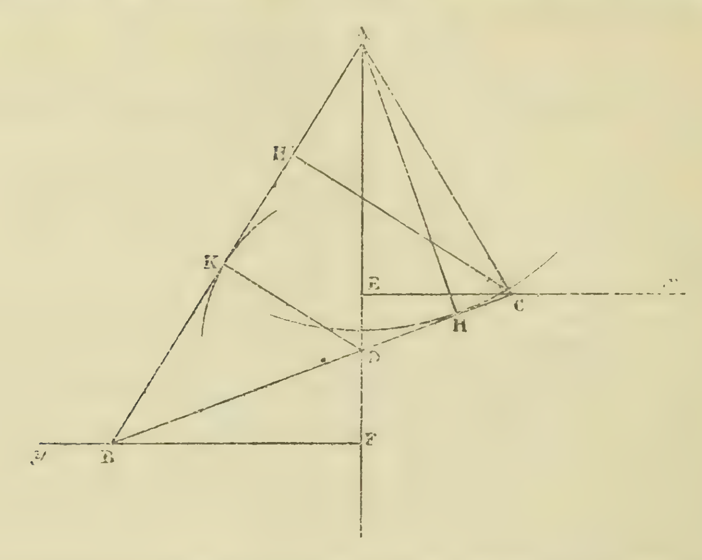
I. — *Construire un triangle, connaissant la bissectrice* AD, *le rapport des deux côtés* AB, AC *qui la comprennent, et une hauteur.*

Nous distinguerons deux cas, suivant que la hauteur est issue, comme la bissectrice, du sommet A; ou d'un des sommets B ou C.

Si la hauteur AH est issue du sommet A, il suffira de décrire une circonférence du point A comme centre et avec cette hauteur pour rayon. En menant alors par le point D la tangente DH à cette circonférence, on détermine les deux sommets B et C sur les deux perpendiculaires Fy, Ex tracées préalablement.

La seconde tangente DH' à la circonférence décrite du point H comme centre avec AH pour rayon, détermine le triangle AC_1B_1 symétrique de ACB par rapport à AD.

Supposons, en second lieu, que la hauteur donnée soit



issue d'un des sommets B ou C, du sommet C par exemple. Menons DK perpendiculaire sur AB.

On a
$$\frac{DK}{CH'} = \frac{BD}{BC},$$
ou
$$\frac{DK}{CH' - DK} = \frac{BD}{DC};$$
d'où
$$DK = \frac{CH'}{\frac{BD}{DC} + 1}.$$

La perpendiculaire DK étant connue, on pourra décrire une circonférence du point D comme centre avec DK pour rayon et les tangentes à cette courbe menées par A déterminent les deux triangles ABC, AB_1C_1 symétriques par rapport à AD.

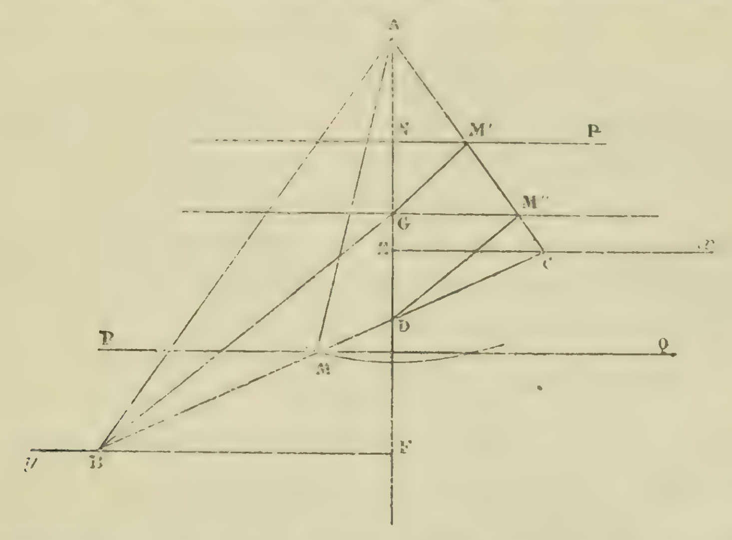
II. — *Construire un triangle connaissant la bissectrice* AD, *le rapport des deux côtés* AB, AC *qui la comprennent et une médiane.*

Comme précédemment nous distinguerons deux cas, suivant que la médiane est issue du sommet A, ou d'un des deux autres sommets.

Si la médiane est issue du sommet A, un premier lieu géométrique du point M sera la perpendiculaire PQ élevée sur le milieu de EF, et un second lieu, la circonférence décrite du point A comme centre avec AM pour rayon. Le point M

une fois obtenu par la rencontre de ces deux lieux, la construction du triangle s'achève facilement.

Examinons maintenant le cas où la médiane BM′ est issue



du sommet B. D'abord, le point M′ est sur la perpendiculaire NP élevée sur le milieu de AE.

Mais si l'on mène DM″ parallèle à BM′, on a

$$\frac{DM''}{BM'} = \frac{DC}{BD},$$

ou

$$\frac{DM''}{BM' - DM''} = \frac{DC}{BD};$$

d'où

$$DM'' = \frac{BM'}{\frac{BD}{DC} + 1}$$

la longueur DM″ peut donc se construire et le point M″ se trouve sur la circonférence décrite du point D comme centre avec DM″ pour rayon.

D'ailleurs

$$\frac{M'M''}{M''C} = \frac{BD}{DC},$$

le point M′ est donc encore sur la perpendiculaire élevée à AD au point G qui partage le segment NE dans le rapport de AB à AC,

Nota. — Autres solutions par MM. J. Chapron ; P. Lamaire, au lycée Charlemagne.

QUESTIONS PROPOSÉES

253. — Dans une circonférence on mène une corde DB, et l'on prend deux points A et C, sur cette circonférence; on divise AC en E en deux parties telles que AE : EC :: $m:n$ et par E on mène les droites EF, EG parallèles respectivement aux droites BA, BC. Si F et G sont les points de rencontre des parallèles sus-mentionnées avec les droites AD, DC; démontrer que l'on a :

$$m.\ EG \times BC \pm n\ EF \times BA = \frac{mn}{m+n}\overline{AC}^2,$$

en adoptant le signe + ou le signe — suivant que les points A et C sont pris de part et d'autre ou du même côté de BD.

Nota. — *Cette question n'est autre chose que la question* 226, *généralisée.*

(G. Russo.)

254. — Soit ABCD quatre points situés sur un cercle; de D, on abaisse une perpendiculaire Δ sur AC; de A, on abaisse une perpendiculaire Δ' sur BD.

Δ rencontre AB en B'; Δ' rencontre CD en C'. On propose de démontrer que B'C' est parallèle à BC. *(Mannheim.)*

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE 20. PARIS. — 13928-7.

SUR LA CUBIQUE
AUX PIEDS DES NORMALES ISSUES D'UN POINT A UNE QUADRIQUE

Par **A. Aubry**, élève au Lycée Louis-le-Grand (classe de M. Niewenglowski).

1. — On sait que, dans le plan, l'hyperbole d'Apollonius est le lieu des points M tels que, si on les joint au point P, la droite MP est normale à la polaire du point M, relativement à la conique considérée Γ; de plus, la polaire réciproque de l'hyperbole par rapport à E est une parabole, qui est la même pour toutes les coniques homofocales à Γ.

Le but de cette note est de montrer que l'on peut étendre quelques-unes des propriétés de cette hyperbole à la cubique gauche que l'on rencontre, dans la géométrie à trois dimensions, quand on veut mener, d'un point donné, des normales à une surface du second degré (*).

2. — Considérons une quadrique E, à centre unique O, et un point P; cherchons le lieu C des points M dont les plans polaires sont perpendiculaires aux droites qui les joignent au point P. Le point P appartient à ce lieu, car, lorsque M vient se confondre avec P, MP prend une direction indéterminée, que l'on peut par suite regarder comme perpendiculaire au plan polaire du plan P; le plan polaire du point O étant le plan de l'infini, et ce plan ayant une direction indéterminée, on peut le considérer comme perpendiculaire à PO. Les points P et O font donc partie de C. Coupons dès lors la surface par un plan π qui contient la droite PO; la section φ est une conique qui a son centre en O. Soit M un point de C situé dans le plan π; le point M se trouve sur l'hyperbole d'Apollonius, relative au point P et à la conique φ, ou, ce qui revient au même, la polaire μ (trace du plan polaire du point M par rapport à E) du point M, relativement à φ, est tangente à une

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

certaine parabole ψ; le plan polaire du point M, qui est dans le plan diamétral π, est parallèle au diamètre $O\delta$, conjugué à ce plan; il est aussi parallèle à la perpendiculaire $O\varepsilon$ à π : la droite μ est donc parallèle à l'intersection des plans π et $\delta O\varepsilon$, Or, il n'existe qu'une tangente à la parabole ψ parallèle à une direction donnée; il y a donc, dans le plan π, un seul point du lieu, différent de P et O. C'est donc une cubique gauche, qui passe évidemment par les pieds des normales à la surface issues du point P. Soient OA, OB et OC les axes de E; le plan polaire du point x, situé à l'infini sur OA, est le plan BOC, qui est perpendiculaire à Px; le point x appartient donc à C, et, de même, les points à l'infini sur OB et OC. Ceci montre que Ox, Oy, Oz sont les directions asymptotiques de C. Supposons que le point M se rapproche indéfiniment du point P; la droite PM tend à devenir perpendiculaire au plan polaire du point P; la tangente à C, au point P, est donc perpendiculaire au plan polaire du point P. Si, au contraire, M se rapproche de O, PM tend vers PO; le plan polaire du point M tend à devenir perpendiculaire à OP et disparaît à l'infini; la tangente en O est donc le diamètre conjugué aux plans perpendiculaires à OP, attendu que OM est le diamètre conjugué des plans parallèles au plan polaire du point M. Remarquons enfin que la cubique C demeure la même, quand on considère les surfaces homothétiques et concentriques à E, puisque les plans polaires d'un même point par rapport à toutes ces surfaces sont parallèles.

En résumé, *le lieu des points* M *dont les plans polaires sont perpendiculaires aux droites qui les joignent au point* P *est une cubique gauche* C *qui passe par les points* P *et* O, *par les pieds des normales issues du point* P *à la quadrique* E, *et par les points à l'infini sur les axes de cette quadrique.*

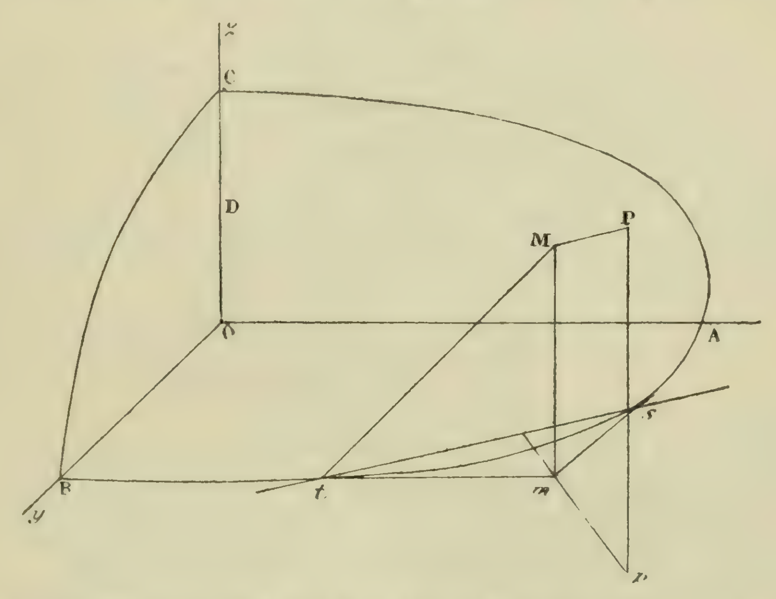
Cette cubique C *est aussi le lieu des pieds des normales issues du point* P *aux surfaces homothétiques et concentriques à* E. Car, soit E′ l'une de ces surfaces, M un point commun à E′ et à C; PM est normale au plan polaire du point M par rapport à E′, c'est-à-dire normale à E′.

3. — Avant de chercher les projections de la courbe C

sur les plans principaux de E, établissons la proposition suivante :

Soient M *un point quelconque,* m *sa projection sur un plan diamétral* Q *d'une quadrique donnée, projection faite parallèlement au diamètre* D *conjugué au plan* Q; *la polaire du point* m *par rapport à la section* φ *faite dans la quadrique par le plan* Q *est la trace sur ce plan du plan polaire du point* M.

Effectivement, désignons par s et t les points où le plan polaire du point M rencontre φ; Mt est une tangente à la surface et le plan tangent en t, qui passe par Mt, est parallèle au diamètre D; la droite Mt se projette donc parallèlement



à D, suivant la tangente mt à φ. De même, la tangente à φ en s passe par le point m, qui est, en conséquence, le pôle de ts par rapport à φ.

Cela étant, supposons que le plan Q soit un plan principal de la surface E et soit p la projection d'un point P sur ce plan. Si PM est perpendiculaire au plan polaire du point M, sa projection pm est perpendiculaire à la trace ts de ce plan sur le plan Q, c'est-à-dire perpendiculaire à la polaire du point m par rapport à φ. Ainsi, quand le point M décrit la cubique C, sa projection m décrit l'hyperbole d'Apollonius c, qui correspond au point p et à la conique φ.

Théorème. — *La cubique* C *se projette, sur un plan principal de la surface* E *selon l'hyperbole d'Apollonius relative à la section de* E *par ce plan et à la projection du point* P *sur ce même plan.*

(A suivre.)

NOTE SUR L'HYPOCYCLOIDE
A QUATRE REBROUSSEMENTS

(Suite et fin).

Par M. **J. Rat**, élève à l'École Polytechnique.

---

3. — Une tangente à l'hypocycloïde à quatre rebroussements la rencontre, indépendamment du point de contact, en quatre autres points. Cherchons les valeurs de t correspondant à ces points.

Soit t_0 la valeur de t relative au point de contact de la tangente. L'équation de cette tangente est :

$$Y + t_0 X - \frac{Rt_0}{\sqrt{1 + t_0^2}} = 0.$$

Soient $x = \frac{R}{(1 + t'^2)^{\frac{3}{2}}}$, $y = \frac{Rt'^3}{(1 + t'^2)^{\frac{3}{2}}}$,

les coordonnées d'un des points où la tangente rencontre l'hypocycloïde. Exprimons que la tangente considérée passe par ce point. Nous aurons ainsi, en faisant disparaître les radicaux, l'équation :

$$(1 + t_0^2)\left[\frac{R^2t'^6}{(1 + t'^2)^3} + \frac{R^2t_0^2}{(1 + t'^2)^3} + \frac{2R^2t'^3t_0}{(1 + t'^2)^3}\right] - R^2t_0^2 = 0$$

ou $$t'^6 - 3t_0^2t'^4 + 2t_0(1 + t_0^2)t'^3 - 3t_0^2t'^2 + t_0^4 = 0,$$

ou encore

$$(t' - t_0)^2[t'^4 + 2t_0t'^3 + 2t_0t' + t_0^2] = 0.$$

Si l'on supprime la solution double $t' = t_0$, qui correspond au point de contact de la tangente, on a l'équation cherchée :

$$t'^4 + 2t_0t'^3 + 2t_0t' + t_0^2 = 0. \qquad (2)$$

Cette équation a deux racines réelles, et deux seulement, pour toute valeur non nulle de t_0. Nous laissons au lecteur

le soin de démontrer cette propriété. Il en résulte qu'une tangente à la courbe ne la rencontre, indépendamment du point de contact, qu'en deux points réels.

Mais la propriété la plus remarquable de cette équation (2), c'est qu'on peut l'identifier avec l'équation (1) qui donne les valeurs de t correspondant aux tangentes menées à la courbe, par un point (x, y) du plan.

Supposons que le point (x, y) soit sur le cercle, qui passe par les points de rebroussement de la courbe. On a alors :

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

L'équation (1) peut alors s'écrire :

$$t^4 + 2t^3\frac{y}{x} + 2t\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 0,$$

ou, en posant

$$\frac{y}{x} = t_0,$$

$$t^4 + 2t_0t^3 + 2t_0t + t_0{}^2 = 0.$$

Cette relation exprime que les points de contact des tangentes issues du point (x, y) sont sur l'une des deux tangentes à la courbe, dont le coefficient angulaire est $-t_0 = -\frac{y}{x}$.

On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Les tangentes aux points où une tangente à l'hypocycloïde à quatre rebroussements la rencontre, indépendamment du point de contact* M, *concourent en* N *sur le cercle* C *qui passe par les points de rebroussement de la courbe. La tangente en* M *à l'hypocycloïde et la normale en* N *au cercle* C *sont également inclinées sur les tangentes de rebroussement.*

Par tout point du cercle

$$X^2 + Y^2 - R^2 = 0,$$

on voit facilement qu'on ne peut mener à la courbe que deux tangentes réelles. On peut donc aussi énoncer le théorème précédent de la façon suivante :

Par tout point du cercle qui passe par les points de rebroussement de l'hypocycloïde, on peut mener à cette courbe deux tangentes réelles. L'enveloppe de la droite qui joint les points de contact de ces deux tangentes est l'hypocycloïde elle-même.

D'ailleurs, il est facile de démontrer que la projection de l'hypocycloïde sur un plan passant par l'une des tangentes de rebroussement est la développée d'une ellipse. On peut donc étendre à la développée de l'ellipse le théorème du § 3, et l'on peut dire :

Les tangentes aux points où une tangente à la developpée d'une ellipse rencontre cette développée, indépendamment du point de contact M, *concourent en* N *sur l'ellipse* E *qui a pour sommets les points de rebroussement de la développée.*

4. Théorème. — *Si, autour du centre de la courbe, on fait pivoter un angle droit* AOB, *dont les côtés rencontrent la courbe en* A *et en* B, *les tangentes en ces points sont rectangulaires.*

En effet, soient les coordonnées du point A :

$$x_1 = \frac{R}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad y_1 = \frac{Rt^3}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Celles du point B où la tangente est perpendiculaire à AO sont :

$$x_2 = \frac{Rt^3}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad y_2 = \frac{-R}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

et l'on a :

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

5. — L'équation d'une normale à la courbe au point caractérisé par le paramètre t est :

$$Y - \frac{1}{t}X + k = 0.$$

Si l'on exprime qu'elle passe au point :

$$x = \frac{R}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad y = \frac{Rt^3}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

nous aurons :

$$\frac{Rt^3}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{t}\cdot\frac{R}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}} + k = 0,$$

d'où

$$k = -\frac{R(t^2 - 1)}{t\sqrt{1 + t^2}}.$$

L'équation de la normale au point (x, y) est donc :

$$Y - \frac{1}{t}X - \frac{R(t^2 - 1)}{t\sqrt{1 + t^2}} = 0,$$

ou, en posant

$$\frac{1}{t} = \theta,$$

$$Y - \theta X + \frac{R(\theta^2 - 1)}{\sqrt{1 + \theta^2}} = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires des normales menées d'un point (x, y) à la courbe est donc :

$$(y - \theta x)^2(1 + \theta^2) - R^2(\theta^2 - 1)^2 = 0,$$

ou $(x^2 - R^2)\theta^4 - 2\theta^3 xy + \theta^2(x^2 + y^2 + 2R^2) - 2\theta xy + y^2 - R^2 = 0.$

La forme de cette équation met en évidence le théorème suivant :

Théorème. — *Les quatre normales que l'on peut mener d'un point à l'hypocycloïde font avec l'une quelconque des tangentes de rebroussement des angles dont la somme est un multiple de* π.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 148).

---

24. Point associé à l'infini (M, M_∞). — A un point M (α, β, γ) associons un second point dont les coordonnées soient :

$$\beta - \gamma \qquad \gamma - \alpha \qquad \alpha - \beta.$$

Ce point, qui est situé à l'infini puisque la somme de ses coordonnées est nulle, est appelée *point de l'infini associé à* M, ou, plus brièvement, on dit qu'il est l'*associé à l'infini :* nous noterons un tel point par la lettre M_∞ (*).

(*) Consulter à ce sujet : G. de Longchamps. *J. E.*, 1886, pp. 132, 154-158, 232.

Le point M_∞ est le point harmoniquement associé à la *transversale réciproque* (*) de la droite qui joint le point M au centre de gravité G du triangle. *Réciproquement :* Étant donné un point M_∞ à l'infini, si l'on prend la droite μ harmoniquement associée à ce point, puis la transversale réciproque μ_0 : tout point pris sur μ admet le point M_∞ pour associé à l'infini. Le point M_∞, associé à l'infini au point M, se construira donc de la manière suivante :

On joint MG, cette droite coupe BC en D″, on prend le point D′ isotomique de D″ et le point D conjugué harmonique de D′. La droite AD et les deux droites analogues, obtenues par une construction semblable, elles sont parallèles; concourent à l'infini au point M_∞.

La construction de l'associé à l'infini peut encore se faire simplement par la considération des points isobariques :

En effet, au point M (A, B, C) (voir § 23), correspondent deux points isobariques M_i^1 (B, C, A) et M_i^2 (C, A, B). La droite $M_i^1M_i^2$ qui a pour équation :

$$\Sigma\alpha(BC - A^2) = 0$$

passe par le point M_∞, en vertu de l'identité évidente

$$\Sigma(B - C)(BC - A^2) \equiv 0.$$

25. Associations irrationnelles. — Cette transformation est celle dans laquelle on associe, à des nombres donnés, d'autres nombres liés à ceux-ci par des formules renfermant des symboles irrationnels. Considérons les éléments A′, B′, C′ associés aux quantités A, B, C au moyen des formules

$$\frac{A'}{\pm\sqrt{A}} = \frac{B'}{\pm\sqrt{B}} = \frac{C'}{\pm\sqrt{C}}$$

Cette association signalée par M. de Longchamps (**) n'est pas *uniforme* comme celles que nous avons étudiées précédemment; elle est *complexe,* si par là nous voulons exprimer qu'à un point donné correspondent plusieurs points.

(*) Cette droite est étudiée au § 31.

(**) Voir sur les *associations irrationnelles* et le *demi-potentiel*, G. de Longchamps. — *J. E.* 1886, pp. 273-276.

Étant donné un point M (A, B, C) dans l'intérieur du triangle de référence, voici comment on peut déterminer les points (A′, B′, C′). Soit μ la droite harmoniquement associée au point M; elle coupe les côtés du triangle en P, Q, R. Le point P étant sur BC, on prend le point P′ tel que

$$\overline{PP'}^2 = PB.PC.$$

Soient Q′, R′ les points analogues à P′. Les trois droites AP′, BQ′, CR′ concourent en un même point M′ dont les coordonnées sont :

$$\sqrt{A}, \quad \sqrt{B}, \quad \sqrt{C}$$

Les radicaux étant pris avec le signe +; les trois autres points qui correspondent à M sont les points algébriquement associés à M′.

26. Le demi-potentiel. — Le demi-potentiel est le point remarquable P qui, dans le triangle ABC, a pour coordonnées

$$\sqrt{a}, \quad \sqrt{b}, \quad \sqrt{c}$$

ce point se construit de la manière suivante :

Par les pieds L, M, N des bissectrices extérieures, on mène les tangentes Ll, Mm, Nn au cercle circonscrit, et l'on rabat Ll sur LBC en LL′; les droites AL′, BM′, CN′ concourent au point P.

(A suivre.)

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

DONNÉ A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1887)

Solution géométrique par M. Malloizel, professeur à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

D'un quart de tore supposé plein on enlève la portion comprise à l'intérieur d'un cône donné: représenter par ses projections le solide obtenu. L'axe du tore est vertical; le plan de front et le plan de profil de cet axe limitent le quart de tore, lequel est situé en avant du premier plan et à droite du second. Le cône a

son sommet sur l'axe du tore. Pour déterminer sa directrice, on imagine la sphère dont un grand cercle coïncide avec le cercle de front qui limite le quart de tore. Prenons, par rapport à cette sphère, le plan polaire du sommet du cône, enfin menons à égale distance de ce plan et du sommet du cône, un second plan parallèle au premier. Ce second plan coupera le quart de tore suivant la directrice qu'il s'agissait d'indiquer. Le rayon du cercle générateur du tore sera de 8^{cm}. *La distance du centre de ce cercle à l'axe sera de* 17^{cm}. *La hauteur du sommet du cône au-dessus du centre du tore sera de* 4^{cm}. *La projection horizontale du centre du tore sera à* 4^{cm} *au-dessous et la projection verticale à* 13^{cm} *au-dessus du centre du cadre, sur la parallèle au grand côté situé à* 12^{cm} *à gauche de ce point.*

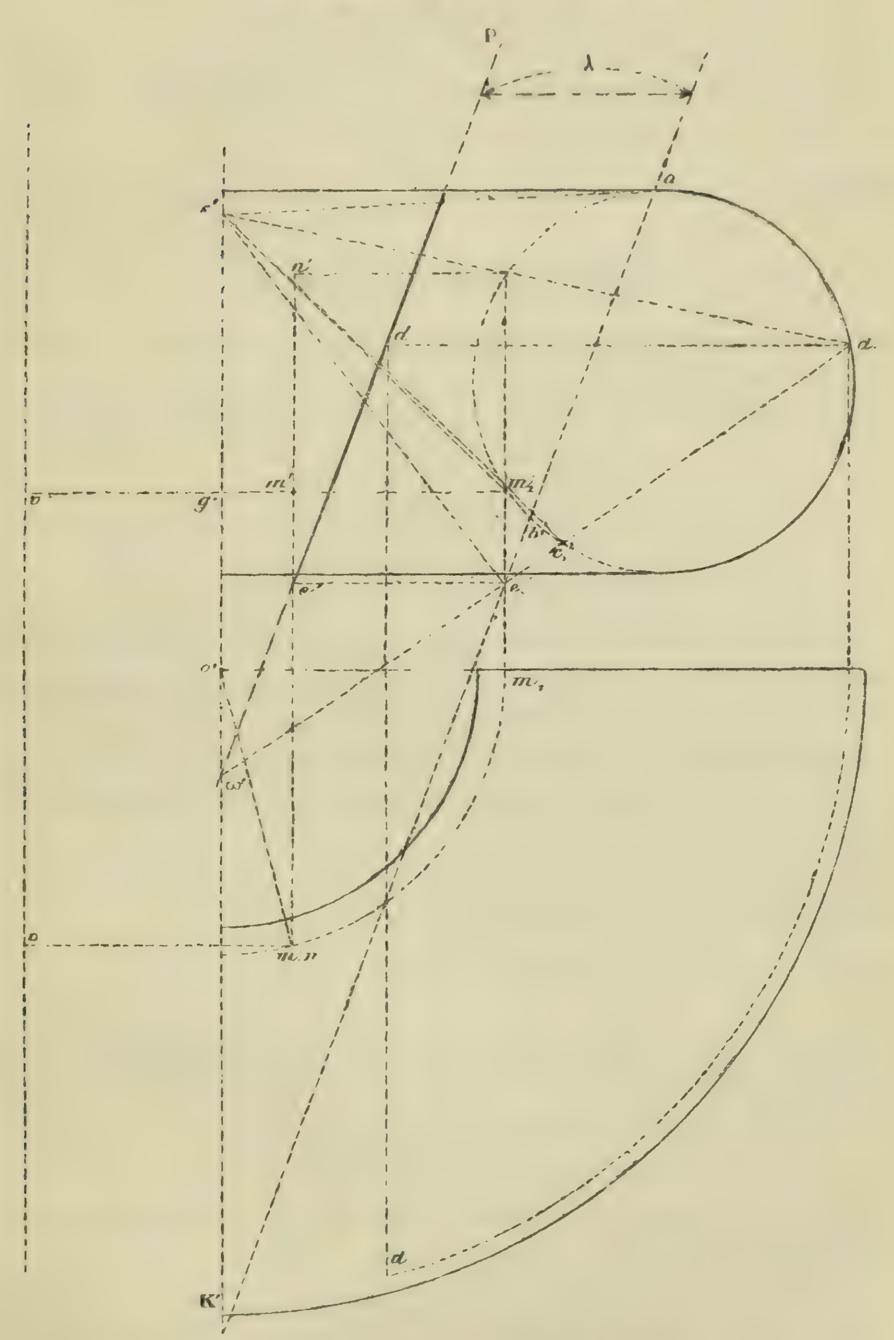
On obtient simultanément les points appartenant à la directrice du cône et la seconde courbe d'intersection du cône et du tore par la construction suivante :

Tout plan mené par l'axe coupe le plan P suivant une droite qui passe par le point fixe $\omega\omega'$, trace de l'axe sur le plan et qui ramenée dans le plan de front de cet axe devient $\omega' e'_1 d'_1$. $S'c'_1$, $S'd'_1$ sont les génératrices correspondantes du cône et par suite m'_1, n'_1 les points de la courbe cherchée après la rotation. Je dis que $m'_1 n'_1$ est parallèle à $S'\omega'$. En effet, $m'_1 n'_1$ et $e'_1 d'_1$ se coupent en e'_1 sur la polaire $a'b'$ de S' par rapport au cercle générateur du tore, donc $e'_1 c'_1 d'_1 - e'_1 b' a' - e'_1 m'_1 n'_1 - e'_1 S'$ forment un faisceau harmonique. D'autre part, et d'après les données, ω' est le milieu de $S'K'$ et par suite le rayon $e'_1 m'_1 n'_1$ du faisceau précédent est parallèle à $S'\omega'$. D'ailleurs, la longueur $e'_1 e'$ est une constante; les points $m'_1 n'_1$ se ramènent donc en $m'_1 n'_1$ sur la ligne de rappel de e' et la projection verticale est le cercle générateur du tore transporté parallèlement à xy de $e'e'_1$. De là résulte que les points de la courbe sont deux à deux sur une même verticale et que, par suite, en projection horizontale tous les points sont doubles. Cette projection est une parabole :

Menons $\nu\nu'$ parallèle à $S'\omega'$ à gauche de cette droite et à une distance égale à la longueur constante $e'e'_1$. On voit de suite

que (m, n) étant la projection horizontale commune des deux points on a :

$$mo = om_1 = g'm'_1 = m'\nu' = m\nu.$$



La parabole a donc o pour foyer et $\nu\nu'$ pour directrice.

On a en $(d_1\ d')$ les projections d'un point quelconque de la directrice du cône.

Remarque. — La démonstration est indépendante de la cote du sommet; elle ne tient compte que de cette condition que le plan P est équidistant du plan polaire et du sommet du cône.

QUESTIONS D'EXAMEN

13. — *Discuter la courbe* U *qui correspond aux équations*

$$x = at^2 + bt + c,$$
$$y = a't^2 + b't + c',$$
$$z = a''t^2 + b''t + c'';$$

dans lesquelles t *désigne un paramètre variable*

1° En cherchant le nombre de points communs à U et à un plan, on voit que l'on est conduit à une équation du second degré en t; donc U *est une conique.*

2° Pour avoir le genre de la conique, on peut chercher la nature de ses directions asymptotiques. Or, un point M de U ne peut être situé à l'infini que si t est égal à $\pm\infty$. Dans cette hypothèse, on trouve que le point est rejeté à l'infini, dans une direction unique (α, β, γ),

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{a'} = \frac{\gamma}{a''}.$$

Ainsi U *est une parabole,* et la direction des diamètres est celle de la droite Δ :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{a'} = \frac{z}{a''}.$$

On arrive aussi à ce résultat, en considérant les projections de U sur les plans de coordonnées.

3° Si l'on veut déterminer le sommet de la parabole, on observera qu'en ce point, la tangente est perpendiculaire à Δ. Or, pour les courbes unicursales, les équations de la tan-

gente au point x, y, z sont

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{dt}},$$

ou, dans le cas présent,

$$\frac{X - x}{at + b} = \frac{Y - y}{a't + b'} = \frac{Z - z}{a''t + b''}.$$

On a donc, pour déterminer le paramètre t qui correspond au sommet de U, l'égalité

$$t(a^2 + a'^2 + a''^2) + ab + a'b' + a''b'' = 0, \quad \text{etc.}$$

14. — *Combien y a-t-il de paraboloïdes passant par la courbe commune à deux quadriques? De quelle nature sont-ils?*

Soient

$$U = 0, \qquad V = 0,$$

les équations des deux quadriques données; posons

$$U \equiv \varphi(x, y, z) + \ldots \qquad V \equiv \psi(x, y, z) + \ldots;$$

φ, ψ désignant des formes homogènes du second degré.

Alors, $U + \lambda V = 0$ représente l'équation générale des quadriques Q, passant par les points communs à U et à V.

D'après cela, Q sera un paraboloïde si l'on prend pour λ une des racines de l'équation $R(\lambda) = 0$ obtenue en égalant à zéro le discriminant Δ de la forme quadratique

$$\varphi(x, y, z) + \lambda\psi(x, y, z). \qquad (1)$$

Ce discriminant Δ est une fonction du troisième degré en λ que l'on a rencontrée quand on a traité, dans la géométrie à deux dimensions, l'intersection des deux coniques $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (*).

En nous reportant à cette discussion, nous voyons que trois cas sont à distinguer; à chacun d'eux correspond, pour la forme (1), une décomposition en une somme ou une différence de deux carrés et, par suite, un paraboloïde elliptique ou hyperbolique.

Ces trois cas sont

(*) On voit ici, et dans beaucoup d'autres questions, l'avantage d'adopter, pour la forme quadratique ternaire une même notation, dans la géométrie plane et dans la géométrie à trois dimensions.

1° Trois paraboloïdes hyperboliques;

2° Deux paraboloïdes elliptiques imaginaires et un paraboloïde hyperbolique;

3° Deux paraboloïdes elliptiques réels et un paraboloïde hyperbolique.

En résumé; il y a toujours *un* ou *trois* paraboloïdes hyperboliques passant par la courbe commune à deux quadriques.

15. — *Y a-t-il des solutions réelles à l'équation*

$$x - \log x = 0, \qquad (a > 1), \tag{1}$$

a *désignant la base du système de logarithmes?*

En appliquant le théorème de Rolle à l'équation (1) on trouve qu'il y a deux racines réelles lorsque la condition

$$\log e - \log \log e \leqslant 0, \tag{2}$$

est vérifiée; les racines sont imaginaires, dans l'autre hypothèse.

L'inégalité (2) peut s'écrire

$$\log\left(\frac{e}{\log e}\right) \leqslant 0,$$

ou, puisqu'on suppose $a > 1$,

$$\frac{e}{\log e} \leqslant 1.$$

Mais on sait que

$$\log_a e . \log_e a = 1\,;$$

on a donc

$$e \log_e a \leqslant 1,$$

ou enfin

$$a \leqslant e^{\frac{1}{e}}.$$

C'est la condition cherchée; elle est compatible avec l'hypothèse que nous avons faite ($a > 1$). Pour conclure, nous voyons donc que dans les systèmes de logarithmes dont la base est choisie entre l'unité et le nombre transcendant $e^{\frac{1}{e}}$, il y aura, dans la table correspondante, deux nombres ayant la même valeur que leurs logarithmes.

16. — *Quel est le nombre de conditions auxquelles on assujettit une courbe* U, *quand on donne un point multiple* A, *d'ordre* j.

En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes en ce

point, tous les termes de l'équation, jusques et y compris ceux de l'ordre $j - 1$ doivent disparaître. Or les termes du degré $(j - 1)$ sont représentés symboliquement par

$$\frac{1}{(j-1)!}(xf' + yf + zf)^{(j-1)}.$$

Le nombre de ces termes, par une formule connue (*C. M. S*; Alg., p. 34), est

$$\frac{j(j+1)}{2}.$$

D'ailleurs, si toutes les dérivées d'ordre $(j - 1)$ sont nulles, toutes celles d'un ordre inférieur sont nulles; ainsi la connaissance d'un point multiple d'ordre j, quand ce point est donné, équivaut à $\frac{j(j+1)}{2}$ conditions simples.

17. — *Appliquer le théorème de Sturm à l'équation*

$$V = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

On sait (*C. M. S.*, t. I, § 479) comment, par une application très simple du théorème de Rolle, on démontre qu'une pareille équation n'a qu'une racine réelle. On peut aussi établir ce fait, au moyen du théorème de Sturm, de la manière suivante:

On a d'abord

$$V_1 = \frac{dV}{dx} = 1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^{2p}}{2p!}.$$

Divisons V par V_1; les polynômes V et V_1 étant ordonnés par rapport aux puissances croissantes de x; nous avons

$$V = V_1 \times 1 + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

En posant:

$$V_2 = -\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

on a

$$V = V_1 - V_2$$

et l'on peut appliquer le théorème de Sturm aux trois fonctions

$$V, \quad V_1, \quad V_2.$$

En désignant par ε une quantité positive, infiniment petite,

on forme alors le tableau suivant :

$-\infty$	$-$	$+$	$+$
$-\varepsilon$	$+$	$+$	$+$
$+\varepsilon$	$+$	$+$	$-$
$+\infty$	$+$	$+$	$-$

D'où l'on conclut que l'équation $V = 0$, admet une seule racine réelle, comprise entre zéro et $-\infty$.

QUESTION 122

Solution par M. Rat (*), élève de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis (classe de M. Piéron).

On considère une ellipse Γ *rapportée à ses axes. Désignons par* P *et* Q *les extrémités du grand axe, et imaginons sur* Γ *un point mobile* M. *Les droites* PM *et* QM *rencontrent le cercle* Δ, *décrit sur* PQ *comme diamètre, en des points* A *et* B.

1° *Trouver le lieu décrit par le pôle* C *de la droite* AB *par rapport à* A. *Ce lieu est l'ellipse qui correspond à l'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2} = 1.$$

2° *Démontrer qu'en désignant par* φ *l'angle d'anomalie du point* M, *l'équation du cercle* AMB *est*

$$x^2 + y^2 - 2ax\cos\varphi - \frac{a^2+b^2}{b}y\sin\varphi + a^2 = 0.$$

3° *Lieu des points de contact des tangentes menées de l'origine aux cercles* AMB. *Ce lieu est le cercle* Δ *lui-même.*

4° *Enveloppe des cercles* AMB. *On trouve deux cercles, correspondant aux équations*

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2y}{b} - a^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - \frac{c^2y}{b} - a^2 = 0.$$

5° *Lieu des centres de similitude du cercle principal* Δ *et du cercle mobile* AMB.

(G. L.)

(*) Aujourd'hui, élève à l'école Polytechnique.

1° Soient $a \cos \varphi$ et $b \sin \varphi$ les coordonnées d'un point M de l'ellipse. Les équations des droites PM et QM sont respectivement

$$a(y - b \sin \varphi)(1 - \cos \varphi) + b \sin \varphi(x - a \cos \varphi) = 0,$$

et $a(y - b \sin \varphi)(1 + \cos \varphi) - b \sin \varphi(x - a \cos \varphi) = 0,$

et l'équation quadratique du système de ces droites se met, après réductions, sous la forme :

$$a^2 \sin^2 \varphi(y - b \sin \varphi)^2 + 2ab \sin \varphi \cos \varphi (x - a \cos \varphi)(y - b \sin \varphi)$$
$$- b^2 \sin^2 \varphi(x - a \cos \varphi)^2 = 0,$$

égalité qu'on peut écrire

$$(a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2) \sin \varphi + 2abxy \cos \varphi - 2a^2by = 0. \quad (1)$$

L'équation du cercle principal Δ est d'ailleurs

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0. \quad (2)$$

Si nous multiplions l'équation (2) par b^2 et si nous ajoutons ce résultat à l'équation (1) nous avons :

$$y[(a^2 + b^2)y \sin \varphi + 2abx \cos \varphi - 2a^2b] = 0,$$

qui représente deux droites, passant par les points communs aux cercles Δ et aux droites PM et QM. L'une des droites obtenues est la droite PQ; donc l'autre est la droite AB, dont l'équation est :

$$2ax \cos \varphi + \frac{(a^2 + b^2)}{b} y \sin \varphi - 2a^2 = 0. \quad (3)$$

Soient α et β les coordonnées du pôle de la droite AB

$$\alpha x + \beta y - a^2 = 0. \quad (4)$$

Si l'on identifie (3) et (4), on a les relations :

$$\frac{\sin \varphi}{\dfrac{\beta}{a^2 + b^2}} = \frac{2b \cos \varphi}{\dfrac{\alpha}{a}} = 2b.$$

On tire de là $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$, et, en utilisant la relation

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1,$$

on a l'équation du lieu du pôle de la droite AB, qui est (en remplaçant α et β par x et y) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{a^2 + b^2}{2b}\right)^2} = 1.$$

2° L'équation générale des cercles passant par les points d'intersection A et B de la droite AB avec le cercle Δ est :

$$\lambda(x^2 + y^2 - a^2) + 2ax \cos \varphi + \frac{a^2 + b^2}{b} y \sin \varphi - 2a^2 = 0.$$

Si on détermine λ de façon que le cercle représenté par l'équation précédente passe en M, on trouve $\lambda = -1$.

L'équation du cercle circonscrit au triangle AMB est donc :

$$x^2 + y^2 - 2ax \cos \varphi - \frac{a^2 + b^2}{b} \sin \varphi + a^2 = 0. \quad (4)$$

3° Pour avoir l'équation du lieu des points de contact des tangentes menées de l'origine aux cercles AMB, il faut éliminer le paramètre variable φ entre l'équation du cercle AMB et l'équation de la polaire de l'origine par rapport au cercle AMB :

$$2ax \cos \varphi + \frac{a^2 + b^2}{b} y \sin \varphi - 2a^2 = 0;$$

ce qui donne, en ajoutant ces équations membre à membre

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

ce lieu est donc le cercle Δ lui-même.

4° Pour avoir l'enveloppe des cercles AMB, il faut éliminer le paramètre variable φ entre l'équation (4) et la dérivée du premier membre de cette équation (4), prise par rapport à φ,

$$2ax \sin \varphi - \frac{a^2 + b^2}{b} y \cos \varphi = 0. \quad (5)$$

Des équations (4) et (5) on tire

$$\sin \varphi = \frac{\dfrac{a^2 + b^2}{b} y}{x^2 + y^2 + a^2},$$

et

$$\cos \varphi = \frac{2ax}{x^2 + y^2 + a^2}.$$

Portant ces valeurs de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ dans la relation $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, on a l'équation du lieu :

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2}{b}\right)^2 y^2 - 4a^2x^2 = 0,$$

qui peut s'écrire :

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 - \left(\frac{c^2}{b}\right)^2 y^2 = 0.$$

en posant

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

ou encore

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 - \left(\frac{c^2}{b}\right)^2 y^2 = 0.$$

On voit donc qu'on a, comme lieu, les deux cercles représentés par les équations :

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2}{b} y - a^2 = 0,$$

et

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2}{b} y - a^2 = 0.$$

Ces deux cercles sont symétriquement placés par rapport à l'axe des x et ils passent par les points P et Q.

5° Pour trouver le lieu des centres de similitude du cercle Δ et du cercle mobile AMB, nous chercherons le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux deux cercles avec la ligne des centres.

L'équation du cercle Δ peut s'écrire

$$(x - a \cos \varphi)^2 + \left(y - \frac{a^2 + b^2}{2b} \sin \varphi\right)^2 - \left(\frac{c^2}{2b}\right)^2 \sin^2 \varphi = 0.$$

L'équation d'une tangente commune aux cercles Δ et AMB est donc

$$(x - a \cos \varphi) \cos \omega + \left(y - \frac{a^2 + b^2}{2b} \sin \varphi\right) \sin \omega - \frac{c^2}{2b} \sin \varphi = 0, \quad (6)$$

avec la relation :

$$a \cos \varphi \cos \omega + \frac{a^2 + b^2}{2b} \sin \varphi \sin \omega + \frac{c^2}{2b} \sin \varphi = \pm a, \quad (7)$$

qui exprime que la droite (6) est à une distance du centre du cercle Δ, égale au rayon de ce cercle.

D'autre part, l'équation de la ligne des centres des deux cercles considérés est :

$$\frac{x}{a \cos \varphi} = \frac{y}{\frac{a^2 + b^2}{2b} \sin \varphi}. \quad (8)$$

On aura donc le lieu des centres de similitude des cercles AMB et Δ, en éliminant les paramètres variables φ et ω entre les équations (6), (7) et (8).

Or, de l'équation (8) on tire :

$$\frac{x}{a \cos \varphi} = \frac{y}{\frac{a^2 + b^2}{2b} \sin \varphi} = \frac{x \cos \omega + y \sin \omega}{a \cos \varphi \cos \omega + \frac{a^2 + b^2}{2b} \sin \varphi \sin \omega},$$

d'où l'on tire en tenant compte des équations (6) et (7) :

$$\frac{x}{a\cos\varphi} = \frac{y}{\dfrac{a^2+b^2}{2b}\sin\varphi} = \frac{\pm a}{\pm a - \dfrac{c^2}{2b}\sin\varphi}.$$

Si on tire $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ de ces deux dernières équations et qu'on porte ces valeurs dans la relation $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, on a l'équation du lieu des centres de similitude des deux cercles Δ et AMB. On trouve ainsi :

$$4a^2b^2y^2 + (a^2+b^2)^2x^2 - [c^2y \pm a(a^2+b^2)]^2 = 0.$$

ou

$$(a^2+b^2)^2x^2 + (4a^2b^2 - c^4)y^2 - 2ac^2(a^2+b^2)y - a^2(a^2+b^2)^2 = 0,$$

et

$$(a^2+b^2)^2x^2 + (4a^2b^2 - c^4)y^2 + 2ac^2(a^2+b^2)y - a^2(a^2+b^2)^2 = 0.$$

On a donc pour le lieu cherché un système de deux coniques, symétriques par rapport à l'axe des y, et symétriquement placées par rapport à l'axe des x. Ces deux coniques passent aux points P et Q.

Ces deux coniques seront des ellipses, si l'on a :

$$4a^2b^2 - c^4 > 0,$$

ou

$$(2ab + c^2)(2ab - c^2) > 0,$$

ou

$$2ab - (a^2 - b^2) > 0,$$

ou

$$[b + a(\sqrt{2} + 1)][b - a(\sqrt{2} - 1)] > 0,$$

ou enfin

$$b > a(\sqrt{2} - 1).$$

Si $b < a(\sqrt{2} - 1)$, les coniques précédentes sont des hyperboles.

Si, en particulier, $b = a(\sqrt{2} - 1)$, ces deux coniques sont des paraboles.

Nota. — Solutions analogues par MM. Aug. Blanc, élève au lycée de Marseille; Amouroux, lycée de Grenoble; Giat, lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas); Vacquant, ancien élève de mathématiques spéciales au lycée de Lille; Hugon, à Poligny; Valabrègue, au lycée de Montpellier; Taratte, élève de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis; Marzarit, au lycée d'Angoulême; E. Simonot, élève de mathématiques spéciales à la faculté libre de Lyon; Sequestre, au lycée d'Angoulême; F. Michel, élève de mathématiques spéciales au lycée de Montpellier; Charles Martin, lycée Condorcet; Grolleau, maître auxiliaire au lycée de Marseille.

VARIÉTÉS

SUR LES FONDEMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Par M. **G. Milhaud**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée du Havre.

(*Suite et fin*, voir p. 141.)

Arrivons maintenant à la deuxième interprétation du problème; elle porte au fond sur l'impossibilité pour l'esprit de reconstituer un élément quelconque déterminé à l'aide de la série illimitée de parties en lesquelles la pensée peut logiquement le subdiviser. Ainsi reprenons l'exemple de la progression géométrique. L'extrémité A_n de la longueur variable décrit successivement, à partir de sa position initiale A_1, les chemins $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ . . ., et par conséquent a, pour position limite, un certain point L situé à une distance $\frac{10}{9}$ du point O, Que l'on compose, par la pensée, le total $1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^n}$, quel que soit le terme où l'on s'arrête, la somme est moindre que OL, et si on essaie de parvenir ainsi à la formation de OL, on se heurte à un obstacle insurmontable, parce que le procédé logique qu'emploie l'esprit est inépuisable. Le mobile auquel on aurait donné par exemple un mouvement uniforme arrivera jusqu'en L; l'esprit ne peut l'y suivre, s'il s'assujettit à décomposer le chemin en parties dont le nombre est illimité. Il y a là une question des plus intéressantes pour les philosophes, mais elle n'a aucun rapport avec le fait mathématique que le mobile A_n de notre exemple a pour position limite le point L.

Tout le monde connaît le fameux problème d'Achille et de la tortue. Achille va dix fois plus vite que la tortue, la dis-

tance qui les sépare à l'instant du départ est, pour fixer les idées, de 10 mètres. Quand Achille aura parcouru ces 10 mètres, disait Zénon, la tortue aura parcouru 1 mètre, la distance qui les sépare sera devenue 1 mètre; quand Achille l'aura parcourue, la tortue se sera avancée de $\frac{1}{10}$, et ainsi de suite; la distance deviendra après chaque instant le dixième de ce qu'elle était à l'instant précédent, *elle ne sera donc jamais nulle.*

Les idées se suivent logiquement jusqu'à la conclusion exclusivement. Que fait en effet l'esprit qui ajoute les petits chemins $1, \frac{1}{10} \cdots$ Nous l'avons vu, il construit une longueur qui reste inférieure à $\frac{10}{9}$ de mètre. Il n'explore que la portion de droite en deçà du point L situé à cette distance du point de départ de la tortue. En supposant que le mouvement soit uniforme et de vitesse 1, on voit également que l'esprit en ajoutant 1 sec, $\frac{1}{10}$ de s, $\frac{1}{100}$ de s... forme une durée qui reste inférieure à $\frac{10}{9}$ de s. Il n'a cherché l'instant de la rencontre que dans un intervalle de temps limité à $\frac{10}{9}$ de seconde En procédant ainsi, il n'arrive pas à engendrer toute la portion de droite se terminant en L, ou toute la durée se terminant à cet instant. Mais la conclusion logique doit être alors : qu'en deçà d'un certain point sur la droite, et d'un certain instant dans le temps, la rencontre n'aura pas lieu. Le mot *jamais* qui intervient dans la conclusion du sophisme, et auquel on voudrait faire signifier « si loin qu'on se place dans le temps — dans l'avenir » empêche la conclusion d'être logique. Que si le mot jamais n'implique pas l'idée du temps illimité qui va s'écouler à partir de l'instant présent, s'il est dépouillé de ce sens objectif, pour désigner une impossibilité logique pour l'esprit d'apercevoir le point ou l'instant de la rencontre, quand il se place pour le chercher dans une position particulière, à laquelle est due cette impossibilité, il est bien évident

que tout sophisme a disparu, le raisonnement est absolument rigoureux et la conclusion ne fait que signaler une difficulté que nous reconnaissons tous.

Il est inutile d'insister davantage sur cette difficulté métaphysique. Mais il faut bien constater en quel point de nos recherches nous l'avons rencontrée. Nous sommes bien loin de la notion mathématique de limite, dont la définition si simple et si claire peut sans soulever plus de difficultés être placée à côté des définitions de géométrie ou d'algèbre élémentaire. Nous avons étudié, en dehors de la compréhension de cette idée de limite, une question qui n'intervient jamais dans les raisonnements mathématiques : la variable peut-elle atteindre sa limite ? — Et c'est enfin en nous plaçant à un point de vue tout spécial dans ce dernier problème, que nous avons rencontré une vraie difficulté métaphysique : elle existe, elle est intéressante, mais nos raisonnements fondés sur la notion de limite en sont absolument indépendants.

IV

La notion de continuité est également fondamentale en analyse. Mais ici encore il sera aisé de séparer l'élément nouveau purement analytique de celui dont la nature échappe à tout examen. Ce dernier est le concept du continu, dont on peut discuter et étudier indéfiniment la signification ou l'origine : on n'arrivera certainement pas à le comprendre, c'est-à-dire à le ramener à des concepts plus simples. C'est une de ces notions premières comparables aux idées d'espace et de temps, et d'ailleurs impliquées par celles-ci, qui ne répond peut-être à aucune réalité objective et pourrait bien n'être qu'une loi formelle de notre esprit. Quoi qu'il en soit, la géométrie suppose cette notion dès le début. Que deviendrait sans elle l'idée de la ligne la plus simple? L'arithmétique la trouve dans ses fondements même, lorsqu'elle crée des symboles pour représenter tous les états des grandeurs. Plus généralement, elle intervient en analyse dans ce principe si fréquemment appliqué, — toute quantité seulement

croissante ou seulement décroissante a une limite si elle ne croît pas ou ne décroît pas indéfiniment. C'est là un postulat impliqué dans notre notion du continu (*). M. Tannery, dans son introduction à la théorie des fonctions d'une variable, a montré qu'en se plaçant à un point de vue purement abstrait, en laissant de côté la considération des quantités concrètes, on peut se passer de ce principe. Mais, en tous cas, que le postulat soit laissé dans l'analyse pure, au lieu d'être reculé jusqu'aux applications, il est loin d'être introduit par le haut calcul, puisqu'il est déjà indispensable à la définition d'un nombre tel que $\sqrt[3]{2}$ par exemple. L'élément nouveau qui intervient dans l'analyse supérieure, c'est la continuité d'une fonction, une continuité relative, si l'on veut, dont la définition, donnée dans tous les cours d'algèbre, se ramène immédiatement à celle de la limite, et se trouve être aussi rigoureuse que n'importe quelle définition élémentaire.

Ainsi, le calcul infinitésimal, de quelque façon qu'il ait été d'abord compris par ses inventeurs eux-mêmes, et toute théorie construite logiquement sur la notion de limite, n'est qu'un développement naturel et logique des principes posés dès les premiers pas des sciences mathématiques, sans intervention d'aucune difficulté nouvelle.

C'est la conclusion que nous avions en vue.

(*) Voir sur ce sujet notre préface de la traduction de la *Théorie générale des Fonctions*, de Paul du Bois-Reymond, chez Hermann, rue de la Sorbonne, Paris.

Le Directeur Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15122-7.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

SUR QUELQUES CERCLES REMARQUABLES

(CERCLES DE NEUBERG ET DE M'CAY).

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 169).

II

CERCLES DE M'CAY

10. Définition. — Si l'on construit, sur les trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC comme segments homologues, des figures semblables F_a, F_b, F_c il existe une infinité de systèmes de trois points en ligne droite; ces points décrivent trois circonférences M_a, M_b, M_c qui ont reçu la dénomination de *cercles de M'Cay.*

Ces cercles remarquables que nous allons faire connaître ont été étudiés particulièrement par M. M'Cay (*Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. XVIII, pp. 453-470) et dans une lettre adressée à M. Casey, M. Neuberg qui les avait déjà signalés dans *Mathesis* (t. I, p. 76), a proposé de les appeler *Cercles de M'Cay* (J. Casey, *A Treatise...*, p. 253).

11. Lemme I. — *Si l'on construit trois triangles semblables* BCJ_a, CAJ_b, ABJ_c, *le centre de gravité du triangle* $J_aJ_bJ_c$ *coïncide avec celui de* ABC (*).

(*) Ce théorème généralisé par M. Laisant (A. F. *Congrès du Havre*, 1877) et par M. Neuberg (*Nouvelle Correspondance*, t. VI, p. 475) peut s'énoncer ainsi : (voir *Mathesis*, t. I, p. 167; t. II, pp. 59, 76).

Si, sur les côtés d'un polygone plan $A_1A_2 \ldots A_nA_1$, *on construit des triangles semblables* $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3 \ldots A_nB_nA_1$, *les deux systèmes de points* $(A_1, A_2 \ldots A_n)$, $(B_1, B_2 \ldots B_n)$ *ont même centre des moyennes distances.*

M. Laisant a ensuite communiqué à M. Neuberg (voir *Mathesis*, t. II 1882, p. 59) la généralisation suivante:

On fait tourner les côtés d'un polygone gauche $A_1A_2 \ldots A_nA_1$, *d'un même angle* α *et dans le même sens, autour des axes parallèles* A_1U_1, $A_2U_2 \ldots A_nU_n$; *sur les nouvelles positions* $A_1A'_2$, $A_2A'_3 \ldots A_nA'_1$ *de ces côtés, on prend les*

Ce théorème, dans le cas particulier où les points J_a, J_b, J_c divisent les côtés du triangle dans le même rapport, se rencontre déjà dans les *Collections mathématiques de Pappus* (voir *l'Aperçu historique* de Chasles, p. 44). Le cas général a été signalé par M. Laisant au congrès du Hâvre (*Associat. française*, 1877) et par M. J. Neuberg dans la *Nouvelle correspondance mathématique* de M. Catalan (1880, pp. 475 et 512). M. Neuberg nous en communique la démonstration suivante :

Soient G le centre de gravité de ABC, m le milieu de BC. Si on imprime au sommet A le déplacement AA_1 le centre de gravité α du triangle A_1BC sera sur une parallèle $G\alpha$ à AA_1 et $G\alpha = \frac{1}{3} AA_1$. Autrement dit; quand un sommet subit un déplacement AA_1, le centre de gravité subit, dans une direction parallèle, un déplacement trois fois moindre. Supposons que les trois sommets éprouvent des déplacements AA_1, BB_1, CC_1. Pour avoir le centre de gravité du triangle $A_1B_1C_1$ il suffit de mener

$$G\alpha \text{ parallèle à } AA_1 \text{ et égale à } \frac{1}{3} AA_1,$$

$$\alpha\beta \text{ parallèle à } BB_1 \text{ et égale à } \frac{1}{3} BB_1,$$

$$\beta\gamma \text{ parallèle à } CC_1 \text{ et égale à } \frac{1}{3} CC_1.$$

Si les trois triangles ABA_1, BCB_1, CAC_1 sont semblables, les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont proportionnelles à AB, BC, CA et forment entre elles des angles égaux aux angles B, C, A du triangle ABC. Donc la ligne $G\alpha\beta\gamma$ se ferme d'elle-même et γ coïncide avec G.

La même démonstration s'étend à un polygone.

12. Lemme II. — *Deux figures semblables et semblablement disposées peuvent toujours être rendues homothétiques par une rotation autour d'un point de son plan. Ce point est appelé* centre de similitude *ou* point double.

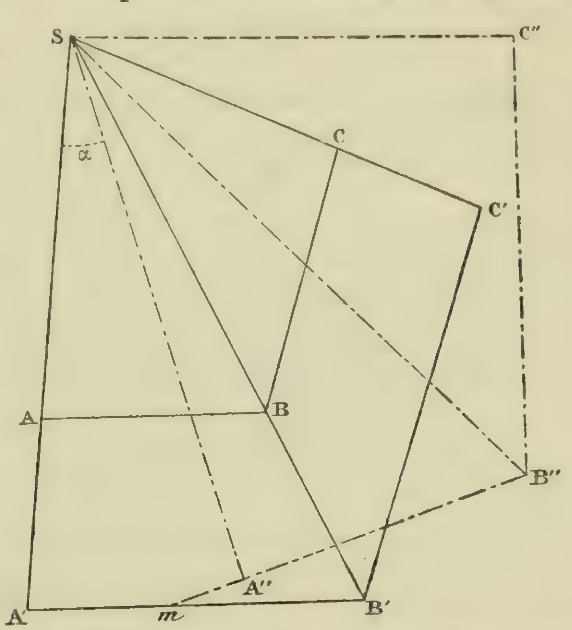
---

longueurs A_1B_1, A_2B_2 ... A_nB_n *proportionnelles à* A_1A_2, A_2A_3 ... A_nA_1. *Les deux systèmes de points* (A_1, A_2, A_3 ... A_n), (B_1, B_2, B_3 ... B_n) *ont même centre des moyennes distances.*

Étant donné un système quelconque points A, B, C ... si sur les rayons vecteurs SA, SB, SC..., on détermine les points A′, B′, C′... tels que

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \ldots = K,$$

on a deux systèmes homothétiques; les droites qui joignent deux couples de points homologues tels que AB, A′B′ sont parallèles et dans le rapport 1 : K. Si on fait tourner le second système A′B′C′ autour de S, il vient se placer par exemple en A″B″C″. Les systèmes ABC, A″B″C″ sont simplement semblables, par conséquent ils se correspondent points par points de manière que les segments homologues A″B″ et AB sont dans le rapport constant K et font entre eux l'angle α.



Réciproquement, si deux systèmes A″B″C″... et ABC... jouissent de cette propriété, on peut trouver un point S tel qu'une rotation autour de ce point rend les systèmes homothétiques ; ce point se trouve à l'intersection des circonférences $mA'B''$, $mB'B''$.

Lorsqu'on connaît le point double S et la figure ABC... on passe à la figure semblable A″B″C″... en faisant tourner les rayons vecteurs SA, SB, SC... d'un angle constant α, et en modifiant les longueurs de ces rayons dans le rapport constant K.

Construisons un angle $\alpha\Sigma\alpha''$ égal à l'angle de rotation α et prenons les côtés $\Sigma\alpha$, $\Sigma\alpha''$ dans le rapport K : 1. Tous les triangles SAA″, SBB″ seront semblables à $\Sigma\alpha\alpha''$. Ce triangle $\Sigma\alpha\alpha''$ indique donc la déformation qu'il faut faire subir à la figure ABC... pour passer à la figure A″B″C″... un tel triangle

peut être appelé *triangle modulaire* de F_a et F_b, parce qu'il indique le mode de déformation.

Soient maintenant F_a, F_b, F_c trois figures semblables, S_a le point double de F_b et F_c, S_b celui de F_a et F_c, S_c celui de F_a et F_b.

Une rotation de F_a autour de S_c rend F_a homothétique à F_b;
— F_b — S_a — F_b — F_c;
— F_c — S_b — F_c — F_a.

Ces trois rotations combinées avec les modifications des rayons vecteurs dans les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$, où a, b, c, sont trois segments homologues de F_a, F_b, F_c changent F_a en F_b, F_b en F_c, F_c en F_a c'est-à-dire reproduisent la première figure; il en résulte que le triangle modulaire correspondant à F_a et F_b étant $\alpha S \beta$, celui de F_b et F_c étant $\beta S \gamma$, celui de F_a et F_c est nécessairement $\gamma S \alpha$.

Si donc J_a, J_b, J_c sont trois points homologues de F_a, F_b, F_c, les triangles $J_a J_b S_c$, $J_b J_c S_a$, $J_c J_a S_b$ seront semblables à $\alpha\beta S$, $\beta\gamma S$, $\gamma\alpha S$. *(A suivre.)*

VARIÉTÉS

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 171).

CHAPITRE IV

LA DISTANCE AU POINT INACCESSIBLE

Nous abordons maintenant les différents problèmes qui concernent un point supposé inaccessible. Parmi ces problèmes, le plus connu, et aussi le plus intéressant, est celui qui se propose de mesurer la distance d'un point donné, accessible, à un autre point inaccessible.

Nous avons déjà, au chapitre II, à propos du problème de la largeur de la rivière, examiné ce problème, pour lequel nous avons indiqué diverses solutions. Mais nous reprenons ici cette intéressante question pour la traiter par des procédés variés et avec les développements qu'elle comporte.

37. Les solutions par la fausse équerre. — Première Solution. Soit C le point situé dans la partie inaccessible U; on propose de déterminer la distance du point donné O, à ce point C.

Dans la partie accessible V, traçons un jalonnement AB et prolongeons, suivant OD, la ligne OC. Plaçons ensuite la fausse équerre en un point arbitraire A et jalonnons la direction AD donnée par l'une des branches, l'autre branche étant dirigée suivant AC. Sans toucher aux branches qui indiquent alors l'angle DAC, on détermine, par

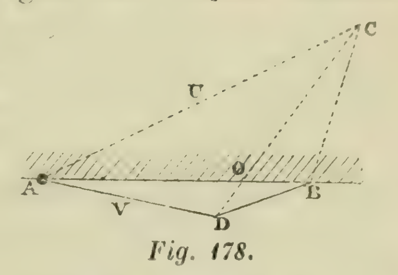


Fig. 178.

tâtonnements, un point B de Δ, duquel on voit les points C et D sous un angle supplémentaire de DAC. Nous disons qu'il ne faut pas, pour l'opération que nous décrivons, modifier la position des branches de la fausse équerre; car, suivant qu'on vise deux directions des branches, ou, au contraire, l'une d'elles et la direction opposée de l'autre, on obtient évidemment deux angles supplémentaires. En un mot, *la fausse équerre donne, en même temps, un angle* θ *et l'angle* $\pi - \theta$.

Ayant mesuré, avec le ruban divisé, les longueurs OA, OB, OD le théorème de Ptolémée donne

$$OC = \frac{OA.OB}{OD}.$$

Deuxième Solution. — Traçons, dans la région du terrain sur laquelle on peut opérer, une base OA et jalonnons les parties accessibles OE et AC des droites MO et MA.

Si nous effectuons le tracé qu'indique la figure, dans laquelle CD et AB sont parallèles à OE, une propriété connue donne

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{CD} - \frac{1}{AB}.$$

Cette égalité permet de calculer OM, quand on a mesuré CD et AB; ce calcul se trouve d'ailleurs immédiatement fait quand on possède une table des inverses des nombres entiers. Nous avons déjà, précédemment, et à plusieurs reprises, fait allusion à celle-ci; et nous aurons encore, dans la suite, plus d'une occasion de préconiser son emploi dans les opérations d'arpentage. Nous allons, dans le paragraphe suivant, faire connaître, à propos du problème qui nous occupe, la pratique de cette table.

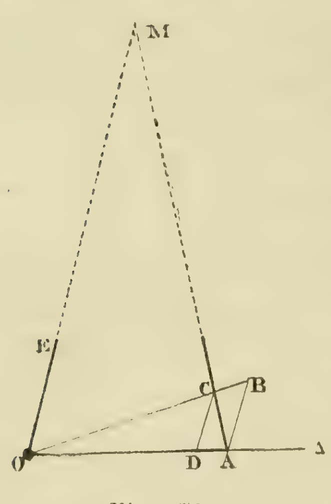


Fig. 179.

Mais avant d'aborder cette exposition, nous indiquerons encore deux solutions, presque aussi simples que la précédente et qui s'appliqueraient au cas où, pour de certains motifs, les chaînages ne pourraient être faits que sur la droite allant du point donné au point inaccessible.

Troisième Solution. — Prenons, sur la partie accessible de OM, un point arbitraire Q pour le joindre à un autre point A, pris en dehors de OM, mais, bien entendu, dans la partie accessible. Menons alors CB parallèlement à OQ; soit D le point de concours des lignes OC, BM; AD coupe OM en un point P.

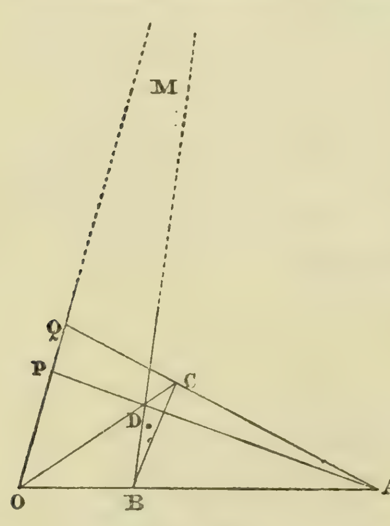


Fig. 180.

Nous allons montrer que

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{OP} - \frac{1}{OQ}.$$

En effet, le triangle AOP et la transversale BDM donnent

$$\frac{MO}{MP} \cdot \frac{DP}{DA} \cdot \frac{BA}{BO} = 1. \qquad (1)$$

On a, de même, en considérant le triangle APQ et la

transversale CDO

$$\frac{OP}{OQ}\cdot\frac{DA}{DP}\cdot\frac{CQ}{CA} = 1. \qquad (2)$$

Multiplions (1) et (2); en observant que CB étant parallèle à OM, les rapports $\frac{BA}{BO}$, $\frac{CA}{CQ}$ sont égaux, il vient

$$MO.OP = MP.OQ,$$

ou

$$OM.OP = (OM - OP)OQ$$

ou enfin

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{OP} - \frac{1}{OQ}. \ (*)$$

On peut alors, comme dans la solution précédente, pour calculer rapidement OM, utiliser la table aux inverses; on observera, et la figure a été faite pour montrer l'utilité de cette remarque, comment la construction précédente s'applique à la mesure de grandes distances Le triangle OAQ, qui sert de base aux opérations, peut être tracé dans un espace de terrain aussi restreint qu'on voudra; seulement, dans le cas où le point M est très éloigné de O, les droites AP, AQ sont très voisines l'une de l'autre. En effet, si PQ tend vers zéro, OM croît indéfiniment.

Quatrième Solution. — Pour obtenir la distance du point O au point inaccessible A, on choisit un point O′ dans la partie accessible et, avec la fausse équerre, on relève l'angle OO′A. On peut alors jalonner une droite O′B dirigée de telle façon que OO′B soit précisément le supplément de l'angle OO′A, chose bien facile puisque la fausse équerre donne tout à la fois un angle et son supplément. La perpendiculaire élevée au point O′ à la droite OO′

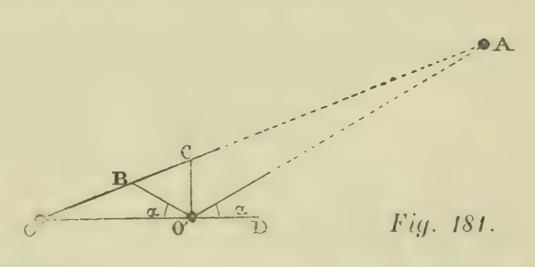


Fig. 181.

(*) Cette propriété remarquable, sous une forme différente, fait partie des trente-huit lemmes de Pappus sur les Porismes d'Euclide (Chasles, *les trois livres des Porismes*, p. 89; lemme VII).

rencontre OA en un certain point C; la ponctuelle OBCA est harmonique et l'on a

$$\frac{1}{OA} = \frac{2}{OC} - \frac{1}{OB}.$$

38. La table des inverses. — Imaginons le tableau suivant dans lequel la colonne désignée par N renferme la suite naturelle des nombres entiers, tandis que en regard de ces nombres, et dans la colonne I, sont écrits leurs inverses.

N	I	N	I	N	I
2	0,5	68	0,01470	.	.
3	0,3*	69	0,01449	.	.
4	0,25	.	.	.	.
5	0,2	.	.	.	.
6	0,16*	.	.	.	.
7	0,14285	77	0,012987	227	0,00440
.	.	.	.	328	0.00438
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
33	$0,\overline{03}$	93	0,010752	.	.
34	0,02941	.	.	.	.
35	0,02857	.	.	.	.
36	0,027*	.	.	.	.
.	.	97	0,01031	396	$0,101\overline{5}$
.	.	98	0,01020	.	.
.	.	99	$0,\overline{01}$	.	.
66	$0,0\overline{15}$	100	0,01	.	.
67	0,01492	.	.	.	.

(*) Nous avons, comme on le voit, fait figurer dans ce tableau, quelques nombres seulement, pour donner une idée de sa composition.

L'astérisque placée à côté d'un chiffre veut dire qu'il doit être indéfiniment répété. Ainsi nous écrivons 0,3* au lieu de 0,333... pour représenter $\frac{1}{3}$. De même, 0,027* est écrit à la place de 0,02777...

Voici l'usage qu'on peut faire de cette table. Supposons connus les nombres a, b et admettons d'abord que l'on considère seulement des nombres entiers. Dans la table, en regard des nombres a et b se trouvent écrits deux nombres, dans la colonne I; on en fait la différence δ. Avec un peu d'habitude, cette différence peut se faire de tête; puis, on cherche, dans la colonne I, le nombre δ. Si δ se trouve écrit dans cette colonne; en regard, on pourra lire la distance cherchée. Si non, on trouvera que δ est compris entre deux nombres consécutifs δ', δ'' de la colonne I; en prenant pour x le nombre entier écrit en regard de δ', ou celui qui est placé en face de δ'', on aura, à une unité près, par défaut ou par excès, la longueur inconnue.

Ainsi, *de simples lectures* permettent de trouver la longueur de x et cette observation s'applique à toutes les formules dans lesquelles entrent uniquement l'inverse des quantites données et l'inverse de l'inconnue, sous une forme linéaire.

Appliquons ceci à quelques exemples numériques.

1° En cherchant la distance d'un point à un point inaccessible *(fig. 179)* on a relevé CD = 33 et AB = 36. En face de ces nombres, on lit dans la table : $0{,}0\overline{3}$ et $0{,}027$*. La différence est $0{,}00\overline{25}$. On cherche ce nombre dans la colonne I et, en regard, on lit 396; le point inaccessible est donc à 396 mètres du point où l'on se trouve placé.

2° Prenons un autre exemple, et supposons que les opérations du chaînage fournissent les nombres suivants :

$$AB = 93, \qquad CD = 77.$$

---

qui représente $\frac{1}{36}$. Lorsqu'une barre est placée au-dessus de plusieurs chiffres consécutifs, ce signe indique que la partie formée par l'ensemble de ces chiffres doit être indéfiniment reproduite.

D'après cela, $0{,}0\overline{3}$ veut dire 0,03030303.. nombre égal à $\frac{1}{33}$; de même $0{,}0\overline{15}$ $= 0{,}01515151\ldots = \frac{1}{66}$.

Dans la pratique, il suffirait, pour le plus grand nombre de cas, d'avoir une table s'étendant aux nombres de 1 à 1000, les inverses étant calculés avec 5 ou 6 décimales.

La table donne pour les nombres inverses correspondants :

$$0,010752, \qquad \text{et} \qquad 0,012987,$$

dont la différence est

$$0,002235.$$

On cherche ce dernier nombre dans la colonne I et l'on trouve, en regard de 448, le nombre 0,002232; et, 0,002237, en face de 447. La distance demandée est donc 447^m, par défaut; et 448^m, par excès.

En effectuant directement le calcul, on trouve que la distance exacte est :

$$447,5625.$$

Mais, dans la pratique, et pour de telles distances, il suffit de connaître, à un mètre près, la longueur inconnue; d'ailleurs, les erreurs qui s'attachent nécessairement aux opérations pratiques déterminant les longueurs des segments accessibles, ne permettent pas, évidemment, de compter sur une approximation plus forte.

3° Choisissons un dernier cas, dans lequel les longueurs considérées sont plus petites que celles que nous avons envisagées dans les exemples précédents. Il faut alors, bien entendu, que les mesures soient prises avec plus d'approximation et tout au moins, à un décimètre près.

Imaginons donc que nous ayions trouvé

$$AB = 9^m,90, \qquad \text{et} \qquad CD = 6^m,90.$$

En observant que la formule que nous employons :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{CD} - \frac{1}{AB},$$

peut s'écrire, quel que soit λ,

$$\frac{1}{\lambda x} = \frac{1}{\lambda . CD} - \frac{1}{\lambda . AB},$$

on voit qu'on pourra toujours, par l'application de cette remarque, se débarrasser des décimales pouvant entrer dans l'évaluation des nombres qui représentent les longueurs AB, CD; il suffira de les multiplier par une certaine puissance de 10 et, après avoir fait le calcul avec les nouveaux nombres, on divisera le résultat obtenu par une puissance de 10, égale à celle que l'on a introduite.

Ainsi, dans l'exemple numérique que nous considérons,

nous prendrons, dans la table. les nombres

$$0,01449, \quad 0,01010$$

qui correspondent à 69 et à 99; la différence donne

$$0,00439.$$

Nous reportant alors à la table, nous trouvons que les nombres

$$227 \quad \text{et} \quad 228$$

correspondent, respectivement, à

$$0,00440 \quad \text{et} \quad 0,00438.$$

D'après cela la distance cherchée est comprise entre

$$22^{m}.70 \quad \text{et} \quad 22^{m},80.$$

Le calcul direct donne $22^{m},77$; mais, encore une fois ces opérations effectuées sur le terrain ne comportent pas assez de certitude pour qu'il y ait lieu de rechercher quelques centimètres, en plus ou en moins, sur une pareille longueur. La *tolérance*, c'est-à-dire la différence qu'on peut accorder entre les résultats obtenus et les résultats vrais, ne comporte pas des approximations aussi grandes ; elles ne doivent donc pas être recherchées.

Ainsi, la table des inverses, dont nous venons d'indiquer le maniement, fournit toute l'approximation désirable, toute celle du moins qui est compatible avec les erreurs inévitables des mesures que l'on doit effectuer pour la recherche de la longueur inconnue.

On observera que la construction indiquée par la *fig. 179* peut être réalisée en prenant, pour base des opérations, un terrain aussi limité que l'on voudra et que les points O, D, A qui servent de base à la construction sont arbitrairement choisis. Dans ces conditions, et avec le secours de la table aux inverses, on voit que la solution que nous venons de proposer a bien, au plus haut degré, le caractère pratique si désirable pour le problème que nous venons de traiter, l'un des plus importants dans l'art de la guerre.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Vire

(*Suite*, voir p. 179)

55. — Trouver la somme des n premiers termes de la suite :

$$S = \frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

On a, en transformant,

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

d'où
$$S = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Pour $n = \infty$, $S = 1$.

56. — x étant < 1 ; p, q, r étant trois nombres premiers entre eux. Calculer les sommes de la suite :

$$S = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n x^n$$

sachant que les coefficients a_n ont la valeur 0, 1, 2, ou 3, suivant que n n'est divisible par aucun des nombres p, q, r; ou est divisible par l'un d'entre eux ; ou par deux d'entre eux, ou par tous les trois.

Cette suite se somme immédiatement en observant qu'on peut la considérer comme résultant de l'addition des progressions géométriques décroissantes

$$\begin{array}{l} x^p + x^{2p} + x^{3p} + \ldots \\ x^q + x^{2q} + x^{3q} + \ldots \\ \quad + x^{2r} + x^{3r} + \ldots \end{array}$$

On voit, en effet, qu'une pareille somme remplit toutes les conditions données ; donc

$$S = \frac{x^p}{1 - x^p} + \frac{x^q}{1 - x^q} + \frac{x_r}{1 - x^r}.$$

$$S = \frac{x^p + x^q + x^r - 2(x^{p+q} + x^{p+r} + x^{q+r}) + 3x^{p+q+r}}{(1 - x^p)(1 - x^q)(1 - x^r)}.$$

On pourrait généraliser.

57.. — p, q, r... t étant des nombres premiers distincts trouver la somme des inverses de tous les nombres entiers qui n'admettent pas d'autres diviseurs premiers que ceux qui

figurent dans le groupe considéré. On démontrera, que les inverses des nombres entiers consécutifs ont une somme qui croît au-delà de toute limite. De la comparaison de ce résultat avec le précédent, on déduira que la suite des nombres premiers est illimitée (*).

On peut voir que, en appelant S la somme des inverses des nombres considérés, S + 1 est le produit des progressions géométriques décroissantes :

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots$$
$$1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots$$
$$\dots \quad \dots\dots$$
$$1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \dots$$

Donc $$S + 1 = \frac{pqr \dots t}{(p-1)(q-1)\dots(t-1)}.$$

Si le nombre des nombres premiers était limité, quelque grand qu'on le suppose la suite S + 1, comprendrait, en embrassant tous les nombres premiers, les inverses de tous les nombres entiers ; S + 1 se confondrait avec la série harmonique ; mais cette dernière est divergente ; donc l'hypothèse en question est fausse, et la suite des nombres premiers est illimitée.

58. — D'un point quelconque M de la médiane OC d'un triangle rectangle ABC, on abaisse des perpendiculaires MI, MQ sur les côtés OA OB de l'angle droit. Trouver le lieu du point de rencontre des droites BP, AQ.

La considération de triangles semblables montre que le lieu en question est la médiane OC.

On peut généraliser, par projection, pour un triangle quelconque.

UN ERRATUM

Par M. **J. Chapron.**

Dans son article (**) sur le produit des termes d'une progression arithmétique, M. Ch. Guyesse ramène la question à trouver la somme des produits p à p des n premiers nombres;

(*) On pourra consulter, à propos de cet exercice, l'*Arithmétique* de M. Amigues. L'ingénieuse démonstration, ici indiquée, est due à Euler.
G. L.

(**) Voir *Journal*, 1886, p. 176.

mais la première formule qu'il donne pour cet objet est inexacte.

Soient n quantités $a, b, c\ldots$, S_k la somme de leurs produits k à k; S'_k la somme de leurs k^{mes} puissances. Cherchons le total des produits 5 à 5 : le raisonnement sera général. Calculons $a\Sigma bcde$; si l'on considère a comme fixe, $bcde$ prendra toutes les valeurs dont le total constitue S_4, sauf celles contenant a; si donc, pour la valeur de l'expression, $a\Sigma bcde$, nous avions écrit aS_4, il eût fallu retrancher, de aS_4, tous les produits 4 à 4 contenant a ou $a^2\Sigma bcd$; si l'on avait retranché a^2S_3, l'on aurait retranché en trop les produits 3 à 3 contenant a et par suite l'on devrait ajouter $a^3\Sigma bc$, etc. Après ces corrections successives, on aura donc :

$$a\Sigma bcde = aS_4 - a^2S_3 + a^3S_2 - a^4S_1 + a^5$$

de même

$$b\Sigma acde = bS_4 - b^2S_3 + b^3S_2 - b^4S_1 + b^5$$

. . . .

Ajoutons ces égalités :

Dans le premier membre, un produit quelconque $abcde$ se trouvera répété cinq fois; on a donc :

$$5S_5 = S_4S'_1 - S_3S'_2 + S_2S'_3 - S_1S'_4 + S'_5.$$

En général,

$$pS_p = S_{p-1}S'_1 - S_{p-2}S'_2 + S_{p-3}S'_3 - \ldots \qquad (A)$$

On peut, du reste, le voir autrement :

Regardons $a, b, c, d\ldots$ comme les racines d'une équation algébrique; en lui appliquant les formules de Newton servant à calculer la somme des puissances semblables des racines, on trouvera, pour la p^{me} relation, la formule (A).

En se bornant à la première marche on observera qu'on trouve ainsi une démonstration indépendante de l'identité de la division et de la théorie des dérivées, employées ordinairement dans les traités d'algèbre pour établir les formules de Newton.

En particulier, si $a, b, c, d\ldots$ sont les nombres de la suite naturelle, cette relation de récurrence donnera successivement :

$$S_2 = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}, \quad S_3 = \frac{n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)}{48},$$

$$S_4 = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(15n^3+15n^2-10n-8)}{10.24^2},$$

$$S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(3n^2-n-6)}{20.24^2},$$

. . . .

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

(SESSION DE JUILLET 1887)

BORDEAUX

Mathématiques.

— Déterminer les couples de valeurs de x et de y satisfaisant aux équations

$$x^2 - 2xy + 2x - 1 = 0,$$

$$y^2 - 2xy + 2y - 1 = 0.$$

— Sur un côté donné BC, on construit un triangle isocèle BAC, et des points B et C, on abaisse des perpendiculaires BD et CE sur les côtés partant du point A. On désigne par K le point de rencontre de ces perpendiculaires, et par L le point de rencontre de AK et de BC. Démontrer que la ligne LE est tangente à la circonférence circonscrite au quadrilatère AEKD.

POITIERS

Mathématiques.

— Deux nombres positifs ont pour somme $2a$; le quotient de la somme de leurs quatrièmes puissances par la somme de leurs carrés est égal à b. 1° Calculer la différence de ces deux nombres; 2° a étant donné, entre quelles limites doit être compris le nombre b pour que le problème soit possible? 3° Faire le calcul numérique des formules trouvées en supposant $a = 20$, $b = 1201$.

— On fait tourner un triangle quelconque ABC autour de la tangente au cercle circonscrit menée par le sommet A. Exprimer en fonction des côtés a, b, c du triangle : 1° L'aire engendrée par le côté a; 2° le volume engendré par le triangle. — Cas particulier où $A = 90°$.

CERTIFICAT D'ÉTUDES DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

(CHARENTE-INFÉRIEURE — JUILLET 1887)

Mathématiques.

— Résoudre l'équation

$$\frac{x}{24} + \frac{1-x}{20} - \frac{2(3-x)}{15} = \frac{x+1}{21}.$$

— Dans un losange ABCD dont les diagonales sont données : $AC = a$ $BD = b$, on inscrit un cercle dont on demande le rayon en fonction de a et de b. — Calculer la surface de ce cercle en supposant $a = 6$, $b = 4$.

(Énoncés communiqués par MM. Monsallut et Galopeau.)

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

SESSION DE NOVEMBRE 1886 (*).

NANCY

— Établir les relations fondamentales qui lient les six lignes trigonométriques d'un même arc.

— Connaissant cotg a, trouver les cinq autres lignes de l'arc a. Appliquer les formules trouvées au cas particulier $a = 30°$.

— Étant donné un demi-cercle, déterminer sur la direction de son diamètre une longueur $OP = x$, telle qu'en menant par P une tangente PM au cercle et en faisant tourner la figure autour de AP, les volumes engendrés par les deux portions OMB et BMP du triangle OMP soient équivalentes.

PARIS

— Trouver les côtés d'un triangle rectangle connaissant le périmètre $3a$ de ce triangle et sachant que ses côtés forment une progression arithmétique.

— Énoncer et démontrer le principe des forces vives dans le cas d'un point matériel libre soumis à l'action d'une force constante en grandeur et en direction. Vérifier ce principe dans le mouvement d'un corps qui tombe librement dans le vide.

MONTPELLIER

— Calculer les angles et les diagonales d'un quadrilatère inscriptible dont les côtés sont donnés.

Remarque. — Après avoir déterminé les cosinus de l'un des angles, on en déduira le sinus, le cosinus, la tangente de la moitié du même angle.

— Un levier horizontal AB, dont le centre de gravité coïncide avec le point d'appui O, est en équilibre sous l'action de deux forces de grandeur donnée P et Q. On admet que la charge supportée par le point d'appui a une direction verticale. Déterminer les angles α et β que font avec AB les forces P et Q, ainsi que l'intensité de la charge R.

Données : $OA = a$; $OB = b$; P, Q.

Inconnues : α, β, R.

(*) On trouvera des solutions de ces questions dans la publication (*Journal général de l'enseignement secondaire spécial* etc...) à laquelle nous avons emprunté les énoncés et qui est éditée par M. Foucart (20, rue de la Sorbonne).

QUESTION 171

CENTRE DES PARALLÈLES ÉGALES ET POINTS DE JERABEK (*)

Solution et développements, par M. E. VIGARIÉ.

I. — *Centre des parallèles égales.*

1. Problème I. — *Trouver dans le plan du triangle* ABC, *un point* P *tel que les parallèles aux côtés, limitées au périmètre du triangle, soient égales entre elles* (**).

Soient A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b les parallèles de longueur l menées, par P, parallèlement à BC, CA, AB et A′B′C′ le triangle obtenu

(*) On pourra consulter sur ce sujet :
1. E. Hain. — *A. G. H.* t. 57, p. 400; t. 61, p. 257.
2. J. Neuberg. — *Question* 20 (*M.* 1881, pp. 148, 158). *Solution de M. Brocard et notes de M. Neuberg.*
3. J. Neuberg et Jerabek. — *Sur un hexagone équilatéral* (*M.* 1881, p. 191).
4. E. Lemoine. — *A. F. La Rochelle,* 1882, pp. 126-128.
5. — *Exercices divers de math. élém.* (*J. E.* 1884-85, *Ex* : 19 ,33).
6. — *Sur les points associés* (*A. F. Blois,* 1884. *J. S.* 1885, p. 201).
7. — *Bulletin de la Société mathématique de France,* 1884 (§ 16).
8. — *N. A. M.* 1884, pp. 120-121. 1885, p. 221.
9. G. Boubals. — *Question proposée* 171 (*J. E.* 1885, p. 71).
10. G. de Longchamps. — *Généralités sur la Géometrie du triangle J. E.* 1886, p. 232).

Pour les renvois aux mémoires cités, nous indiquerons seulement, dans la suite, le nom de l'auteur et le numéro d'ordre de l'article.

(**) La question 171 (Boubals, 9), est ainsi énoncée :

1° *Trouver dans le plan d'un triangle un point* P_1 *tel que les parallèles, menées de ce point aux trois côtés, déterminent sur ces côtés, trois segments égaux entre eux;*

2° *Trouver dans le plan d'un triangle un point* P *tel que les parallèles menées de ce point aux trois côtés, et limitées à ces côtés, soient égales entre elles;*

3° *Démontrer que les deux points* P, P_1 *et le centre de gravité* G *du triangle sont en ligne droite et que* $PG = 2P_1G$.

Le point P dont il est question est appelé, à cause de cette propriété, *centre des parallèles égales.*

La question 20 (Neuberg, 2) comprend la deuxième partie de l'énoncé précédent, et M. Neuberg pose, en outre, cette question :

2° *Démontrer que l'inverse de la longueur commune de ces parallèles est égale à la demi-somme des inverses des côtés du triangle. Examiner le nombre de solutions.*

Ces questions sont résolues dans la présente note.

en menant par A, B, C, des parallèles aux côtés opposés. Désignons par δ_a, δ_b, δ_c les distances de P aux côtés et par h_a, h_b, h_c les hauteurs de ABC.

Les triangles semblables ABC, AA_bA_c donnent :

$$\frac{A_bA_c}{BC} = \frac{h_a - \delta_a}{h_a}, \qquad \text{ou} \qquad h_a - \delta_a = \frac{2lS}{a^2}. \qquad (1)$$

Or $a(h_a - \delta_a)$... sont les coordonnées barycentriques de P par rapport à A′B′C′, comme elles sont inversement proportionnelles à a, b, c, P est par rapport à A′B′C′ le réciproque du centre du cercle inscrit à A′B′C′; ou, par rapport à ABC, l'anticomplémentaire du réciproque I_0 du centre du cercle inscrit à ABC.

Relations métriques. — *Coordonnées de* P. On voit facilement que les coordonnées barycentriques de P sont proportionnelles à :

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}, \qquad \frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}, \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c};$$

on voit en outre que P est extérieur à ABC, lorsqu'une hauteur est plus grande que la somme des deux autres.

Valeur de l. — De la formule (1) on conclut :

$$a(h_a - \delta_a) + b(h_b - \delta_b) + c(h_c - \delta_c) = S = 2lS\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

donc

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

3. Points algébriquement associés à P dans A′B′C′. — Les points algébriquement associés à P, dans A′B′C′, sont ici les réciproques des centres des cercles ex-inscrits à A′B′C′. Les parallèles menées au triangle par ces points P'_a, P'_b, P'_c sont égales trois à trois et ont respectivement pour longueurs :

$$l'_a = \frac{2abc}{-ab+bc+ca} \qquad l'_b = \frac{2abc}{ab-bc+ca} \qquad l'_c = \frac{2abc}{ab+bc-ca}$$

les quatre longueurs l, l'_a, l'_b, l'_c sont liées par la relation :

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l'_a} + \frac{1}{l'_b} + \frac{1}{l'_c}$$

et l'on a

$$a = \frac{l'_b l'_c}{l'_b + l'_c}$$

ce qui montre qu'*on peut calculer, ou construire, les trois côtés de* ABC *connaissant trois des longueurs* l, l'_a, l'_b, l'_c. *On voit alors que* l, l'_a, l'_b l'_c *sont les diamètres des cercles inscrits et ex-inscrits à un triangle ayant* a, b, c *pour hauteurs* (Lemoine 5).

Les points P, P'_a, P'_b, P'_c peuvent être construits de la manière suivante ; (Neuberg 2. — Lemoine 5) :

Soient A_1, B_1, C_1 les pieds des bissectrices intérieures, A_2, B_2, C_2 les pieds des bissectrices extérieures. Les droites $A'A_1$, $B'B_2$, $C'C_1$ concourent au point P. Les intersections de droites ($A'A_1$, $B'B_2$, $C'C_2$), ($A'A_2$, $B'B_1$, $C'C_2$), ($A'A_2$, $B'B_2$, $C'C_1$) sont les points P'_a P'_b P'_c.

4. — *Les parallèles aux côtés de* ABC, *menées par* P, *déterminent, sur les côtés de* A'B'C', *trois segments égaux.*

Soient A'_c, A'_b ; B'_a, B'_c ; C'_a, C'_b ; les points où ces parallèles coupent les côtés de A'B'C', on a :

$$B'_c C'_b = PA_c + PA_b = A_c A_b = l$$

de même

$$A'_c C'_a = l, \qquad B'_a A'_b = l.$$

En résumé

$$B'_c C'_b = A'_c C'_a = B'_a C'_b = l = \frac{2abc}{ab + bc + ca}.$$

Par conséquent :

Si par le point I_0 (*) *complémentaire du centre des parallèles égales on mène des parallèles aux côtés, les segments des côtés compris entre ces parallèles sont égaux.*

Les points I_0 et P étant complémentaires sont en ligne droite avec G ; on a d'ailleurs (**)

$$2GI_0 = GP.$$

(A suivre.)

(*) Ce point a été étudié par M. d'Ocagne, sous le nom de *Point de concours des antibissectrices* (*J. E.* 1880 pp. 158-164.)

(**) Cette proposition achève de résoudre la question 171 (Boubals 9). Le point I_0, dont il est ici question, est celui que M. Boubals a désigné par P_1.

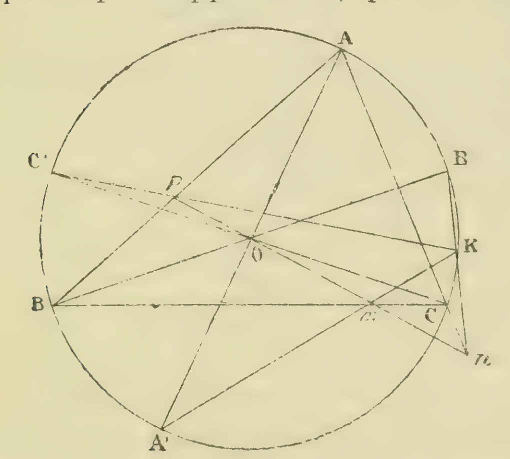
QUESTION 142

Solution, par J. Chapron, à Bragelogne.

Soient ABC *un triangle,* O *le centre du cercle circonscrit; par* O *je mène une droite quelconque qui coupe respectivement* BC, CA, AB, *en* m, n, p. *Soient* m′, n′, p′ *les symétriques de* m, n, p, *par rapport à* O; *démontrer que les droites* Am′, Bn′, Cp′ *se coupent sur le cercle circonscrit à* ABC. — *Généraliser le théorème par projection et en déduire la construction par points d'une ellipse, dont on connaît le centre et trois points.*

(E. Lemoine.)

Convenons de désigner en général le symétrique d'un point par rapport à O, par la même lettre qui désigne le point, en ayant soin d'accentuer cette lettre; de sorte que *m*′, B′, par exemple, sont les symétriques de *m*, B.



Les droites A′*m*, B′*n*, C′*p* se coupent sur la circonférence circonscrite; car, si l'on désigne par K le point d'intersection de A′*m* et de B′*n*, l'hexagone AA′KB′BC étant tel que ses côtés opposés AA′ et BB′, A′K et CB, KB′ et CA concourent aux points O, *m n*, situés en ligne droite et que cinq de ses sommets soient sur la circonférence circonscrite, le sixième K, y est aussi. On verrait de même que A′*m* et C′*p* se coupent sur cette circonférence c'est-à-dire en K.

Les droites A*m*′, B*n*′, C*p*″ symétriques de A′*m*, B′*n*, C′*p* se coupent donc en un point K′ situé sur la circonférence.

C. Q. F. D.

La généralisation par projection du théorème proposé

n'offre aucune difficulté, et l'on peut démontrer directement, par une méthode tout à fait semblable à celle que nous venons d'employer, le théorème suivant, qui comprend cette généralisation.

Soit ABC *un triangle*, O *le centre d'une conique circonscrite à* ABC; *par* O, *je mène une droite quelconque qui coupe respectivement* BC, CA, AB *en* m, n, p; *soient* m′, n′, p′ *les symétriques de* m, n, p *par rapport à* O. *Les trois droites* Am′, Bn′, Cp′ *se coupent sur la conique.*

Ce théorème permet évidemment de construire par points, très simplement, une conique connaissant le centre O et trois points A, B, C.

QUESTION 147

Solution, par M. Chapron.

Étant donnée la fraction $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, *on forme l'équation* $Ax^2 + 2Bx + C = 0$, *donnant les valeurs de* x *pour lesquelles la fraction est maxima ou minima. Le polynôme* $B^2 - AC$ *est un produit de fonctions rationnelles de* a, b, c, a′, b′, c′. *Trouver les facteurs de ce produit ?* (Weill.)

Si l'on pose

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = y,$$

les valeurs limites de y sont données par l'équation

$$y^2(b'^2 - 4a'c') + y(4ac' + 4ca' - 2bb') + b^2 - 4ac = 0,$$

et les valeurs correspondantes de x par la formule

$$x = \frac{b - b'y}{2(a - a'y)}.$$

Si l'on élimine y entre ces deux relations, on obtient l'équation donnant les valeurs de x qui rendent la fraction maxima ou minima. Cette équation devient,

$$(ab' - ba')[(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb')] = 0.$$

On a donc

$$B^2 - AC = (ab' - ba')^2 \{ (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') \}.$$

L'expression de $B^2 - AC$ est bien égale à un produit de deux facteurs rationnels des coefficients. On peut d'ailleurs expliquer la présence du facteur singulier $ab' - ba'$.

QUESTION 163

Solution par M. E. Vigarié.

Inscrire dans un triangle ABC *trois rectangles, reposant chacun sur un côté, et tels que leurs diagonales soient égales et passent par un même point.*

Cette question qui a été énoncée par plusieurs auteurs (Voir Lemoine, *A. F. Lyon*, 1873, § 8; — *Lille*, 1874, § 2; — A. Morel, *J. E.*, 1883, p. 197) peut se déduire immédiatement de la question n° 5, déjà résolue (*) (*J. E.* 1884, p. 106; — *J. E.* 1886, p. 180).

Par le point K de Lemoine menons A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b, antiparallèles à BC, CA, AB. On sait (V. *J. E.* 1883, p. 197) que ces antiparallèles sont égales, qu'elles sont divisées au point K en deux parties égales, et que leurs extrémités sont six points d'une circonférence, de centre K, appelée *Deuxième cercle de Lemoine.*

Les deux triangles $C_aA_bB_c$, $B_aC_bA_c$ satisfont à l'énoncé de la question n° 5 car ils sont inscrits dans une même circonférence, ayant pour centre le point de Lemoine de ABC; de plus, leurs côtés sont perpendiculaires à ceux de ABC.

Il est facile de voir que les rectangles $C_bB_cC_aB_a$, $A_cC_aA_bC_b$, $B_aA_bB_cA_c$ satisfont à l'énoncé de la question n° 163. En effet, chacun d'eux repose sur un côté de ABC et leurs diagonales sont égales puisque ce sont les antiparallèles aux côtés du triangle et qu'elles passent par un même point, le point de Lemoine de ABC.

(*) M. Chapron nous a fait, de son côté, la même observation.

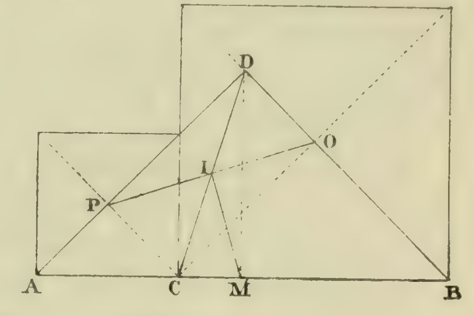
G. L.

QUESTION 201

Solution par M. Louis Prince, élève de mathématiques élémentaires au lycée de Grenoble.

Une droite AB *est partagée, par un point variable* M, *en deux segments additifs ou soustractifs; sur chacun des segments on décrit un carré; démontrer que la droite qui joint les centres des carrés enveloppe une parabole.* (A. Boutin.)

Soient P, O les centres des carrés construits sur les segments AC, CB; M le milieu de AB. Prolongeons AP, BO jusqu'à leur rencontre en D; traçons DC et PO qui se coupent en I. Le lieu de I est une droite, car I est le milieu de CD dans le rectangle CPDO. Or :



$$\widehat{PIC} = 2\widehat{PDC}$$

et $$\widehat{CIM} = 2\widehat{CDM}$$

$$\widehat{PIM} = \widehat{PIC} + \widehat{CIM} = 2(\widehat{PDM}) = 90^\circ.$$

On voit que le lieu des projections de M sur les droites PO est une droite; donc PO enveloppe une parabole, de foyer M, et dont la directrice est perpendiculaire en D à MD.

La démonstration subsiste pour les segments soustractifs; mais alors les carrés considérés doivent être situés : l'un, au-dessus; l'autre, au-dessous du segment AB.

Nota. — Solutions analogues par MM. G. Russo, à Catanzaro; Ignacio Beyens, à Cadix; J.-B. Perrin, professeur général à l'Ecole J.-B. Say; H. Martin (lycée Condorcet); J. Pangaut (institut Sainte Marie, à Besançon).

QUESTIONS PROPOSÉES

258. — Théorème (*). Etant donné un quadrilatère inscriptible ABCD, on en déduit deux autres, ABEF, ABGH, tels que ADH, AEC, AFG, BCG, BFD, BEH soient six lignes

(*) Généralisation de la *Question* 254, proposée par M. Mannheim.

droites. Cela posé : 1° Si l'un de ceux-ci est inscriptible, l'autre l'est également, et les côtés CD, EF, GH sont parallèles ; 2° si l'un des côtés EF, GH, est parallèle à CD, l'autre l'est également, et ABEF, ABGH sont inscriptibles.

Remarque. Dans l'hexagone DFECGH : 1° les côtés DF, GC, et la diagonale HE, concourent en un point B ; 2° les côtés CE, HD, et la diagonale GF, concourent en un point A ; 3° les côtés EF, GH sont parallèles à la diagonale CD (*).

(*E. Catalan.*)

259. — Par le centre O d'un cercle C on fait passer un cercle quelconque C′, de centre O′. On mène, au cercle C, une tangente qui coupe le cercle C′ aux points A et B. Démontrer que les secondes tangentes, menées des points A et B au cercle C, se coupent sur la ligne des centres OO′. (*D'Ocagne.*)

260. — Si les racines de l'équation du quatrième degré :

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

sont en progression arithmétique :

1° La raison r de la progression est donnée par la formule :

$$r = \pm \frac{1}{10}\sqrt{15a_1^2 - 40a_2}.$$

2° Les deux termes extrêmes sont les racines de l'équation :

$$40x^2 + 20a_1x - 11a_1^2 + 36a_2 = 0.$$

3° Les deux termes du milieu sont les racines de l'équation :

$$20x^2 + 10a_1x + a_1^2 + 4a_2 = 0.$$

(*G. Russo, à Catanzaro.*)

(*) Ce résultat s'accorde avec un théorème connu (*Mélanges mathématiques*, t. II, p. 250).

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16492-7.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

SUR QUELQUES CERCLES REMARQUABLES

(CERCLES DE NEUBERG ET DE M'CAY).

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 193).

13. Théorème VII. — *Dans les figures semblables* F_a, F_b, F_c, *construites sur* BC, CA, AB, *on peut trouver une infinité de systèmes de trois points homologues* J_a, J_b, J_c *en ligne droite; ces points décrivent trois circonférences* M_a, M_b, M_c ; *la droite* $J_aJ_bJ_c$ *tourne autour du centre de gravité* G *de* ABC (*).

Première Démonstration (J. Neuberg). — Soient

S_a le point double de F_b, F_c;
S_b — — F_c, F_a;
S_c — — F_a, F_b.

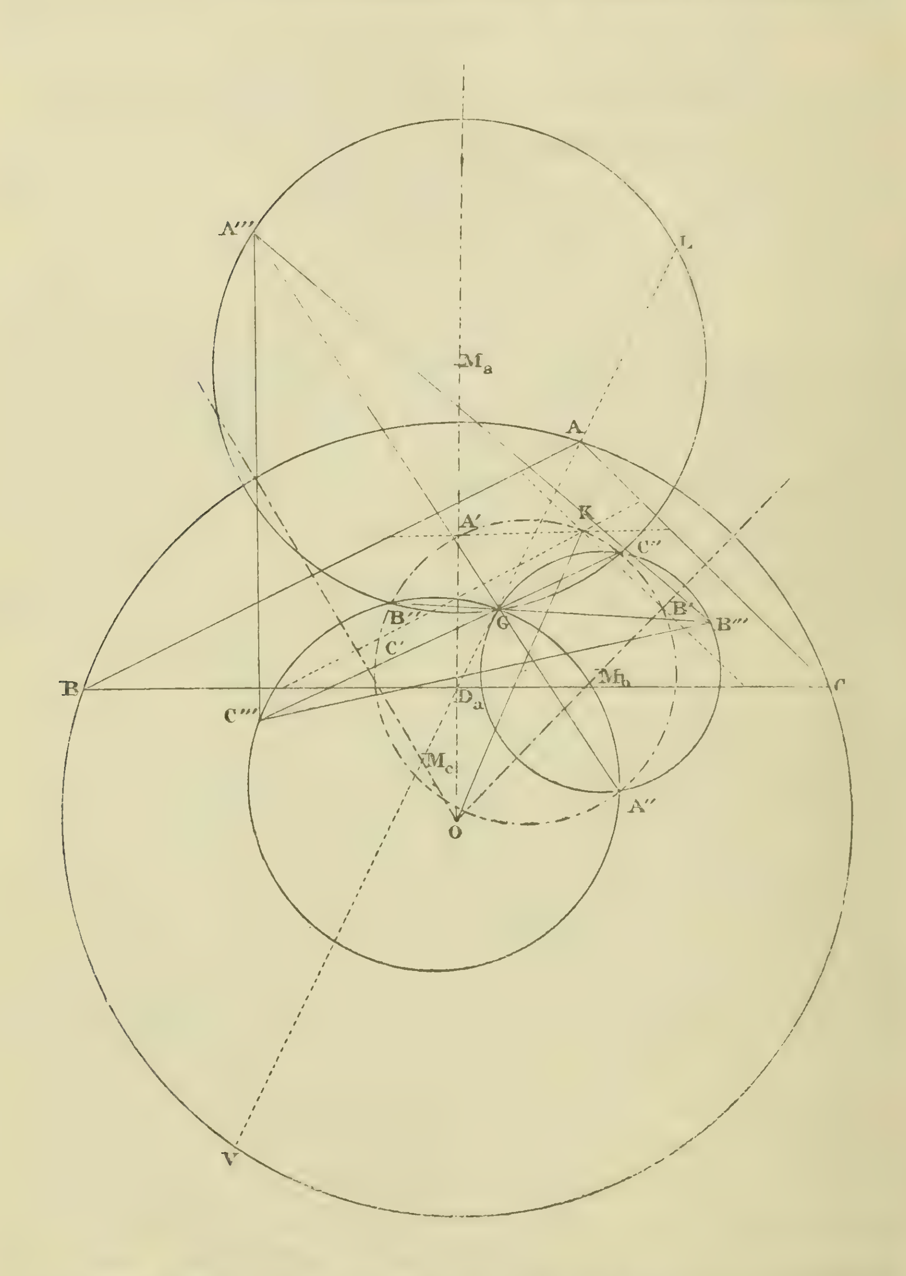
$S_aS_bS_c$ est le second triangle de Brocard.

Soient aussi $S\alpha\beta$, $S\beta\gamma$, $S\gamma\alpha$ les *triangles modulaires*.

Les triangles $J_aJ_bJ_c$, $J_bJ_cJ_a$ seront semblables à $\alpha\beta S$, $\beta\gamma S$; par conséquent l'angle $S_cJ_bS_a$ est égal à $\pi - \alpha\beta\gamma$. Donc le point J_b décrit une circonférence M_b passant par S_a, S_c. De même les points J_a, J_c décrivent des circonférences M_a, M_c passant par S_b, S_c et S_a, S_b. Ces circonférences se coupent en un point M parce que les angles des segments capables sont supplémentaires des trois angles du triangle $\alpha\beta\gamma$. L'angle $S_aJ_bJ_c$ étant constant, l'arc qu'il intercepte sur la circonférence M_b est constant; donc J_aJ_c passe par un point fixe du cercle M_b. Cette droite passe aussi par un point fixe des cercles M_a, M_c. Ces trois points fixes coïncident nécessairement avec le point commun aux trois cercles; sans quoi, la droite $J_aJ_bJ_c$ serait unique, ce qui est impossible.

(*) A cause de l'importance de cette proposition, nous en donnons plusieurs démonstrations différentes, dues à trois savants géomètres.

Ce point M, dans le cas où F_a, F_b, F_c sont construites sur ces côtés BC, CA, AB, coïncide avec le centre de gravité G.



Deuxième Démonstration (M'Cay). — Les trois points homologues J_a, J_b, J_c sont situés sur une même ligne droite L. Comme G est le centre de gravité de $J_aJ_bJ_c$, L passe nécessairement par G.

Si l'on considère L comme une droite de F_a, il lui correspond dans F_b une droite L′ passant par J_b et par G′ homologue de G considéré comme faisant partie de F_a. Mais l'angle de L et L′ est constant et égal à $\widehat{BCA}$, dont J_b est sur la circonférence du segment capable de l'angle C et décrit sur GG′.

De même si G″ et L″ sont dans F_c les homologues de G et L considérés dans F_a, on voit que J_c est sur la circonférence du segment capable de l'angle A décrit sur GG″ (*).

Le point S_a sera son propre homologue dans F_b, F_c et correspondra à un certain point S'_a de F_a. Les points S'_a, S_a, S_a forment donc un système de points homologues de F_a, F_b, F_c qu'on peut considérer comme positions particulières de J_a, J_b, J_c.

Concluons de là que les circonférences M_a, M_b, M_c lieux des points J_a, J_b, J_c passent respectivement par

M_a ... G, S'_a, S_b, S_c,
M_b ... G, S_a, S'_b, S_c,
M_c ... G, S_a, S_b, S'_c.

Les points S_a, S_b, S_c sont les projections de O sur les symédianes de ABC, ce sont les sommets du *second triangle de Brocard*. Les points S'_a, S'_b, S'_c sont les sommets du *troisième triangle de Brocard* (voir § 16).

Corollaire. — *Les axes radicaux du cercle de Brocard avec les cercles* M_a, M_b, M_c *de M'Cay sont les côtés du second triangle de Brocard.*

Troisième Démonstration (J. Casey). — Soient I_a, I_b, I_c trois points de F_a, F_b, F_c extrémités de trois cordes parallèles des cercles de Neuberg N_a, N_b, N_c. Soient aussi D_a, D_b, D_c les milieux des côtés de ABC. Divisons les droites D_aI_a, D_bI_b, D_cI_c aux points J_a, J_b, J_c dans le rapport 1 : 2. Les droites GJ_a, GJ_b, GJ_c seront respectivement parallèles à AI_a, BI_b, CI_c; donc elles se confondent.

(*) G, G′, G″ étant trois points homologues, G est leur centre de gravité; donc G′ et G″ sont symétriques par rapport à G.

14. Équations des cercles de M'Cay. — 1° *Coordonnées barycentriques.* Les coordonnées barycentriques de J_a et D_a étant respectivement

$$(\alpha, \beta, \gamma)\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

les coordonnées de I_a sont

$$(3\alpha, \quad 3\beta - 1, \quad 3\gamma - 1)$$

ou bien

$$(3\alpha, \quad -\alpha + 2\beta - \gamma, \quad -\alpha - \beta + 2\gamma).$$

En portant ces valeurs dans l'équation barycentrique du cercle N_a de Neuberg, on trouve l'équation du cercle M_a de M'Cay :

$$\sum a^2\beta\gamma - \frac{1}{3}\sum \alpha(2bc\cos A.\alpha + a^2\beta + a^2\gamma) = 0.$$

Les équations des cercles M_b, M_c sont analogues.

2° *Coordonnées cartésiennes.* — En prenant pour axes BC et la perpendiculaire élevée en son milieu, on trouve que le cercle M_a a pour équation

$$x^2 + y^2 - \frac{ay\cot\omega}{3} + \frac{a^2}{12} = 0.$$

On aurait de même les équations des deux autres cercles de M'Cay.

On voit immédiatement que :

Les cercles de Neuberg et de M'Cay ont leurs centres situés deux à deux sur les médiatrices du triangle (perpendiculaires aux milieux des côtés).

15. — Soient O le centre du cercle circonscrit à ABC et A'B'C' le premier triangle de Brocard, on a

$$OM_a = \frac{a\cot\omega}{6}, \qquad OA' = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\omega}{2}.$$

Donc
$$OM_a . OA' = \frac{a^2}{12},$$

c'est l'expression de la puissance du point O par rapport à M_a. Si donc, K est le point de Lemoine de ABC, on voit que A'K est la polaire de D_a par rapport à M_a et que A' est le pôle de BC par rapport à M_a, nous avons ainsi cette proposition :

Les sommets du premier triangle de Brocard sont respectivement, par rapport aux cercles de M'Cay, les pôles des côtés du triangle ABC.

16. Définition. — Si A″B″C″ est le *second triangle de Brocard*, les droites A″G, B″G, C″G coupent respectivement les cercles de M'Cay aux points A‴, B‴, C‴. Le triangle A‴B‴C‴ dont les côtés sont doubles de ceux A″B″C″ est appelé par M. Casey *(A Treatise...* p. 255) le *troisième triangle de Brocard.* Il est facile de voir que *les sommets du troisième triangle de Brocard sont les anti-complémentaires des sommets du second triangle de Brocard.* Ses sommets sont les points S'_a, S'_b,S'_c (voir § 13).

17. — Pour ne pas allonger démesurément cette note, nous énoncerons simplement, en terminant, quelques propriétés des cercles de M'Cay :

1° Si, par le centre de gravité, on mène une tangente à l'un des *cercles de M'Cay*, les cordes interceptées dans les deux autres cercles sont égales.

2° Le cercle M_a est le lieu des centres de gravité de tous les triangles décrits sur BC et ayant même *angle de Brocard* que le triangle donné.

3° Si la médiane D_aA coupe M_a en L et le cercle circonscrit en V, D_aL est égale à D_aV et L est la pied de la perpendiculaire abaissée de l'orthocentre sur la médiane D_aA.

4° Les droites joignant G au point le plus bas et au point le plus élevé de M_a sont les axes rectangulaires de l'ellipse maximum inscrite dans ABC.

5° *Les cercles de M'Cay* sont respectivement les figures inverses des côtés du *premier triangle de Brocard*, par rapport au cercle dont le centre est G et qui coupe orthogonalement *le cercle de Brocard.*

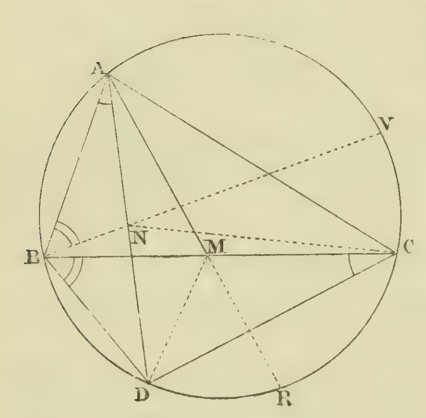
6° Les polaires des trois points homologues situés sur les côtés du triangle ABC, prises respectivement par rapport aux *cercles de M'Cay*, sont trois droites concourantes; le lieu du point de concours est le *cercle de Brocard* du triangle.

NOTE SUR LE QUADRILATÈRE HARMONIQUE

Par M. **Clément Thiry**, étudiant à la Faculté des Sciences de Gand.

Préliminaires. — Toutes les propriétés de la géométrie du triangle ont été généralisées successivement dans le quadrilatère (*), dans l'hexagone (**) et enfin dans les polygones (***). Mais pour que l'analogie avec le triangle soit aussi complète que possible, il faut prendre des figures remplissant des conditions particulières.

Pour le quadrilatère ABCD, dont il est seulement question ici, il faut qu'il soit inscriptible et qu'il existe dans son plan un point K (*point de Lemoine* du quadrilatère) tel que ses distances aux côtés soient proportionnelles à ces côtés. Il est facile de voir que pour que cette condition soit remplie il faut et il suffit que l'on ait :



$$AB.CD = AD.BC.$$

Le point K est alors déterminé par l'intersection des diagonales et la figure a reçu le nom de *Quadrilatère harmonique*.

Un quadrilatère harmonique est donc un quadrilatère ABCD, inscriptible, et tel que les rectangles des côtés opposés

(*) Voir : R. Tucker. — *Some properties of a quadrilateral in a circle, the rectangles under whose opposite sides are equal.* (Société Mathématique de Londres, 12 février 1885.) A la fin de ce mémoire, sont données les recherches de M. M'Cay.

J. Neuberg. — *Sur le quadrilatère harmonique.* (Mathésis 1885, pp. 202-269.)

(**) J. Casey. — *On the harmonic hexagon of a triangle.* (Royal Irish Academy, vol. IV, pp. 345-356, 26 janvier 1886.)

(***) G. Tarry. — *Sur les figures semblablement associées.* (Mathésis 1886, pp. 97, 148, 196.)

J. Casey. — A Sequel to Euclid, 1886 (*Theory of Harmonic Polygons*, pp. 199-222.)

soient égaux. Le théorème de Ptolémée prouve que la valeur commune à ces rectangles représente la moitié du rectangle des diagonales BC, AD.

D'après ce que nous venons de dire, *chaque diagonale est la symédiane des triangles ayant les extrémités de cette diagonale pour sommets et l'autre diagonale pour base*. L'existence du point K exige d'ailleurs que *les tangentes au cercle circonscrit, menées aux extrémités d'une diagonale se coupent sur l'autre diagonale.*

Voici maintenant quelques propriétés que nous croyons nouvelles

Pour abréger le discours, nous appellerons *médianes* du quadrilatère harmonique les quatre droites qui joignent les sommets A, B, C, D aux milieux M et N des diagonales BC, AD. Nous les représenterons par m_a, m_b, m_c, m_d.

1. — *Le produit de deux médianes opposées est égal au quart du carré de l'autre diagonale.*

Les deux triangles ABN, BDC sont semblables et donnent

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BN}{BD},$$

d'où
$$BN = \frac{AB.BD}{BC};$$

de même
$$CN = \frac{AC.CD}{BC},$$

d'où
$$BN.CN = \frac{abcd}{\overline{BC}^2}.$$

Mais
$$\overline{AD}^2.\overline{BC}^2 = 4abcd,$$

donc
$$BN.CN = m_b m_c = \frac{\overline{AD}^2}{4}.$$

2. — *Le produit des côtés est égal à quatre fois le produit des médianes.*

On a
$$m_b m_c = \frac{\overline{AD}^2}{4},$$

$$m_a m_d = \frac{\overline{BC}^2}{4},$$

$$\frac{AE}{AM} = \frac{2bc}{b^2 + c^2},$$

d'ou $$m_a m_b m_c m_d = \frac{\overline{AD}^2 . \overline{BC}^2}{16} = \frac{abcd}{4}.$$

3. — *Le carré d'un côté quelconque est égal au double rectangle des médianes issues des extrémités de ce côté.*

Deux triangles semblables donnent immédiatement

$$AB.AC = AD.m_a,$$
$$AB.BD = BC.m_b.$$

On en déduit

$$\overline{AB}^2.AC.BD = AD.BC.m_a m_b,$$

mais $$2AC.BD = AD.BC,$$

donc $$\overline{AB}^2 = 2m_a m_b.$$

4. — *La somme des carrés des côtés est égal au double rectangle de deux médianes issues des extrémités d'un côté quelconque et terminées au cercle circonscrit.*

Nous avons

$$\overline{AB}^2 = 2AM.BN, \qquad \overline{AC}^2 = 2AM.CN,$$
$$\overline{CD}^2 = 2CN.DM, \qquad \overline{DB}^2 = 2DM.BN,$$

d'où $$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(AM + MD)(BN + CN).$$

Mais R et V étant les points où AM et BN rencontrent le cercle circonscrit, on sait que $MR = MD$, $NV = NC$; donc

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2AR.BV.$$

Corollaire. — *Le rectangle de deux médianes issues des extrémités d'un côté quelconque et terminées au cercle circonscrit, est constant.*

5. — *La somme des inverses des carrés des côtés est égale à deux fois l'inverse de la puissance du point de Lemoine par rapport au cercle circonscrit* (*).

On a $$bc = AD.AM;$$

mais, E étant le point de Lemoine du quadrilatère,

(*) Ce théorème m'a été communiqué par mon ami, M. Antoine Gob, élève à l'école normale des sciences de Gand, qui le démontre différemment.

donc $$bc = \frac{AD.AE(b^2 + c^2)}{2bc},$$

ou $$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{2}{AD.AE};$$

de même $$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2} = \frac{2}{DA.DE},$$

donc

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = \frac{2}{DA}\left(\frac{1}{AE} + \frac{1}{DE}\right) = \frac{2}{AE.ED}.$$

VARIÉTÉS

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. G. de Longchamps.

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 196).

40. La solution de Schooten (*). — Les solutions précédentes nécessitent l'emploi de l'équerre, ou tout au moins celui de la fausse équerre; celle que nous allons indiquer maintenant, d'après Schooten, n'exige que des alignements.

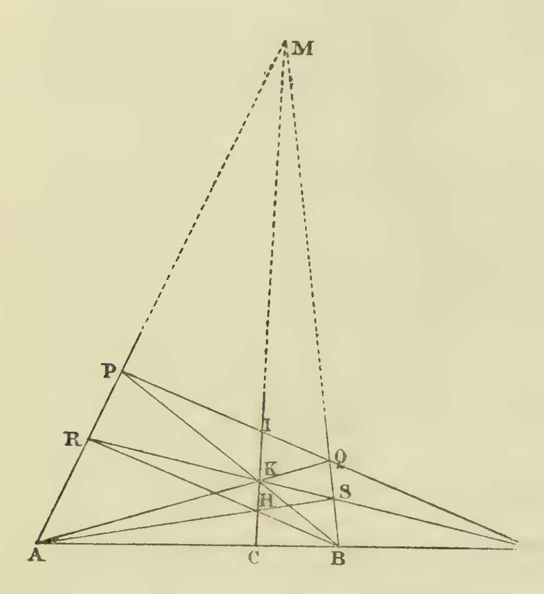
Cette solution repose sur la propriété des diagonales d'un quadrilatère complet qui se coupent en déterminant,

(*) SCHOOTEN, *loc. cit.* p. 160-162.

Cette solution de Schooten a été retrouvée par Carnot dans son ouvrage sur *la Corrélation des Figures* (Duprat, libraire pour les mathématiques, an IX, § 191, p. 135), et donnée, sous son nom, dans l'ouvrage de Servois (p. 58). Mais elle est, comme on le voit, bien antérieure à Carnot et, probablement, à Schooten lui-même.

Je profite de l'occasion que me fournit ici le nom de Carnot pour réparer l'oubli commis par moi, lorsque j'ai écrit l'introduction du présent ouvrage, en ne citant pas la *Corrélation des Figures*, la *Géométrie de position* et l'*Essai sur la théorie des transversales*, parmi les importantes publications qui intéressent la Géométrie de la Règle. On trouvera d'ailleurs, au chapitre suivant, la solution même de Carnot.

mutuellement, sur chacune d'elles, une ponctuelle harmonique.



Ayant effectué, dans la partie accessible du terrain, la construction indiquée sur la figure, laquelle ne demande que l'emploi du jalon, le théorème auquel nous venons de faire allusion donne

$$\frac{1}{CM} = \frac{1}{CK} - \frac{2}{CI}.$$

On utilisera la table des inverses pour le calcul de la longueur CM donnée par cette formule. Il faut, il est vrai, doubler le nombre qui, dans la table en question, est écrit en regard du nombre CI. Mais cette multiplication se fait sans effort et elle ne constitue pas une dérogation sensible aux conclusions que nous avons formulées plus haut, quand nous avons cherché à mettre en lumière les avantages qui ressortent de l'emploi de la table aux inverses.

41. La solution de Mascheroni. — Mascheroni, dans ses *Problèmes de Géométrie pratique* (*), etc., présente quinze solutions du problème qu'il énonce dans ces termes : *mesurer la droite* OM *dont on ne peut approcher qu'au point* O; mais, de ces solutions diverses, celle qui est certainement la plus pratique repose sur le théorème de Ménélaüs.

Si l'on considère le triangle OBC et la transversale ADM, on a

$$\frac{OA}{AB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{MC}{MO} = 1;$$

(*) *Loc. cit.;* édition de Bachelier, 1838 : livre premier, problème II ; p. 15.

d'où, en remplaçant MC par OM — OC,

$$OM = \frac{OA.OC.DB}{OA.DB - AB.DC}.$$

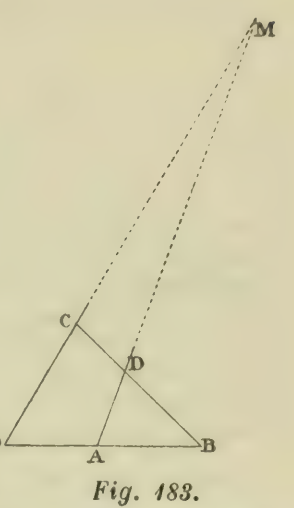


Fig. 183.

On peut simplifier notablement cette solution, et Mascheroni en a fait la remarque, en supposant : A au milieu de OB; ou, dans une autre hypothèse, D au milieu de CB.

Le théorème de Gergonne fournirait une solution analogue. Cette solution, et aussi celle de Mascheroni, ne sont pas sans intérêt, même au point de vue pratique, parce qu'elles n'exigent, comme celle de Schooten, que des jalonnements et l'usage d'un simple ruban, divisé en mètres.

42. La solution de l'équerre. — Imaginons que l'on jalonne une droite Δ dans une direction arbitraire, mais non perpendiculaire à OM ; puis, déterminons avec l'équerre la projection de M sur Δ et, du point A, ainsi obtenu, abaissons une perpendiculaire AB sur OM. Nous avons

$$OM = \frac{\overline{OA}^2}{OB},$$

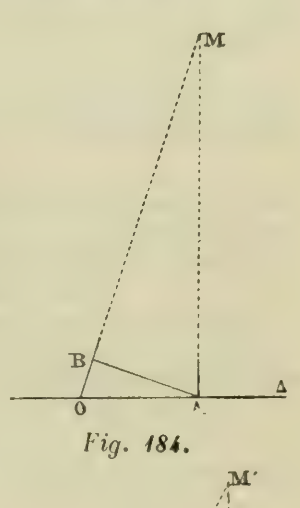


Fig. 184.

et cette égalité permet, assez commodément, le calcul de OM ; celui-ci n'exigeant, finalement, qu'une multiplication et une division.

On peut modifier cette solution comme l'indique la *fig.* 185 dans laquelle le triangle rectangle B'A'M' donne

$$O'M' = \frac{\overline{O'A'}^2}{O'B'}.$$

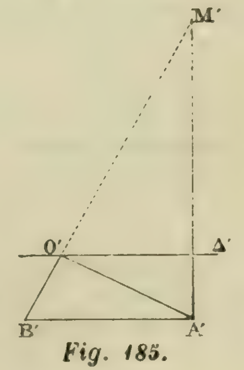


Fig. 185.

Dans cette construction, on suppose, bien entendu, O'A' perpendiculaire sur B'M'.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL
(AVRIL 1887)

POITIERS

Mathématiques.

Première série. — Relations fondamentales entre les lignes trigonométriques d'un même arc (énoncés et démonstrations).

Application : on donne tg x, et on demande de calculer sin x, cos x, coséc x, céc x et cotg x.

— Construire un triangle, connaissant le rayon du cercle circonscrit, un côté, et le côté du carré dont la surface est équivalente à la surface du triangle.

Deuxième série. — Composition des forces concourantes.

— Trouver une fraction équivalente à $\frac{3}{5}$ et dont la somme des carrés des termes est 306.

CHAMBÉRY

Étant donné un angle droit AOB et un point M dont les distances aux deux côtés de l'angle droit sont connues, mener par le point M une droite qui forme avec les deux côtés de l'angle droit un triangle de surface donnée m^2.

— Démontrer que les forces en nombre quelconque appliquées à un corps solide peuvent être réduites à deux forces, dont l'une passe par un point donné.

GRENOBLE

— Trouver, en direction et en grandeur, la résultante de deux forces concourantes.

— Étant donnée l'équation

$$x^2 + 2(2m - 1)x + 3m^2 + 5 = 0,$$

1° Déterminer entre quelles limites doit être compris m pour que ses racines soient réelles ; 2° Examiner si le nombre $+1$ peut être compris entre les racines de cette équation ; 3° Calculer, en fonction de m, l'expression

$$\frac{x'^2}{x''^2} + \frac{x''^2}{x'^2}$$

où x' et x'' représentent les deux racines de l'équation proposée.

CLERMONT

Mathématiques.

Première série. — Résoudre le système d'équations :

$$x + y + xy = 5,$$

$$x + y = \frac{6}{xy}.$$

— On fait tourner un carre ABCD autour d'un axe AE passant par son sommet A ; — Déterminer l'angle x de la diagonale AC avec l'axe AE, de telle sorte que le volume engendré par le carré soit dans un

rapport donné m avec le volume qu'engendrerait ce carré tournant autour d'un de ses côtés.

Application : $m = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Deuxième série. — Établir les conditions d'équilibre d'un levier soumis à deux forces.

— Dans un triangle ABC on donne les deux côtés b, c et la médiane m opposée au troisième côté. — Déterminer l'angle BAC = A : 1° géométriquement, 2° par le calcul.

Application : $b = 20^m$, $c = 15^m$, $m = 12^m$.

QUESTION 171 *(suite)*

CENTRE DES PARALLÈLES ÉGALES ET POINTS DE JERABEK

Solution et développements par M. E. VIGARIÉ.

II. — Points de Jérabek.

Le problème I (§ 1) peut être interprété différemment, comme l'a fait M. Jérabek, et l'on peut se proposer la question suivante :

5. Problème II. — *Trouver, dans le plan du triangle* ABC, *un point* J″ *tel que si l'on mène*

$J''B_\alpha$ *parallèle à* AC *et limité à* AB

$J''C_\beta$ — AB — BC

$J''A_\gamma$ — BC — CA

on ait : $J''B_\alpha = J''C_\beta = J''C_\gamma = l''$.

Désignons par δ''_α, δ''_β, δ''_γ les distances de J″ aux côtés de ABC et par α'', β'', γ'' ses coordonnées barycentriques on a :

$$\delta''_\alpha = l'' \sin B, \qquad \delta''_\beta = l'' \sin C, \qquad \delta''_\gamma = l'' \sin A,$$

ou $\alpha'' : \beta'' : \gamma'' = a\delta''_\alpha : b\delta''_\beta : c\delta''_\gamma = ab : bc : ca = \frac{1}{c} : \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$,

ce qui montre que J″ *est le deuxième Brocardien du centre du cercle inscrit.* Ce point ayant été découvert par M. Jérabek, nous dirons en adoptant la terminologie proposée par M. Lemoine (*) que :

J″ *est le point direct de Jérabek.*

(*) A. F. Grenoble, 1885.

6. Relations métriques. — *Valeur de* l″. On a :

$$a\delta''_\alpha + b\delta''_\beta + c\delta''_\gamma = l''(a \sin B + b \sin C + c \sin A) = 2S,$$

ou

$$l'' = \frac{2S}{a \sin B + b \sin C + c \sin A} = \frac{abc}{ab + bc + ca},$$

on a en outre :

$$\frac{1}{l''} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Coordonnées de J″. Les coordonnées barycentriques de J″ sont, d'après ce qui précède, proportionnelles à

$$\frac{1}{c}, \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}.$$

7. — Il existe un second point J′ tel que si on mène

$J'A'_\beta$	est parallèle à	BC	et limité à	AB
$J'B'_\gamma$	—	AC	—	BC
$J'C'_\alpha$	—	AB	—	AC

on ait : $J'A'_\beta = J'B'_\gamma = J'C'_\alpha = l''.$

Ce point dont les coordonnées barycentriques sont proportionnelles à

$$\frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{a}$$

est le *premier point Brocardien du centre du cercle inscrit*, nous dirons donc que :

J′ *est le point rétrograde de Jérabek.*

8. Construction des points J′ **et** J″. — On peut employer la méthode générale qui sert à construire les points Brocardiens correspondant à un point donné (*) ou employer le procédé suivant (Neuberg et Jérabek, 3) :

Prenons sur les côtés AB, BC, CA de ABC, les longueurs égales BM = CN = AP, et menons par M, N, P, des paral-

(*) E. Lemoine. *A. F., Grenoble*, 1885. — *N. A. M.*, 1885, p. 202. — *A. F., La Rochelle*, 1882, p. 125 ; c'est la construction indiquée dans ce dernier mémoire qui a donné l'idée à M. Lemoine de déduire les *points de Brocard* du *point Lemoine* et de généraliser ensuite pour tout point du plan, ce qui a donné les *points Brocardiens*.

G. de Longchamps. *J. E.*, 1886, pp. 229-231.

lèles à BC, CA, AB; ces droites forment un second triangle $\alpha''\beta''\gamma''$. Les droites $A\alpha''$, $B\beta''$, $C\gamma''$ concourent au point J''.

Si par M, N, P on mène des parallèles à CA, AB, BC, on obtient un triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ tel que les droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ concourent au point J'.

9. Points algébriquement associés à J'' et J'. — Les points J''_α, J''_β, J''_γ; J'_α, J'_β, J'_γ algébriquement associés à J'' et J' résolvent le problème II.

Les longueurs communes l''_α, l''_β, l''_γ; l'_α, l'_β, l'_γ des parallèles menées par ces points ont pour valeur

$$l''_\alpha = \frac{abc}{ab - ac + bc} \quad l''_\beta = \frac{abc}{-ab + ac + cb} \quad l''_\gamma = \frac{abc}{ab - bc + ac}.$$

$$l'_\alpha = \frac{abc}{-ab + ac - bc} \quad l'_\beta = \frac{abc}{ab - bc + ac} \quad l'_\gamma = \frac{abc}{ab - ac + bc}.$$

Donc $\quad l'_\alpha = l''_\beta, \qquad l'_\beta = l''_\gamma, \qquad l'_\gamma = l''_\alpha.$

ce qui donne la relation :

$$\frac{1}{l''} + \frac{1}{l''_\alpha} + \frac{1}{l''_\beta} + \frac{1}{l''_\gamma} = \frac{1}{l'_\alpha} + \frac{1}{l'_\beta} + \frac{1}{l'_\gamma}.$$

10. — De la connaissance des points de Jérabek on peut déduire une construction du *centre des parallèles égales* comme l'a fait M. Neuberg.

En effet, on voit que les coordonnées barycentriques de J'' et J' sont proportionnelles à :

$$\frac{1}{c}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}; \qquad \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}.$$

Le point I_0 dont les coordonnées sont proportionnelles à :

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$$

est d'après ce qui précède, le *centre des parallèles égales* du triangle $A_1B_1C_1$ dont les sommets sont les milieux des côtés de ABC, donc I_0 est le complémentaire de P (§ 4); on aura donc P en prenant le symétrique de I_0 par rapport au milieu de $J''J'$ (*), ou bien X étant le milieu de $J''J'$ en prolongeant I_0G d'une longueur $XP = 3GX$.

(*) Le texte de Mathésis (1881, p. 192 lignes 4 et 5 en remontant) portait par erreur : Symétrique de G par rapport au milieu de $J''J'$.

Comme il est facile de le voir par leurs coordonnées barycentriques, les trois points I_0, J'', J' forment un *groupe isobarique*, donc :

Les deux triangles ABC, $I_0J''J'$ *ont même centre de gravité* G.

11. — Points réciproques de J'' et J'. — Les points J'' et J' étant *les Brocardiens* du centre du cercle inscrit, les points J''_0 et J'_0 réciproques de J'' et J' seront les *points isobariques* du centre du cercle inscrit I. Les coordonnées de I étant proportionnelles à a, b, c, celles de J''_0 et J'_0 seront pro portionnelles à

$$c,\ a,\ b \qquad \text{et à} \qquad b,\ c,\ a.$$

Donc

Les deux triangles ABC, IJ''_0, J'_0 *ont même centre de gravité.*

La droite J''_0, J'_0 qui a pour équation

$$\Sigma\alpha(bc - a^2) = 0$$

donne la direction du point situé à l'infini associé à I (de Longchamps, 10) (**).

QUESTION 146

Solution par J. Chapron, à Bragelogne.

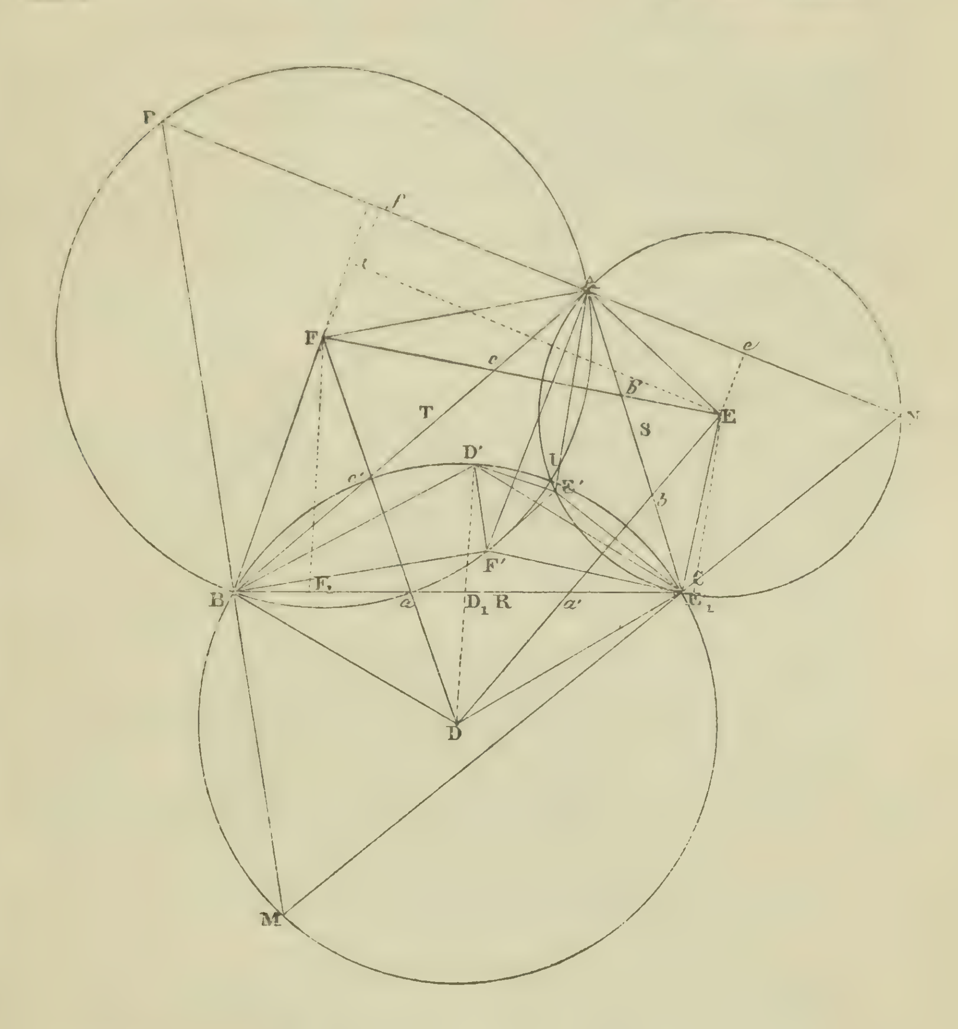
Sur les côtés d'un triangle, on construit, intérieurement et extérieurement, des triangles isoscèles semblables ayant un angle au sommet de 120°. Démontrer : 1° que les sommets des triangles intérieurs et ceux des triangles extérieurs forment deux triangles équilatéraux ayant pour centre commun le point de concours des médianes du triangle donné; 2° que les cercles circonscrits à ces deux triangles constituent le lieu des centres de tous les triangles équilatéraux circonscrits au triangle donné.

Exprimer en fonction des éléments de ce dernier triangle les rayons des deux cercles; calculer le côté et la surface du triangle équilatéral circonscrit maximum. (J. Kœhler.)

(**) *J. E.*, 1886, p. 132, ligne 12 en remontant, *il faut lire :* dont les réciproques ont été étudiées par M. Jérabek.

Nota. — Nous avons reçu, pour cette question, des solutions diverses de MM. Rogier, Chapron et Boutin.

Soient DEF, D'E'F' les deux triangles fermés par les sommets des triangles isocèles extérieurs au triangle donné ABC.



1° Calculons $\overline{DF}^2$:

$$\overline{DF}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD.BF \cos(A + 60).$$

$$BF = \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad BD = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$\cos(B + 60) = \frac{1}{2}\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \sin B = \frac{4S}{2ac},$$

$$\cos(B+60) = \frac{a^2+c^2-b^2-4S\sqrt{3}}{6};$$

d'où

$$\overline{DF}^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}}{6}.$$

Cette expression est symétrique par rapport à a, b, c; on trouvera donc la même valeur pour DE et EF. Ainsi le triangle DEF est équilatéral.

L'expression de D'F' ne diffère de celle de DF que par le signe de sin B ou de S; par suite le triangle D'E'F' a ses côtés égaux.

Quel que soit l'angle au sommet des triangles isocèles semblables considérés, le triangle DEF à le même centre de gravité que ABC.

Appelons φ l'angle à la base de ces triangles; calculons les distances des sommets D, E, F au côté BC; si DD_1, EE_1, FF_1 sont ces distances, nous avons :

$$DD_1 = BB_1 \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$EE_1 = CE\sin(C+\varphi) = \frac{b}{2}\cdot\frac{\sin(\varphi+C)}{\cos\varphi},$$

$$FF_1 = BF\sin(B+\varphi) = \frac{c}{2}\cdot\frac{\sin(B+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

$$EE_1 + FF_1 - DD_1 = \frac{b\sin(C+\varphi)+c+\sin(B-\varphi)-a\sin\varphi}{2\cos\varphi}$$

$$= \frac{(b\sin C + c\sin B)\cos\varphi + (b\cos C + \cos B - a)\sin\varphi}{2\cos\varphi}.$$

Mais, si h désigne la hauteur de ABC issue de A, on a

$$b\sin C = c\sin B = h, \qquad b\cos C + c\cos B = a,$$

donc

$$EE_1 + FF_1 - DD_1 = h.$$

Ainsi, la somme algébrique de ces distances égale trois fois la distance du centre de gravité au côté BC. Un calcul semblable montrerait que la somme des distances de D, E, F au côté AC égale la hauteur du triangle ABC partant de B. Donc le centre de gravité du triangle DEF se confond avec celui du triangle ABC.

Un calcul analogue établirait la proposition pour le triangle D'E'F'.

2° Dans le triangle équilatéral MNP circonscrit à ABC, la hauteur partant de P est bissectrice de l'angle P et passe, par conséquent, par F' milieu de l'arc AF'B; de même, NE' est la hauteur issue de N; comme ces hauteurs font un angle de 60° et passent par deux points fixes, le lieu de leur point d'intersection est le segment capable de 60° décrit sur E'F'; ce segment passe par D'; en considérant la troisième hauteur, on verrait que le segment D'F'E' fait partie du lieu, qui se trouve ainsi constitué par la circonférence D'E'F'.

Remarquons que les arcs ABF', ACE', BD'C se coupent en un même point I d'où l'on voit les côtés de ABC sous un angle de 120°. Or

$$\widehat{D'IF'} = \widehat{D'IB} + \widehat{BIF'} = BAF' + BCE' = 30° + 30° = 60°;$$

la circonférence D'E'F' contient le point I.

Si, pour trouver un triangle MNP circonscrit à ABC, nous avions placé les segments capables de 60°, de l'autre côté de AB, BC, CA, nous eussions obtenu un autre triangle, et, en répétant les raisonnements faits plus haut, on verrait que le lieu des centres du nouveau système de triangles est la circonférence DEF. On peut aussi observer que les segments se coupent en un point I' d'où l'on voit deux des côtés de ABC sous un angle de 60° et le troisième sous un angle de 120°; ce point est situé sur le cercle DEF.

3° Si R, r sont les rayons de ces cercles, on a

$$R^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \overline{DF}^2 = \frac{1}{3} \overline{DF}^2,$$

$$r^2 = \frac{1}{3} \overline{D'F'}^2,$$

d'où, par application des formules obtenues plus haut,

$$R^2 + r^2 = \frac{1}{3} (\overline{DF}^2 + \overline{D'F'}^2) = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2).$$

Ainsi, le triple de la somme des carrés des rayons équivaut à la somme des carrés des côtés de ABC.

Cherchons le maximum de la sécante PAN; si l'on abaisse des centres EF, les perpendiculaires Ee, Ff sur cette sécante, le segment ef = Ei en sera la moitié; or, dans le triangle rectangle EFi, le côté Ei est plus petit que l'hypoténuse EF.

Le maximum a lieu quand cette sécante est parallèle à EF. Ainsi le triangle circonscrit, de plus grand périmètre, a ses côtés parallèles à ceux de DEF.

Dans le second système de triangles, le triangle maximum serait homothétique au triangle D′E′F′.

Comme les côtés de ces triangles maximum sont les doubles des longueurs DF, D′F′ calculés précédemment, on aurait facilement leur surface.

Remarque I. — Les droites AD, BE, CF sont concourantes et, par suite, les triangles ABC, DEF sont homologiques (quel que soit l'angle à la base des triangles isoscèles semblables).

Si R, S, T sont les points d'intersection des droites AD, BE, CF avec les côtés de ABC, il suffit de vérifier que $\frac{RB}{RC} \cdot \frac{SC}{SA} \cdot \frac{TA}{TB} = -1$. Les segments RB et RC, SC et SA, TA et TB sont entre eux comme les triangles ABD et ACD, BCE et ABE, ACF et BCF. Mais de la similitude des triangles BDC, BAF il résulte que $\frac{BD}{BC} = \frac{BF}{BA}$ ou BA.BD = BC.BF et comme les angles ABD, CBE sont égaux, il s'ensuit que les triangles ABD, BCF sont équivalents. Ainsi, les triangles qui entrent dans la relation sont équivalents deux à deux, et il devient facile de s'assurer qu'elle existe bien.

Par une démonstration semblable, on verrait que les triangles ABC, D′E′F′ sont homologiques (quel que soit l'angle à la base des triangles isoscèles).

Remarque II. — A, B, C, D, E, F sont donc les sommets d'un hexagone de Brianchon; de même A, B, C, D′, E′, F′.

Enfin, si a, a', b et b', c et c' sont les points de rencontre des côtés de ABC et de DEF, comme les côtés opposés de l'hexagone $aa'bb'cc'$ se coupent en trois points en ligne droite (puisque ABC et DEF sont homologiques), cet hexagone est inscrit dans une conique.

De même, les points de rencontre des côtés de ABC et D′E′F′ sont les sommets d'un hexagone de Pascal.

QUESTION 198

Solution par X.

Si on considère les trois ellipses qui ont pour foyers deux des sommets d'un triangle et passent par le troisième :

1° La somme des grands axes est égale au double du périmètre du triangle.

2° La sommes des carrés des demi-petits axes est égale au carré du demi-périmètre du triangle.

3° Le produit des trois demi-petits axes est égal au produit de la surface du triangle par son demi-périmètre.

4° Si on ne considère que les demi-ellipses déterminées par leur grand axe et le troisième sommet du triangle ABC, *elles se coupent en trois points qui, joints aux sommets voisins du triangle, donnent un hexagone tel que la somme de trois côtés non consécutifs est égale à la somme des trois autres.*

(Boutin.)

1° Soient α, β, γ les côtés du triangle ; a, a', a'', b, b', b'' les demi-axes des ellipses correspondantes. On a

$$2a = \beta + \gamma; \qquad 2a' = \gamma + \alpha; \qquad 2a'' = \alpha + \beta$$

d'où

$$2a + 2a' + 2a'' = 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

2° $4b^2 = (\beta + \gamma)^2 - \alpha^2$; $4b'^2 = (\gamma + \alpha)^2 - \beta^2$; $4b''^2 = (\alpha + \beta)^2 - \gamma^2$

d'où

$$b^2 + b'^2 + b''^2 = \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right)^2.$$

3° $$b^2 = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)}{2}\frac{(\beta + \gamma - \alpha)}{2} = p(p - \alpha)$$

de même

$$b'^2 = p(p - \beta) \qquad b''^2 = p(p - \gamma)$$

d'où

$$bb'b'' = p\sqrt{p(p - \alpha)(p - \beta)(p - \gamma)}.$$

4° Soit M le point d'intersection des demi-ellipses qui ont leurs axes suivant AB et BC

$$\text{MC} + \text{MB} = \beta + \gamma; \qquad \text{MA} + \text{MB} = \beta + \alpha$$

d'où
$$MA - MC = \alpha - \gamma$$
N et P étant les deux autres points d'intersection considérés, on a
$$NC - NB = \gamma - \beta,$$
$$PB - PA = \beta - \alpha,$$
d'où
$$MA + NC + PB = MC + NB + PA.$$

Autres solutions par MM. Osmin Pommès, élève de 5e année au collège de Condom; Achille Ménétrier, élève au collège de Châlons-s-S.; Louis Prince, élève au lycée de Grenoble; G. Bourdier, id.; A. Rodriguez, élève de mathématiques spéciales du professeur Ignacio Beyens; J. Chapron; Henri Martin, élève au lycée Condorcet; Paul Bourgarel, à Antibes.

M. L. Prince observe que les hyperboles qui ont pour foyers deux des sommets du triangle et qui passent par le troisième sommet, passent aussi respectivement par les points M, N, P.

QUESTION 207

Solution par X...

Résoudre les équations
$$a(xy + yz + xz) = xyz \qquad (1)$$
$$x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 = 2xyz(x + y + z) \qquad (2)$$
$$a(x + y + z)^2 = 4xyz \qquad (3)$$
Posons pour simplifier
$$x + y + z = A,$$
$$xy + xz + yz = B,$$
$$xyz = C.$$
Le système proposé devient
$$aB = C$$
$$B^2 = 4AC$$
$$aA^2 = 4C$$
Éliminant C il vient
$$B^2 = 4aAB$$
$$A^2 = 4B$$
Résolvant ce système, abstraction faite de la valeur zéro, on voit que A, B, C admettent respectivement les valeurs $16a$, $64a^2$, $64a^3$, x, y, z sont donc les racines de l'équation
$$X^3 - 16aX^2 + 64a^2X - 64a^3 = 0.$$

Cette équation a pour racines

$$X_1 = + 4a$$
$$X_2 = + a(\sqrt{5} - 1)^2$$
$$X_3 = + a(\sqrt{5} - 1)^2, \text{ etc.}$$

Nota. — Solutions analogues par MM. Henri Martin, lycée Condorcet; Louis Prince, lycée de Grenoble; A. Boutin, professeur au collège de Vire; L'abbé E. Gelin, professeur au collège de Saint-Quirin, à Huy (Belgique); Miniur, Ecole normale des sciences à Gand; Joseph Pangaut, institut Sainte-Marie, à Besançon; Ignacio Beyens, à Cadix; J. Chapron, à Bragelogne.

M. Chapron prend, pour inconnues, les quantités $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, abstraction faite, bien entendu, de la solution nulle, qui est évidente. On tombe ainsi, directement, sur une équation du troisième degré, quadratique; c'est-à-dire, décomposable en deux facteurs rationnels.

QUESTIONS PROPOSÉES

261. — Si l'on mène par les trois sommets d'un triangle des droites faisant avec un axe quelconque du plan de ce triangle des angles égaux et de sens contraire, respectivement, à ceux que font les hauteurs avec cet axe, les trois droites ainsi menées concourent en un même point, et ce point est situé sur le cercle circonscrit au triangle.

Existe-t-il trois droites concourantes, respectivement issues des sommets du triangle, autres que les hauteurs, et telles que les droites analogues à celles de l'énoncé précédent soient également concourantes? *(d'Ocagne.)*

262. — Étant donnée une parabole de foyer F, on considère la perpendiculaire à l'axe passant par le foyer et coupant la courbe en A et B; par ces points on mène des parallèles à l'axe $\Delta\Delta'$.

Soit M un point quelconque de la courbe; AM, BM coupent $\Delta\Delta'$ en K et H et HK rencontre AB en I. Enfin on projette M en C sur AB.

Démontrer que :

1° $BK + AH =$ constante;

2° HK passe par un point fixe D;

3° Le cercle DIC est tangent à l'axe en un point fixe;

4° Les cercles qui ont leurs centres sur HK et passant par HC, IC sont orthogonaux;

5° Leur axe radical passe par un point fixe;

6° Cet axe radical, MF et HK concourent au même point;

7° HK est parallèle à la tangente en M;

8° CM coupe le cercle AMB en un point dont le lieu est une droite. *(L. Prince, élève au Lycée de Grenoble.)*

263. — Dans le triangle rectangle ABC, on abaisse la perpendiculaire AD sur l'hypoténuse BC, et par le point milieu P de BC on élève la perpendiculaire PEF; E et F étant les rencontres de cette perpendiculaire avec les côtés AC et AB. Si l'on désigne par h la hauteur AD, par r_1, r_2, ρ_1, ρ_2 les rayons des cercles inscrits dans les triangles ABD, ADC, BPF, EPC, et par r, R les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC; montrer que l'on a :

$$r_1\rho_1 = r_2\rho_2 = \frac{r^2}{2}; \quad \frac{r_1}{\rho_1} + \frac{r_2}{\rho_2} = 2; \quad R^2 r_1 r_2 = h^2\rho_1\rho_2.$$

(G. Russo.)

264. — En posant, comme d'habitude,

$$C_{n,p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p},$$

démontrer que

$$2C_{n,p} + (4n+9)C_{n,p-1} + (2n+5)C_{n,p-2} = \mathfrak{M}(2p+1)$$

(E. Catalan.)

Nota. — On vérifiera, en même temps, que le nombre considéré est aussi : 1° un multiple de $n+1$, 2° un multiple de $2n-p+4$.

G. L.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 19606-7.

Nous avons eu la douleur d'apprendre, depuis la publication du dernier numéro, la mort de M. J. Bourget qui créa en 1877 le Journal de Mathématiques Élémentaires. La vie administrative, très occupée, que menait M. Bourget, ne lui a pas permis, depuis 1878, de prendre, à sa rédaction, une part active ; néanmoins, il s'y intéressait toujours très vivement.

Nos lecteurs trouveront, à la première page du numéro de novembre du Journal de Mathématiques Élémentaires, quelques lignes que M. L. Lévy a consacrées au souvenir du fondateur de ce Journal. Une notice plus complète, rappelant les titres scientifiques de M. J. Bourget, sera publiée prochainement.

G. L.

CONDITION POUR QU'UN POINT SOIT EXTÉRIEUR A UNE CONIQUE

Par M. **Étienne Pomey.**

Définition. — *Un point* P *est extérieur à une conique, lorsque les tangentes issues de ce point sont réelles et distinctes.*

Soient x et y les coordonnées du point P, par rapport à des axes faisant un angle θ, et

$$f(X, Y) \equiv AX^2 + 2B''XY + A'Y^2 + 2B'X + 2BY + A''$$

le premier membre de l'équation de la conique. Nous poserons

$$\varphi(X, Y) \equiv AX^2 + 2B''XY + A'Y^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B'' & f'_x \\ B'' & A' & f'_y \\ f'_x & f'_y & f(x, y) \end{vmatrix}$$

$$H = A + A' - 2B''\cos\theta.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point soit extérieur à une conique, peut s'établir de bien des façons

diverses; nous résumons, dans cette Note, celles qui nous paraissent les plus simples.

Nous donnons d'abord cinq démonstrations, dans lesquelles on n'a pas besoin de préciser le genre de la conique.

Première Démonstration. — En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, au point P, on a

$$f(X, Y) \equiv \varphi(x, y) + x'f'_x + y'f'_y + f(x, y). \qquad (1)$$

L'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues de P est

$$4f(x, y)\varphi(1, m) - (f'_x + mf'_y)^2 = . \qquad (2)$$

Pour que ces tangentes soient réelles et distinctes, il faut et il suffit que l'on ait

$$[A'f(x, y) - f'^2_y][Af(x, y) - f'^2_x] - [B''f(x, y) - f'_xf'_y]^2 < 0,$$

ou

$$f(x, y)\Delta_1 < 0.$$

Or, en retranchant, à la troisième colonne de Δ_1, la somme des deux premières multipliées respectivement par x et y, puis faisant la même opération sur les lignes, on voit que Δ_1 se réduit à Δ; c'est ce que l'on constate encore en appliquant à (1) l'invariant $\frac{\Delta}{\sin^2\theta}$. La condition devient donc

$$f(x, y)\Delta < 0.$$

Deuxième Démonstration. — L'équation quadratique des tangentes, issues de P, à la conique, est

$$4f(x, y, z)\ f(X, Y, Z) - (Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z)^2 = 0.$$

Les directions asymptotiques du faisceau sont représentées par

$$4f(x, y)\ \varphi(X, Y) - (Xf'_x + Yf'_y)^2 = 0,$$

équation qui se confond avec (2), si l'on y remplace X par 1 et Y par m, et d'où l'on déduit, par conséquent,

$$f(x, y)\,\Delta < 0.$$

Troisième Démonstration. — Pour que les tangentes issues de P soient réelles et distinctes, il faut et il suffit que la corde des contacts, c'est-à-dire la polaire de P, représentée par

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0 \qquad (3)$$

coupe la conique en des des points réels et distincts, ce qui

donne aisément

$$U \equiv (B^2 - A'A'')f'^2_x + (B'^2 - A''A)f'^2_y + (B''^2 - AA')f'^2_z$$
$$+ 2(AB - B'B'')f'_y f'_z + 2(A'B' - B''B)f'_z f'_x$$
$$+ 2(A''B'' - BB')f'_x f'_z > 0.$$

La condition de contact de la droite (3) et de la conique serait $U = 0$; mais, d'autre part, cette condition est, comme on sait, $D = 0$ en posant

$$D = \begin{vmatrix} & & & f'_x \\ & \Delta & & f'_y \\ & & & f'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix}.$$

On est donc conduit à comparer U à D; de ce rapprochement résulte leur identité. Or, en retranchant de la dernière colonne de D la somme des trois premières multipliées respectivement par $2x$, $2y$, $2z$, et en tenant compte du théorème d'Euler, on a

$$\begin{vmatrix} & & & 0 \\ & \Delta & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4f(x, y) \end{vmatrix} = -4f(x, y)\Delta.$$

La condition est donc enfin $f(x, y)\Delta < 0$.

Quatrième Démonstration. — Le point P devant être, par rapport à la courbe, dans la même région qu'un point quelconque (a, b) d'une tangente quelconque, on doit avoir

$$f(x, y)f(a, b) > 0. \qquad (4)$$

Mais, en prenant pour nouvel axe des y cette tangente et pour nouvel axe des x le diamètre qui passe par le point de contact, on peut trouver des nombres réels λ, p, q satisfaisant à l'identité

$$\lambda f(X, Y) \equiv y'^2 - 2px' - qx'^2. \qquad (5)$$

L'abcisse du point (a, b), dans le nouveau système, étant nulle, on a

$$\lambda f(a, b) > 0; \qquad (6)$$

puis en appliquant à (5) l'invariant $\dfrac{\Delta}{\sin^2 \theta'}$, on a

$$\frac{\lambda^3 \Delta}{\sin^2 \theta} = \frac{-p^2}{\sin^2 \theta'}.$$

Alors, en vertu de (6) et (7), la condition (4) devient

$$f(x, y)\Delta < 0.$$

Cinquième Démonstration. — Les tangentes issues d'un foyer (α, β) étant imaginaires, il faut et il suffit que le point P soit dans la région différente de ce point par rapport à la conique, c'est-à-dire qu'on ait

$$f(x, y)f(\alpha, \beta) < 0. \tag{8}$$

Or, on peut trouver un nombre λ tel qu'on ait

$$\lambda f(X, Y) \equiv (X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + 2(X - \alpha)(Y - \beta)\cos\theta - (mX + nY + h)^2; \tag{9}$$

ce qui, en désignant par d la quantité différente de zéro $m\alpha + n\beta + h$, donne

$$\lambda f(\alpha, \beta) \equiv - d^2. \tag{10}$$

Puis, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au foyer, on a

$$\lambda f(X, Y) \equiv x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos\theta - (mx' + ny' + d)^2.$$

Appliquant à cette identité l'invariant $\frac{\Delta}{\sin^2\theta}$, on a

$$\lambda^3\Delta = \begin{vmatrix} 1 - m^2 & \cos\theta - mn & - md \\ \cos\theta - mn & 1 - n^2 & - nd \\ - md & - nd & - d^2 \end{vmatrix} = - d^2\sin^2\theta \tag{11}$$

Donc, en vertu de (10) et (11), la condition (8) devient

$$f(x, y)\Delta < 0.$$

— Dans les démonstrations qui suivent, on examine séparément le cas de la parabole et celui des coniques à centre.

Sixième Démonstration. — La polaire du centre (a, b) d'une conique à centre, étant la droite de l'infini, rencontre la conique en des points imaginaires ou réels, suivant qu'elle est une ellipse ou une hyperbole. Il faut donc que le point $P(x, y)$ ne soit pas dans la région du centre (ou au contraire qu'il y soit placé), c'est-à-dire que $f(x, y)f(a, b)$ soit négatif (ou positif), suivant que la conique est une ellipse ou une hyperbole. Or $f(a, b) = \frac{\Delta}{\delta}$; d'ailleurs δ est positif dans le premier cas, négatif dans le second; donc, dans les deux cas, la condition est

$$f(x, y)\Delta < 0.$$

Lorsque la conique est une parabole, on peut poser

$$f(X, Y) \equiv \varepsilon(mX + nY)^2 + 2B'X + 2BY + A'',$$

l'un des coefficients de X^2 et Y^2 n'étant pas nul, et ε désignant l'unité précédée du signe de ce coefficient. Le point P doit être dans la même région, par rapport à la courbe, qu'un point quelconque (a, b) de la tangente $2B'X + 2BY + A'' = 0$, différent de son intersection avec le diamètre $mX + nY = 0$. Il faut donc et il suffit qu'on ait

$$f(x, y)f(a, b) > 0.$$

Or, on a

$$f(a, b) = \varepsilon(ma + nb)^2, \qquad \Delta = -\varepsilon(B'n - Bm)^2.$$

La condition est donc

$$f(x, y)\Delta < 0.$$

Septième Démonstration. — Pour une conique à centre, on est conduit, par deux transformations successives de coordonnées, à la forme réduite, conformément à la double identité

$$\Delta f(X, Y) \equiv \Delta\left(Ax'^2 + 2B''x'y' + A'y'^2 + \frac{\Delta}{\delta}\right)$$

$$\equiv -\frac{\Delta^2}{\delta}(Mx''^2 + Ny''^2 - 1).$$

Les coordonnées du point P, dans le dernier système, doivent rendre le dernier membre négatif; ses coordonnées, dans le premier système, doivent donc satisfaire à

$$f(x, y)\Delta < 0.$$

De même, pour une parabole, deux transformations successives de coordonnées conduisent à

$$Hf(X, Y) \equiv H(Hy'^2 + 2lx' + 2my' + n) \equiv H^2(y''^2 - 2px''),$$

avec

$$p = \sin^2\theta . \sqrt{-\frac{\Delta}{H^3}}. \tag{12}$$

Les coordonnées finales de P, devant rendre positif le dernier membre de l'identité, ses coordonnées initiales doivent satisfaire à $Hf(x, y) > 0$, ou, d'après (12), à $f(x, y)\Delta < 0$.

Huitième Démonstration. — Par une transformation convenable des coordonnées, on a

$$f(X, Y) \equiv \lambda(Mx''^2 + Ny''^2 - 1) \tag{13}$$

pour l'ellipse et l'hyperbole,

$$f(X, Y) \equiv \mu(y''^2 - 2px'') \tag{14}$$

pour la parabole.

En appliquant, respectivement à (13) et (14), les invariants $\frac{\Delta}{\delta}$ et $\frac{\Delta}{\sin^2\theta}$, on a

$$\frac{\Delta}{\delta} = -\lambda, \qquad \frac{\Delta}{\sin^2\theta} = -\mu^3 p^2.$$

En conséquence, (13) et (14) donnent,

$$f(X, Y)\Delta \equiv -\frac{\Delta^2}{\delta^2}(Mx''^2 + Ny''^2 - 1),$$

$$f(X, Y)\Delta \equiv -\frac{\Delta^2}{\mu^2 p^2 \sin^2\theta}(y''^2 - 2px'').$$

D'où l'on conclut encore, pour le point P,

$$f(x, y)\Delta < 0.$$

Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le point* P *soit extérieur à l'ellipse est* $Af(x, y) > 0$ *; il en est de même pour la parabole, à moins que* A *ne soit nul, auquel cas la condition est* $A'f(x, y) > 0$.

1° Il suffit évidemment, d'après le théorème I, de démontrer, pour l'ellipse et la parabole, qu'on a $A\Delta < 0$, ou, si A est nul, $A'\Delta < 0$. Or, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, au centre de l'ellipse, on a

$$f(X, Y) \equiv Ax'^2 + 2B''x'y' + A'y'^2 + \frac{\Delta}{\delta};$$

ce qui montre que le carré du demi-diamètre parallèle à ox' est $-\frac{A}{\Delta\delta}$; on a donc $A\Delta < 0$.

Dans le cas de la parabole,

$$f(X, Y) \equiv \varepsilon(mX + nY)^2 + 2B'X - 2BY + A'',$$

ε ayant le signe de A, ou, si A est nul, celui de A', et l'on a

$$\Delta = -\varepsilon(B'n - Bm)^2.$$

2° On peut aussi diriger les 4me, 5me et 8me démonstrations du théorème I, de façon à obtenir le théorème II, sans introduire la considération de Δ. En effet, puisque δ est $\geqslant 0$, on a

$$AH = (A - B''\cos\theta)^2 + B''^2\sin^2\theta + \delta > 0, \qquad (15)$$

ou, si A est nul,

$$H = A'. \qquad (15\ bis)$$

Alors, appliquant à (5) l'invariant $\frac{H}{\sin^2\theta}$, on trouve

$$\frac{\lambda H}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta'}. \qquad (16)$$

Donc, d'après (6), (15), ou (15)′ et (16), la condition (4) devient

$$Af(x, y) > 0;$$

ou, si A est nul, $A'f(x, y) > 0$.

De même, de (9), on déduit identiquement

$$\lambda H = \sin^2 \theta + \delta\lambda^2 > 0,$$

inégalité qui, jointe à (15) ou (15′) et à (16), transforme (8) et donne

$$Af(x, y) > 0,$$

ou $A'f(x, y) > 0$.

Dans la huitième démonstration, on applique à (13) et à (14) l'invariant $\frac{H}{\sin^2 \theta}$, et l'on a

$$\frac{H}{\sin^2 \theta} = \lambda(M + N), \tag{18}$$

avec $M + N > 0$ pour l'ellipse,

$$\frac{H}{\sin^2 \theta} = \mu \tag{19}$$

pour la parabole.

Les conditions $\lambda f(x,y) > 0$.

et $\mu f(x, y) > 0$

donnent donc, en vertu de (15) ou (15)′, (18) et (19),

$$Af(x, y) > 0,$$

ou $A'f(x, y) > 0$.

Remarque. — On doit encore observer que, pour la parabole, la sixième démonstration du théorème I a d'abord fourni la condition simplifiée, et que la septième a d'abord donné

$$Hf(x, y) > 0,$$

qu'il suffit de combiner avec (15) ou (15 *bis*).

3° Enfin, nous allons donner du théorème actuel deux démonstrations directes, complètement indépendantes de tout ce qui précède.

Dans le cas de l'ellipse, tout point extérieur P est dans la même région que le point à l'infini sur ox; ce dernier point donnant à $f(x, y)$ le signe de A, il faut donc qu'on ait

$$Af(x, y) > 0.$$

Ce raisonnement subsiste pour la parabole, si A n'est pas nul, car alors ox n'étant point parallèle à l'axe, son point à l'infini est extérieur à la courbe; si A est nul, le raisonnement

s'applique à oy et donne

$$A'f(x, y) > 0.$$

On peut aussi mener, par P, une sécante correspondant aux équations $X = x + a\rho$, $Y = y + b\rho$ coupant la conique en A et B; les segments PA, PB sont les racines de l'équation

$$\varphi(a, b)\rho^2 + \dots + f(x, y) = 0,$$

et, comme elles doivent avoir le même signe, il faut qu'on ait

$$\varphi(a, b)f(x, y) > 0.$$

Or, on a $\quad A\varphi(a,b) \equiv (Aa + B''b) + \delta b^2 > 0$

puisque $\delta \geqslant 0$; ou, si A est nul,

$$\varphi(a, b) = A'b^2.$$

On a donc $\quad Af(x, y) > 0,$

ou $\quad A'f(x, y) > 0.$

Remarque. — Cette dernière démonstration prouve que si $f(x, y) = 0$ représente deux droites parallèles, la condition nécessaire et suffisante pour que P ne soit pas entre ces droites est $\quad Af(x, y) > 0;$

ou, si A est nul, $\quad A'f(x, y) > 0.$

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 217).

38. Transformation homographique instantanée. — Imaginons un triangle de référence ABC et trois nombres quelconques λ, μ, ν. Il existe dans le plan du triangle un point M dont les *coordonnées normales* (x, y, z) sont proportionnelles à λ, μ, ν; et l'on peut aussi trouver un point M' dont les *coordonnées barycentriques* (α, β, γ) sont elles-mêmes proportionnelles à λ, μ, ν. Ces deux points M, M', ainsi associés, se correspondent homographiquement, et si l'un d'eux

---

(*) G. de Longchamps. *Une conique remarquable du triangle.* (A.-F Nancy, 1886.)

décrit la courbe U représentée par

$$f(x, y, z) = 0,$$

le correspondant M′ décrit une courbe U′:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

C'est pour rappeler que les équations des deux courbes correspondantes s'obtiennent ainsi par le seul changement des lettres qui représentent les variables, que M. de Longchamps a proposé de donner à cette méthode de transformation, imaginée par lui, le nom de *transformation instantanée.*

39. Points équicoordonnés. — Nous appellerons ainsi et nous désignerons par les lettres M_x, M_a, deux points dont les coordonnées normales de l'un sont proportionnelles aux coordonnées barycentriques de l'autre.

40. Transformation complémentaire dans un système quelconque de coordonnées. — Cette transformation repose sur l'idée des points complémentaires dont nous avons parlé précédemment (§§ 18-20). A la courbe dont l'équation est

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

correspond, par points complémentaires, la courbe :

$$f(\eta + \zeta - \xi,\ \zeta + \xi - \eta,\ \xi + \eta - \zeta) = 0$$

41. Transformation anticomplémentaire dans un système quelconque de coordonnées. — A la courbe

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

correspond, par points anticomplémentaires, dans le système de coordonnées considéré, la courbe

$$f(\eta + \xi, \zeta + \eta,\ \xi + \zeta) = 0$$

42. Transformations supplémentaires et antisupplémentaires. — Quand on adopte les coordonnées normales, à la courbe

$$f(x, y, z) = 0$$

correspondent, par points supplémentaires et antisupplémentaires, les deux courbes :

$$f(y + z - x,\quad z + x - y,\quad x + y - z) = 0,$$

$$f(y + z,\quad z + x,\quad x + y) = 0.$$

42. Transformations complémentaires et anticomplémentaires. — Dans le système de coordonnées normales, à la courbe

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

correspondent les deux courbes

$$f(\beta + \gamma - \alpha, \quad \gamma + \alpha - \beta, \quad \alpha + \beta - \gamma) = 0$$
$$f(\beta + \gamma, \quad \gamma + \alpha, \quad \alpha + \beta) = 0.$$

44. Points tripolairement associés. — Les coordonnées tripolaires (λ, μ, ν) d'un point M sont :

$$\overline{MA}^2 = \lambda, \qquad \overline{MB}^2 = \mu, \qquad \overline{MC}^2 = \nu,$$

ABC étant le triangle de référence.

Il existe toujours deux points M, M′ dont les coordonnées tripolaires sont proportionnelles à trois quantités données. Ces points sont en ligne droite avec le centre O du cercle circonscrit au triangle de référence et sont conjugués harmoniques par rapport à ce cercle. La perpendiculaire au milieu de MM′ a pour équation :

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0 \ (*).$$

QUESTIONS ÉNONCÉES

SÉRIES

1. — La série

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{n^{n+1}} + \ldots$$

est convergente; calculer sa valeur, à $\frac{1}{1000}$ près.

Voyez les développements qui accompagnent une question analogue (nº d'octobre p. 226).

2. — Démontrer que la série

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) + \ldots$$

(*) Ici, se termine la première partie du travail de M. Vigarié; nous commencerons la publication de la seconde partie, qui traitera d'abord des *points remarquables du triangle*, dans le numéro de janvier prochain.

est convergente ou divergente, suivant que l'intégrale

$$\int_1^\infty \varphi(x)dx$$

est finie ou infinie. On suppose que la fonction φ est indéfiniment décroissante et qu'elle peut devenir aussi petite que l'on veut.

Ce théorème est démontré (*Journal*, 1887, p. 19).

3. — Discuter la convergence de la série

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{a^2+4}+\ldots+\frac{1}{a^2+n^2}+\ldots$$

Série convergente, puisque $Lim.\ n^2u_n = \frac{1}{a^2}$.

On peut aussi la comparer à la série dont le terme général est $\frac{1}{n^2}$. Si l'on change a^2, en $-a^2$, la première démonstration subsiste; l'autre, peut aussi être employée; mais il faut comparer les termes $\frac{1}{n^2-a^2}$ et $\frac{1}{(n-1)^2}$.

4. — Calculer, à $\frac{1}{100}$ près, la valeur de la série suivante

$$y = 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{5.6.7}+\ldots+\frac{1}{5.9\ldots n}+\ldots$$

Dans cet exemple, au lieu de suivre la méthode générale, rappelée plus haut, on peut observer que l'on a

$$\frac{y}{1.2.3.4} = e-\frac{8}{3}.$$

Dans cette égalité, la lettre e désigne un nombre connu avec une approximation aussi grande que l'on veut

$$e = 2,718281828\ldots$$

5. — La série

$$y = 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots \qquad (1)$$

est-elle convergente ou divergente?

Cette série, très connue (*), est sommatoire. On multiplie les deux membres de l'égalité (1) par x et l'on retranche, de celle-ci, la nouvelle égalité ainsi obtenue, etc.

6. — Étudier la série alternée

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}+\ldots$$

(*) Voyez : *Nouvelles Annales*, 1849, p. 421.

Cette série est convergente; on le prouve en l'écrivant sous la forme

$$4\left\{\frac{1}{1.5}+\frac{1}{2.6}+\ldots+\frac{1}{n(n+4)}+\ldots\right\}$$

et en observant que le terme général de la série placée dans la parenthèse donne *lim.* $n^2u_n = 1$. On peut aussi établir cette convergence par la sommation des n premiers termes.

EXERCICES ÉCRITS

4. On considère une parabole P rapportée à ses axes; par un point donné M (x_0, y_0) et par le sommet O de la parabole on fait passer une circonférence mobile Γ, qui rencontre P en trois autres points A, B, C.

Les normales à P, en ces points A, B, C se coupent en un certain point I.

Imaginant toutes les circonférences telles que Γ, on demande :

1° Quel est le lieu du point I? Ce lieu est une droite Δ;

2° Trouver l'enveloppe de Δ, lorsque M décrit une circonférence de centre O.

3° Quel est le lieu des points M pour lesquels Δ est tangente a P?

4° Si l'on considère deux des trois points A, B, C, dont il a été question, les tangentes, en ces points, à la parabole P, se coupent en un point J; le lieu de J est une conique U.

5° Trouver le lieu du point M lorsque la conique U, qui correspond à ce point, est tangente à P.

Ce lieu se compose d'un certain cercle et de la parabole proposée.

Notes sur l'exercice 3.

1° En partant de l'identité

$$\left(A\frac{x}{a}+B\frac{y}{b}-1\right)\left(A\frac{x}{a}-B\frac{y}{b}-\lambda\right)+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$
$$\equiv \mu(x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y)$$

on trouve
$$(A^2+B^2)(x^2+y^2)-A\frac{x}{a}(A^2b^2+B^2a^2+c^2) \quad (1)$$
$$-B\frac{y}{b}(A^2b^2+B^2a^2-c^2)=0.$$

2° On suppose $$A^2 + B^2 = 1. \quad (2)$$

3° La parallèle à Oy, menée par M, a pour équation (3) $x = aA$; en éliminant A, B entre (1), (2) et (è) on trouve

$$y^4 - y^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(b^2 + \frac{c^4x^4}{a^4b^2}\right) + \frac{c^4x^4}{a^4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 = 0.$$

Mais l'ellipse proposée fait partie du lieu; on supprime ce facteur singulier et l'on a finalement

$$y^2 = \frac{c^4x^4}{a^4b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \text{ etc...}$$

4° Le lieu demandé est, pour des raisons évidentes, une courbe unicursale; en traitant directement la question, on trouve

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = -\frac{c^2}{b}\sin\varphi\cos^2\varphi$$

On peut, dans ces formules, faire varier φ et construire la courbe point par point. On peut aussi, si l'on préfère, y remplacer les fonctions trigonométriques par des formules algébriques, au moyen des égalités connues :

$$\sin\varphi = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Remarque. — On aurait pu demander aussi le lieu des centres des cercles C, mais ce problème est connu, ou du moins il revient immédiatement au problème de Tortolini (*) qui s'énonce ainsi : *trouver l'enveloppe des perpendiculaires menées aux extrémités des diamètres de l'ellipse.* Cette courbe jouit d'une propriété remarquable signalée par Legendre; *la longueur de ses arcs s'exprime au moyen d'une expression algébrique et d'une fonction elliptique.*

C'est une unicursale dont les coordonnées vérifient les équations

$$\frac{ax}{\cos\varphi} = a^2 + c^2\sin^2\varphi,$$

$$\frac{by}{\sin\varphi} = b^2 - c^2\cos^2\varphi$$

Ces formules permettent de discuter la forme générale de la courbe correspondante; on devra distinguer trois cas suivant que l'on a $b > c$, $b = c$, ou enfin $b < c$.

QUESTIONS D'EXAMEN

23. — *Construire la courbe qui correspond à l'équation*

$$\rho = \operatorname{tg}\omega.$$

Cette courbe Γ est formée de deux branches hyperboliques aplaties, présentant, à l'origine, un point d'osculation; sa construction, points par points, n'offre aucune difficulté,

(*) *Nouvelles Annales* 1846, p. 365.

mais son tracé, tangente par tangente, est un peu plus intéressant.

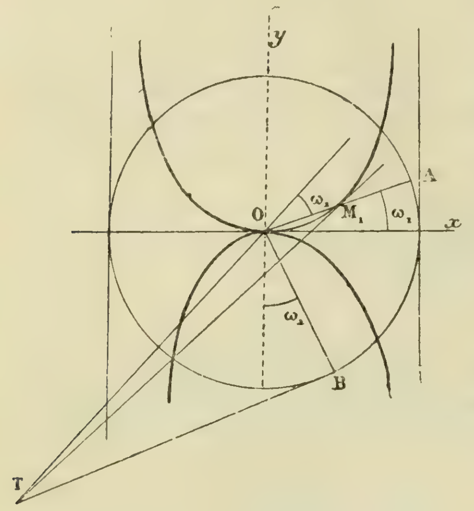


Fig. 1.

Soient ρ_1, ω_1, les coordonnées d'un point M_1 pris sur F; la tangente en ce point a pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \cot g\, \omega_1 \cos(\omega - \omega_1) - \frac{1}{\sin^2 \omega_1} \sin(\omega - \omega_1). \quad (1)$$

Remplaçons, dans cette équation, ω par $2\omega_1$; nous trouvons, pour la valeur correspondante de ρ,

$$\rho \sin \omega_1 + 1 = 0.$$

D'après cette relation, on déduit, pour la tangente en M_1, une construction très simple, indiquée sur la figure (1).

La construction de la tangente en un point pris sur une courbe est un problème toujours possible, que l'on peut résoudre avec la règle et le compas (exception faite des point smultiples dont l'ordre est supérieur à 2), et même d'une infinité de façons différentes. On peut dire que le sujet est inépuisable (*); il s'agit seulement d'en trouver une solution simple.

Pour montrer, sur l'exemple qui nous occupe, une application de cette idée générale, proposons-nous de déterminer le point de rencontre θ de la tangente cherchée M_1T, avec la tangente au cercle Δ (cercle décrit, de l'origine comme centre, avec l'unité pour rayon), au point A, extrémité du rayon qui joint le point O au point M_1. La tangente à Δ, au

(*) Voyez, par exemple, à propos de la variété que nous signalons ici, la question 233 proposée dans le présent numéro. Voici encore une construction très simple, que le lecteur vérifiera sans peine.

Soient O le sommet de la courbe Γ, OZ son axe, M un point de T; la perpendiculaire MA à OM rencontre OZ en A; si, en ce point A, on trace une droite AB perpendiculaire à OZ, AB rencontre la perpendiculaire élevée en O à OM, en un certain point C; CM est la normale, en M, à Γ.

point A, a pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \cos(\omega_1 - \omega). \qquad (2)$$

Entre (1) et (2), éliminons $\cos(\omega_1 - \omega)$, nous avons

$$\frac{1}{\rho}(\cot g\,\omega_1 - 1) = \frac{\sin(\omega - \omega_1)}{\sin^2 \omega_1}$$

ou, en coordonnées cartésiennes

$$\sin \omega_1 (\cos \omega_1 - \sin \omega_1)$$
$$= y \cos \omega_1 - x \sin \omega_1.$$

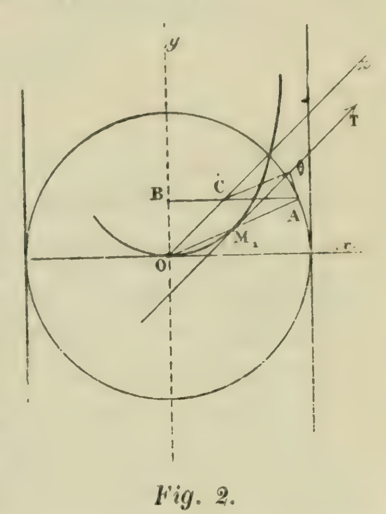


Fig. 2.

Cette équation représente une droite qui passe par le point de concours θ des tangentes $A\theta$, $M_1\theta$; on voit aussi qu'elle est parallèle à OM_1; enfin, l'équation est vérifiée par $y = x = \sin \omega_1$. De là résulte une construction de la tangente, indiquée sur la figure (2). OC est la bissectrice de *yox*, AB est perpendiculaire sur *oy* et $C\theta$ est parallèle à OA.

24. — *Equation générale des coniques osculatrices à une parabole donnée.*

Pour qu'une conique soit osculatrice à une autre conique, il faut que ces deux courbes aient tous leurs points communs confondus.

L'équation générale demandée est d'après cela,

$$\left(y - mx - \frac{p}{2m}\right)^2 + \lambda(y^2 - 2px) = 0,$$

en supposant, bien entendu, que la parabole proposée soit rapportée à son axe.

Comme exercice, on peut, par exemple, se proposer de trouver *le lieu des centres des coniques osculatrices à une parabole donnée et tangentes à l'axe de cette courbe.*

On trouve alors $\lambda = 1$; puis, en éliminant m entre les équations :

$$m\left(y - mx - \frac{p}{2m}\right) + p = 0,$$

$$y - mx - \frac{p}{2m} + y = 0,$$

on trouve, pour l'équation du lieu cherché,

$$y^2 = \frac{2}{3} px.$$

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu, de M. GRIESS, la lettre suivante :

« Je vous remercie d'avoir bien voulu publier ma petite Note dans votre numéro de juillet dernier.

En réponse à l'observation de M. Catalan, voici une démonstration fort simple du théorème que j'ai énoncé.

Considérons deux axes rectangulaires Ox, Oy.

Prenons, sur Ox, une longueur $OA = 1$, et divisons-la en n parties égales. Par les points de division $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}, A_n$, élevons des ordonnées égales à $\left(\frac{1}{n}\right)^p, \left(\frac{2}{n}\right)^p \cdots$ et considérons la somme des rectangles ayant pour bases les divisions de OA et pour hauteurs ces ordonnées. Elle a pour mesure

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right] = \frac{S_p}{n^{p+1}}.$$

En observant que $OA_1 = \frac{1}{n}$, $OA_2 = \frac{2}{n}$, $OA_{n-1} = \frac{n-1}{n}$ les extrémités des ordonnées A_1B_1, A_2B_2 se trouvent sur la courbe dont l'équation est

$$y = x^p.$$

Quand on fait croître n indéfiniment, la somme des rectangles a pour limite l'aire comprise entre la courbe, les ordonnées des points O et A, et l'axe des x, Cette aire a pour expression

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

Donc $$\lim \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Cette démonstration suppose que la limite existe; il faut et il suffit, pour cela, que l'intégrale

$$\int_0^1 x^p dx$$

ne soit pas infinie.

Cette condition est réalisée tant que p est positif

Quand p est < 0, posons $p = -q$; l'intégrale devient

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^q}.$$

$\frac{1}{x^q}$ devenant infini à la limite inférieure, on reconnaît les cas où l'intégrale a une limite au moyen d'un théorème démontré dans tous les cours de calcul intégral (v. Serret, *Calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 238). Il montre que l'intégrale a une limite, tant que l'on a

$$q < 1 \quad \text{ou} \quad p > = 1,$$

et qu'elle est infinie si $q \overline{>} 1$.

Donc
$$\lim \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$
tant que
$$p + 1 > 0.$$

M. Appell a montré (*Nouvelles Annales*, juillet 1887, p. 312) comment on peut former un polynôme entier $\varphi_p(x)$, qui pour des valeurs entières attribuées à p et x représente la somme, des p^{mes} puissances des n premiers nombres entiers. Il trouve que ce polynôme est de degré $p + 1$, et que le coefficient du premier terme est $\frac{1}{p+1}$; savoir :

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + Ax^p + \ldots$$

Il en résulte, pour x entier et infiniment croissant,

$$\lim \frac{\varphi_p(x)}{x^{p+1}} = \lim \frac{S_p}{x^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

ce qui démontre simplement le théorème, dans le cas des exposants entiers.

Cette propriété des polynômes de Bernoulli est, bien entendu, très connue, et depuis longtemps. G. L.

Extrait d'une lettre de M. Catalan.

... Voici quelques observations relatives au n° de septembre.

1° La série

$$\frac{1}{2L2} + \frac{1}{3L3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)L(n+1)} + \ldots$$

n'est pas la *série de M. Bertrand :* elle remonte, au moins, à l'illustre Abel (œuvres, 1re édition, tome Ier, p. 111).

2° La série

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots$$

pourrait (s'il était besoin) s'appeler *série de Catalan*. En effet, elle justifie cette remarque, dont je crois avoir la priorité :

Une série à termes alternativement positifs et négatifs, dont le terme général a pour limite zéro, peut être divergente (Traité élémentaire des séries, p. 29).

Nota. — J'ai, en effet (*Journal*, 1886, p. 164), nommé *série de M. Bertrand*, la série (1) ; parce que, comme je l'ai rappelé *(loc. cit.)*, elle a été, autrefois (*Journal de Liouville*, 1842), étudiée par ce Géomètre. Il n'y a pas, je pense, grand mal à cela. M. Catalan me fait observer, avec raison, que, dès 1827, Abel avait établi la divergence de cette série; il serait donc plus juste de la nommer *série d'Abel*, s'il n'y avait déjà une autre série (Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 324), ainsi désignée. Dans ces conditions, il vaudrait mieux lui donner une épithète justifiée par une de ses propriétés. Mon cher maître en propose-t-il une ?

D'après un renseignement que je dois à l'obligeance de M. Catalan, à propos de la question historique, ici soulevée, en 1827, L. Olivier avait énoncé cette règle fausse :

La série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente si

$$\lim nu_n = 0.$$

C'est alors qu'Abel, prenant pour exemple la série (1), a rédigé sa Note rectificative.

Pour ce qui concerne la série (2), M. Catalan a raison de croire que cette question a été posée pour constater que le candidat était au courant de la remarque rappelée ci-des-

sus (*). Voici, en effet, dans quels termes elle a été formulée :

La série

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \dots$$

est-elle convergente ou divergente? Sur quels théorèmes s'appuie-t-on pour conclure la convergence ou la divergence d'une série alternée? La condition de décroissance constante et indéfinie du terme général est-elle suffisante? est-elle nécessaire? G. L.

ÉCOLE CENTRALE

(PREMIÈRE SESSION; JUILLET 1887)

— On considère toutes les coniques qui ont un foyer en un point donné F et qui passent par deux points donnés A et B.

1° Montrer que les coniques forment deux séries telles que, pour toute conique d'une série, la directrice correspondant au foyer F passe par un point fixe de la droite AB, situé entre A et B; tandis que, pour toute conique de l'autre série, la directrice correspondant au foyer F, passe par un point fixe de la droite AB, non situé entre A et B.

2° Trouver le lieu des centres des coniques considérées et montrer qu'il se compose de deux coniques homofocales.

3° Prenant un point C sur le lieu précédent, reconnaître, d'après la position qu'il occupe sur le lieu, si la conique considérée, dont le point C est centre, est telle que les points A et B sont sur une même branche ou sur deux branches différentes de cette conique.

4° Si le point C est tel que les points A et C soient sur une même branche de la conique considérée, reconnaître, d'après la position du point C, si cette conique et du genre ellipse ou du genre hyperbole, et, dans le premier cas, si les points A et B sont sur la branche voisine du point F, ou sur l'autre.

(*Nota.* — On prendra pour axe des x la droite AB et pour axe des y la perpendiculaire à cette droite, menée par le milieu de AB.

(DEUXIÈME SESSION; OCTOBRE 1887)

— On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy, un point A sur Ox, un point B sur Oy.

$$OA = a \qquad OB = b.$$

1° Ecrire l'équation générale des paraboles qui passent par les trois points O, A, B. Montrer qu'en général, il passe par chaque point M du plan, deux de ces paraboles. Trouver le lieu des points M pour lesquels ces deux paraboles sont confondues, et indiquer la région du plan qui contient les points où il n'en passe aucune réelle.

(*) Voyez les feuilles publiées par la librairie Morant-Foucart (*admissibilité*, 1887, p. 16.)

2° Trouver le lieu des points M tels que les axes des deux paraboles qui y passent forment entre eux un angle donné α. Construire le lieu pour le cas où $\alpha = 90°$.

3° Trouver le lieu du point de chacune de ces paraboles pour lequel la tangente est parallèle à OB, celui du point où la tangente est parallèle à OB, celui où la tangente est parallèle à AB.

Ces lieux sont trois coniques. Construire ces coniques, vérifier que deux quelconques d'entre elles n'ont pas de point commun réel à distance finie, marquer leurs centres D, E, F, et comparer le triangle DEF au triangle OAB.

4° On joint l'origine O au point F, centre de la conique lieu du point de contact des tangentes parallèles à AB; et, à cette droite OF, on élève au point O, une perdendiculaire qui rencontre la droite AB en P. On demande le lieu du point P lorsque, le point A restant fixe, le point B parcourt l'axe des y.

QUESTION 118

Solution par M. Bourgarel.

Trouver la relation qui existe entre trois dérivées successives d'ordre quelconque de la fonction

$$(x^2 - 1)^n.$$

Montrer qu'il ne peut exister de relation entre deux dérivées successives; la dérivée d'ordre p *est exactement divisible par la dérivée d'ordre* $2n - p$. *Soit* $f(x)$ *une des dérivées de* $(x^2 - 1)^n$*;* $f'(x)$ *et* $f''(x)$ *étant les dérivées première et seconde de* $f(x)$, *la relation qu'il s'agit de trouver aura la forme*

$$Af(x) + Bf'(x) + Cf''(x) = 0;$$

chercher s'il existe d'autres fonctions entières du même degré vérifiant la même identité. (L. Lévy.)

Posons $$y = (x^2 - 1)^n$$

Nous aurons $$\frac{dy}{dx} = 2n(x^2 - 1)^{n-1}x$$

ou $$\frac{dy}{dx}(x^2 - 1) = 2nxy.$$

Appliquons la formule de Leibniz aux deux membres de cette identité, y étant considéré comme fonction de x. Nous avons ainsi

$$(x^2 - 1)\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} + p.2x.\frac{d^py}{dx^p} + \frac{p(p-1)}{2}\cdot 2 \cdot \frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}$$

$$= 2nx\frac{d^py}{dx^p} + 2n.p.\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}},$$

ou

$$(x^2 - 1)\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} - 2(p - n)x\frac{d^py}{dx^p} - p(2n - p + 1)\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} = 1. \quad (1)$$

Telle est la relation qui lie trois dérivées successives quelconques de y.

Quel que soit p, cette relation ne pourra pas contenir seulement deux dérivées successives, car p est inférieur ou égal à $2n$ (*).

Pour démontrer que la dérivée d'ordre p est exactement divisible par la dérivée d'ordre $2n - p$, nous allons mettre la dérivée d'ordre p sous une certaine forme remarquable.

Remarquons, pour cela, que $\frac{dy}{dx}$ est égal à $2n(x^2 - 1)^{n-1}$ multiplié par x. On voit, de même, en prenant directement la dérivée seconde qu'elle est égale à $2n(x^2 - 1)^{n-2}$ multiplié par un polynôme entier en x et du second degré. Pour démontrer que cette loi est générale, supposons-la démontrée jusqu'à la dérivée d'ordre p et supposons que l'on ait

$$\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} = 2n(x^2 - 1)^{n-p+1}P_{p-1},$$

$$\frac{d^py}{dx^p} = 2n(x^2 - 1)^{p-n}P_p.$$

P_{p-1} et P_p désignant des polynômes entiers en x de degrés respectivement égaux à $p - 1$, p.

(*) De ce que l'équation (1) ne peut pas se réduire à une relation entre deux dérivées successives, il ne résulte pas qu'on ne puisse trouver aucune autre relation de cette forme. Ainsi, s'il existait une seconde équation distincte de (1) et contenant les trois mêmes dérivées, l'élimination de $\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}$ conduirait à une relation entre deux dérivées successives.

Le second point demandait donc une démonstration directe et peut-être aussi eût-il convenu de prouver que l'équation (1) est unique de son espèce. La méthode d'identification employée plus loin par l'auteur de la solution que nous publions aujourd'hui conduisait parfaitement au résultat.

L. Lévy.

La relation (1) nous donne alors, après simplifications,

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}}=2n(x^2-1)^{n-p-1}[2(n-p)xP_p+p(2n-p+1)(x^2-1)P_{p-1}].$$

On voit facilement que le polynôme entre parenthèses est de degré $p+1$ en x. La loi est donc générale. Si nous désignons par P_{n+1} ce polynôme nous avons

$$P_{p+1}-2(n-p)xP_p-p(2n-p+1)(x^2-1)P_{p-1}=0.$$

Telle est la relation que vérifient trois polynômes consécutifs; elle va nous permettre de démontrer que la dérivée d'ordre p est exactement divisible par la dérivée d'ordre $2n-p$.

Observons que la dérivée d'ordre $2n-1$ est $2n(2n-1)!\,x$. On a donc la relation

$$\frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}}=2n(2n-1)!\ P_1.$$

On vérifie de même, facilement, que

$$1.2.\frac{d^{2n-2}y}{dx^{2n-2}}=2n.(2_{n-2})!\ P_2.$$

Je dis que l'on a, en général :

$$p!\,\frac{d^{2n-p}y}{dx^{2n-p}}=2n(2n-p)!\ P_p,$$

En effet, supposons que cette relation ait lieu jusqu'au polynôme P_p, c'est-à-dire que l'on ait :

$$(p-1)!\,\frac{d^{2n-p+1}y}{dx^{2n-p+1}}=2n(2n-p+1)!\ P_{p-1}$$

$$p!\,\frac{d^{2n-p}y}{dx^{2n-p}}=2n(2n-p)!\ P_p.$$

Si nous portons dans la relation (1), appliquée aux dérivées d'ordre $2n-p+1$, $2n-p$, $2n-p-1$, les valeurs des dérivées d'ordre $2n-p+1$, $2n-p$, tirées de ces égalités, nous obtenons :

$$(2n-p)(p+1)p!\,\frac{d^{2n-p-1}y}{dx^{2n-p-1}}=(x^2-1)2np(2n-p+1)!\ P_{p-1}$$
$$+\ 2n-p)x\ 2n.(2n-p)!\ P_p. \qquad (2)$$

Or, nous avons

$$P_{p-1}=p(2n-p+1)(x^2-1)P_{p-1}+2(n-p)xP_p. \quad (3)$$

Multiplions les deux membres de l'identité (3) par

$2n(2n-p)!$ et retranchons de (2), nous obtenons :

$$(2n-p)(p+1)p!\,\frac{d^{2n-p-1}y}{dx^{2n-p-1}} + 2n(2n-p)!\,P_{p+1}$$

ou $$(p+1)!\,\frac{d^{2n-p-1}y}{dx^{2n-p-1}} - 2n(2n-p-1)!\,P_{p+1}.$$

Nous avons donc d'une manière générale :

$$p!\,\frac{d^{2n-p}y}{dx^{2n-p}} + 2n(2n-p)!\,P_p.$$

et par suite :

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{d^{2n-p}y}{dx^{2n-p}}(x^2-p)^{n-p}\frac{p!}{(2n-p)!}.$$

La dérivée d'ordre p est donc divisible par la dérivée d'ordre $2n-p$, le quotient est $\frac{p!}{(2n-p)!}(n^2-1)^{n-p}$.

Cherchons maintenant si l'on peut satisfaire à l'identité (1) en prenant pour y un polynôme entier en x de degré $2n$. Autrement dit, voyons si l'on peut déterminer les coefficients du polynôme

$$y = A_0x^{2n} + A_1x^{2n-1} + \ldots + A_{2n-1}x + A_{2n}$$

de façon que l'identité (1) soit vérifiée.

Calculons, pour cela, trois dérivées consécutives de ce polynôme et exprimons qu'elles satisfont identiquement à la relation (1). Nous obtenons ainsi les identités simplifiées :

$$-(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-p+1)2nA_1 = 0$$

$$-2(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-p)A_2 = 2n(2n-1)\ldots(2n-p)A_0$$

. . . .

d'où $$A_1 = 0, \qquad A_2 = -nA_0.$$

D'une manière générale on obtient :

$$A_1 = 0,\ A_3 = 0,\quad A_5 = 0\ldots$$

$$A_2 = -nA_0, \qquad A_4 = -\frac{n-1}{2}A_2 \qquad A_6 = -\frac{n-2}{3}A_4.$$

. . . .

On en déduit

$$A_{2k-1} = 0, \qquad A_{2k} = (-1)^k C_n^k A_0,$$

C_n^k désignant le nombre de combinaisons simples de lettres k à k.

Il résulte de là que le polynôme considéré ne peut être autre que

$$A_0(x^2 - 1)^n.$$

Telle est la forme générale des fonctions dont trois dérivées successives satisfont à la relation (1).

QUESTIONS PROPOSÉES

233. — Soit Γ la courbe qui correspond à l'équation

$$\rho = a \operatorname{tg} \omega;$$

le rayon vecteur qui part de l'origine O rencontre Γ en A, puis l'asymptote Δ (au bras correspondant à ce point A) en B. Traçons la perpendiculaire à OB, au point B. Cette droite coupe Oy en C. Soit D la projection de O sur Δ; démontrer que la tangente en A va passer par le point (autre que D) commun à la circonférence DAB et à la droite DC. *(G. L.)*

Errata. — Page 223,

au lieu de $\sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$ *lisez* $\sqrt{\dfrac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}}$

Page 223, ligne 17,

lisez $y = L\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ et $y' = -\dfrac{2}{\cos 2x}$

Page 223, il a été fait, par suite de la mise en pages, une coupure dans la formule proposée au bas de cette page. Il faut lire :

$$y = a^{Lga \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2}}$$

Page 224, ligne 10, les coefficients, placés dans la parenthèse, doivent être élevés au carré.

Page 224, ligne 18, *lisez*, $\sqrt{1 - x^2}$

Page 227, ligne 13, *lisez* $\cos^4 x$, *au lieu de* $\cos 4x$.

Le Directeur Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 22630-7.

VARIÉTÉS

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 242.)

CHAPITRE V

LES PROBLÈMES DU POINT INACCESSIBLE

La position d'un point M dans une région inaccessible, soulève évidemment des problèmes différents de celui que nous avons traité dans le chapitre précédent. On peut demander, par exemple, d'évaluer la différence des distances du point inaccessible à deux points donnés, ou le rapport de ces distances, etc. On peut aussi se proposer d'évaluer la longueur de la perpendiculaire abaissée de M sur une droite donnée; puis, imaginer que le point inaccessible soit mobile, et demander alors comment varie sa distance à un point donné, fixe ou même mobile, ainsi qu'il arrive dans le problème de la poursuite, etc, etc...

Ces différentes questions vont nous occuper; mais nous examinerons d'abord un cas particulier du problème général, traité au Chapitre précédent.

46. Le Problème de la plate-forme. — Nous supposons qu'on ne puisse se mouvoir que dans un espace très limité, comme celui que présentent les talus d'une forteresse, la terrasse d'un château, ou même le pont d'un bateau; et, dans ces conditions, nous voulons déterminer la distance qui sépare l'observateur d'un point R, visible dans l'espace environnant; on pourra, si l'on veut, supposer que R est, relativement, assez éloigné.

1° Une première solution découle du théorème de Chasles *Première partie*, 2, p. 9). Prenons, sur la plate-forme donnée, un triangle DPQ aussi grand que possible, et dont un côté PQ passe par le point visé. Déterminons ensuite, entre les côtés DP, DQ, une droite AC passant par R; enfin, traçons AP et CQ. Le théorème cité donne

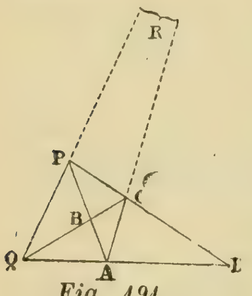


Fig. 191.

$$RC = \frac{AC.BP.DQ}{BA.DQ - AD.BP}.$$

Comme le point A peut être pris arbitrairement sur DQ, en choisissant pour A le milieu de DQ, la formule précédente se simplifie, et l'on a

$$RC = \frac{2AC.BP}{2BA - BP}.$$

2° *La solution de Carnot.* Soit ABCD la plate-forme donnée; effectuons les tracés indiqués *(fig. 192)*; nous allons montrer que

$$\frac{2}{OR} = \frac{1}{OH} - \frac{1}{OK}.$$

Fig. 192.

En effet, K, O, H, R forment une ponctuelle harmonique; donc

$$\frac{2}{RO} = \frac{1}{RH} + \frac{1}{RK}; \text{(A)}$$

ou

$$\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR + OK} = \frac{1}{OR - OH} - \frac{1}{OR},$$

ou encore

$$\frac{OK}{OR + OK} = \frac{OH}{OR - OH}.$$

Cette dernière égalité donne bien

$$\frac{2}{OR} = \frac{1}{OH} - \frac{1}{OK}, \qquad (1)$$

relation connue, qu'on pouvait écrire immédiatement, en appliquant la formule (A) et en tenant compte de ce fait que OK est de signe contraire à OH et à OR.

Cette solution diffère peu de celle qu'a proposée Carnot et à laquelle nous avons fait allusion au Chapitre précédent. Voici d'ailleurs, explicitement, la solution proposée par Carnot pour mesurer la distance, d'un point donné A, à un autre point R visible, mais inaccessible.

Dans la région accessible, effectuons les jalonnements qu'indique la *fig. 193*; la ponctuelle AOBR (*) est harmonique et l'on a

$$\frac{1}{AR} = \frac{2}{AB} - \frac{1}{AO}. \qquad (2)$$

Carnot donne la valeur de la distance inconnue AR sous la forme équivalente

$$AR = \frac{AB.OA}{OA - OB},$$

mais les formules (1) et (2) sont plus commodes, quand on fait usage de la table des inverses.

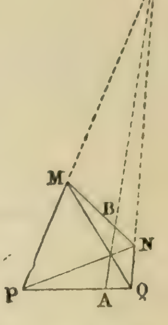


Fig. 193.

3° *La Solution par l'équerre.* Soit OR la ligne de visée, R étant le point considéré; traçons AB perpendiculairement à OR et prenons, sur la plate-forme donnée, deux points A, B, symétriques par rapport à O, de telle sorte que AB ait toute la longueur possible. De B, visons de nouveau le point R, puis joignons A à un point C de cette ligne de visée; enfin abaissons, sur AB, la perpendiculaire CH. AC rencontre OR en M et il est facile de reconnaître que

$$\frac{1}{OR} = \frac{2}{CH} - \frac{1}{OM}.$$

Cette propriété peut être considérée comme étant une conséquence de celle que nous avons utilisée tout à l'heure. On peut aussi l'établir en appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle ORB et à la transversale CMA. On a, en effet,

$$\frac{CB}{CR} \cdot \frac{MR}{OM} \cdot \frac{AO}{AB} = 1,$$

ou

$$\frac{CH}{OR - CH} \cdot \frac{OR - OM}{OM} = 2.$$

De cette relation, on déduit

$$\frac{2}{CH} = \frac{1}{OR} + \frac{1}{OM}.$$

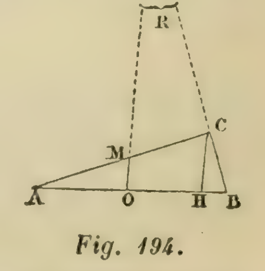


Fig. 194.

Cette égalité résulte encore, si l'on veut, de ce fait que CA

(*) La lettre O, dans la *fig. 193*, doit être placée à l'intersection des lignes MQ, NP.

CB, CO et la parallèle menée par C, à AB, forment un faisceau harmonique. On observera d'ailleurs qu'elle subsiste, si l'on suppose OR non perpendiculaire sur AB.

47. Différence des distances entre un point inaccessible et deux points donnés. — Dans certains cas, on peut proposer de reconnaître si un point inaccessible O est plus rapproché d'un point A que d'un autre point B. On peut aussi demander d'évaluer la différence OA — OB, sans rechercher, séparément les longueurs OA et OB.

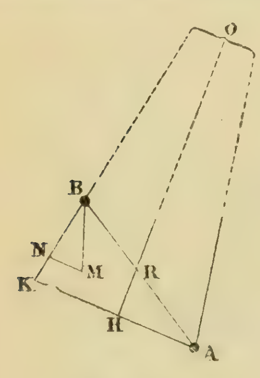


Fig. 195.

Voici une solution de ce problème.

Jalonnons BM, parallèlement à OA et, avec le cordeau, prenons BM = BN = l, l désignant la longueur du cordeau. Il suffit alors de jalonner AK, parallèlement à MN; BK représente la différence cherchée.

Dans le cas où l'on veut seulement apprécier si, au point B, on est, ou non, plus rapproché de O, qu'on ne l'est en A; alors, la fausse équerre indique immédiatement le résultat demandé. Il suffit de relever, en A, l'angle BAO ; et, après l'avoir transporté en B, d'observer si l'angle ABO est, ou n'est pas, plus grand que celui qui est marqué par l'instrument.

On observera que, si l'on connaît la distance de A à un point inaccessible O, le problème précédent donne le moyen d'obtenir les distances, de tous les autres points accessibles à ce même point O; cette remarque s'applique au problème suivant.

48. Évaluer le rapport des distances entre un point inaccessible et deux points donnés. — Au milieu de AK *(fig. 195)*, élevons une perpendiculaire HR; cette droite étant la bissectrice de l'angle AOB, nous avons

$$\frac{OB}{OA} = \frac{RB}{RA}.$$

Il suffit donc de chaîner les longueurs RB, RA, puis de prendre le rapport des deux nombres obtenus.

49. Remarque. — Les constructions indiquées dans les deux paragraphes précédents fournissent deux relations entre OA et OB; elles font connaître la différence et le rapport des distances OA et OB; elles les déterminent donc complètement. On pourra, avec avantage, adopter cette méthode, lorsqu'on aura besoin, simultanément, des deux longueurs OA, OB.

50. Distance d'un point inaccessible à une droite accessible. — Soit AB la droite proposée; on considère un point O, situé dans une région inaccessible U, mais visible; on demande d'évaluer la distance OH, de O à AB.

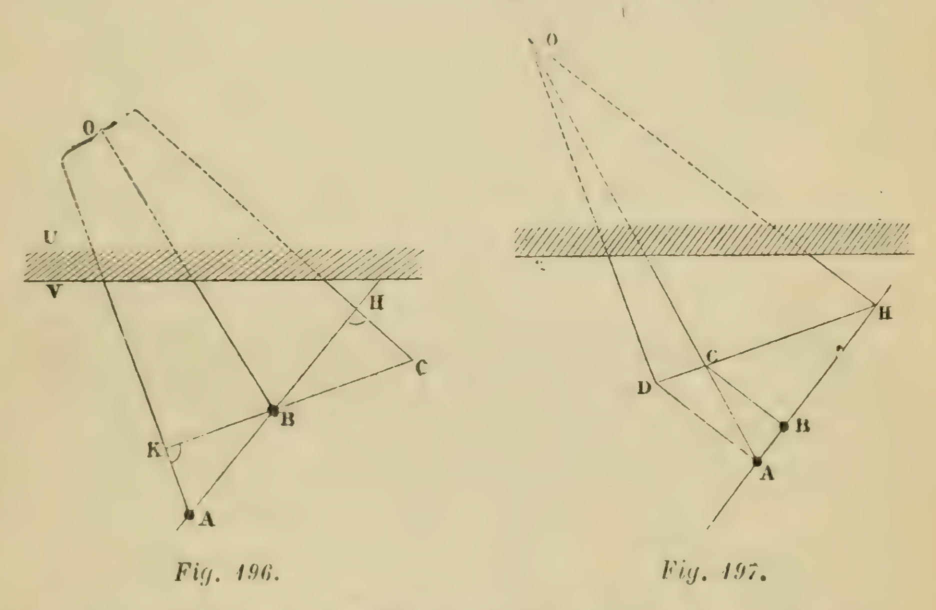


Fig. 196. *Fig. 197.*

1° Abaissons la perpendiculaire BK sur OA, puis prolongeons-la jusqu'à ce qu'elle rencontre HO au point C; les triangles semblables CHB, AHO donnent

$$OH = \frac{AH.BH}{CH}.$$

2° On peut aussi utiliser la propriété si remarquable du trapèze (*Première partie*, § 14).

Ayant fait la construction indiquée *(fig. 197)*, la propriété rappelée donne

$$\frac{1}{OH} = \frac{1}{CB} - \frac{1}{DA}.$$

Examen d'un cas particulier. — Mais cette méthode exige que le pied H, de la perpendiculaire abaissée de O sur AB, soit placé dans la partie accessible V; supposons, comme le montre la *fig. 198*, qu'il n'en soit pas ainsi.

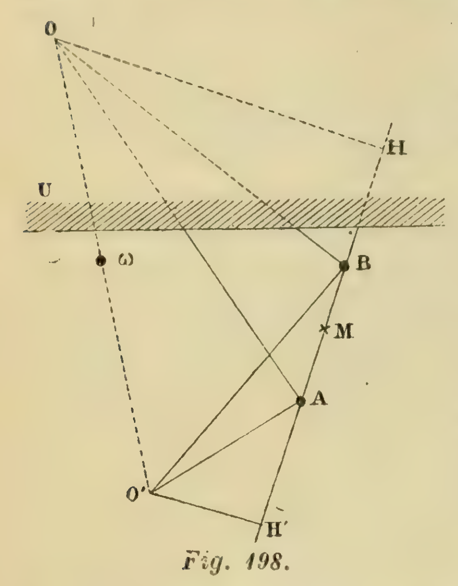


Fig. 198.

1° Élevons O'A, O'B respectivement perpendiculaires sur OA, OB; puis projetons le point O', en H', sur AB. Nous observerons d'abord que les points H et H' sont isotomiques sur AB, c'est-à-dire symétriques par rapport au point M milieu de AB. En effet, le quadrilatère OO'AB est inscriptible et le centre ω est situé au milieu de OO'. La perpendiculaire abaissée de ω sur HH' tombe donc au milieu de ce segment; d'autre part, AB étant une corde du cercle considéré, cette perpendiculaire tombe aussi au milieu de AB. Ainsi HH' et AB admettent le même point milieu; en d'autres termes, H,H' sont isotomiques sur AB.

Cette remarque étant faite, observons que les triangles semblables O'AH', OAH donnent

$$\frac{OH}{AH'} = \frac{AH}{O'H'}.$$

Et comme $AH = H'B,$

on a, finalement, $$OH = \frac{H'A.H'B}{O'H'}.$$

Cette égalité permettra de calculer OH, quand on aura relevé les longueurs O'H', H'A, H'B.

2° La solution précédente est, dans la pratique, assez simple, aussi simple du moins que paraît le comporter la nature du problème; mais elle exige que le point H', isotomique de H, sur AB, soit situé dans les limites du terrain sur lequel on opère. Dans certains cas, si le point H est très éloigné de M, cette condition pourra n'être pas remplie ou, tout au moins.

le grand éloignement de H′ pourra donner lieu à de longs chaînages et à des difficultés pratiques, de natures diverses.

Voici, pour ce cas particulier, une solution qui n'exige que des chaînages exécutés dans le voisinage des points donnés.

Abaissons la perpendiculaire BC sur OA. Nous avons d'abord

$$OH = BC.\frac{OA}{BA}.$$

Menons maintenant, par C, une parallèle CD à OB; nous avons

$$\frac{OA}{BA} = \frac{CA}{DA};$$

et par conséquent,

$$OH = \frac{BC.CA}{DA}.$$

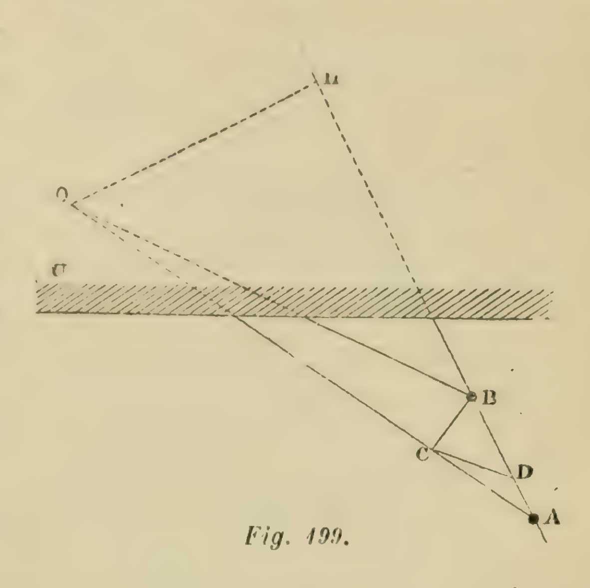


Fig. 199.

51. Distance d'un point inaccessible S, très éloigné, à une droite donnée AB. — Dans certains cas, le point considéré est très éloigné, et visible seulement dans les lunettes. On peut imaginer, pour résoudre ces problèmes dans lesquels on fait entrer la considération de grandes distances, un appareil formé de deux lunettes superposées, disposées sur un pied pouvant se fixer sur le sol, et dont les directions sont rigoureusement rectangulaires. Au fond, cet appareil est une équerre ordinaire, à l'usage des grandes distances. Voici comment on peut l'utiliser pour la solution du problème qui nous occupe.

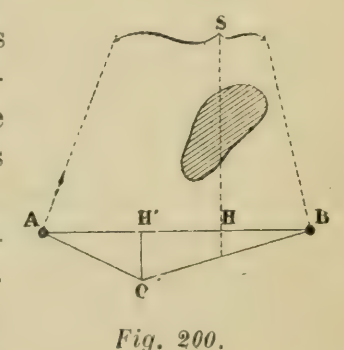


Fig. 200.

Aux points A, B visons le point S; puis jalonnons les droites qui partent de ces points, perpendiculairement aux directions AS, BS. Nous obtenons ainsi un point O; pour des

raisons évidentes, il se projette sur AB en un point H′ isotomique de H, projection de S sur AB. Les triangles semblables BOH′, SBH donnent, d'ailleurs,

$$SH = \frac{BH'.BH}{OH'}.$$

Et comme $AH' = BH$,

nous avons finalement

$$SH = \frac{AH'.BH'}{OH'}.$$

Cette formule permet de calculer la distance inconnue SH au moyen des longueurs AH′, BH′, OH′, faciles à chaîner; car elles sont aussi petites que l'on voudra, bien que SH puisse être très grand.

Remarque. — On observera que la solution précédente n'exige nullement que le point H soit déterminé et, dans certains cas, s'il existait par exemple un obstacle entre H et S, cette détermination ne serait pas facile.

Nous rencontrons ici, incidemment, une solution du problème suivant : *Abaisser d'un point* S, *inaccessible, une perpendiculaire sur une droite accessible* AB; S *étant invisible du pied* H *de la perpendiculaire en question.*

On détermine le point H′, comme nous l'avons expliqué; puis on prend l'isotomique H.

52. Distance à un but inaccessible, mobile sur une trajectoire rectiligne. — Nous allons supposer, maintenant, que le but proposé est mobile sur une trajectoire; mais nous n'examinerons que les cas où cette trajectoire est rectiligne; mais nous reviendrons, dans le Chapitre que nous consacrons aux problèmes d'artillerie, sur le cas général, celui où la trajectoire décrite par le but est quelconque.

Soit O la position de l'observateur; un point R est mobile sur un terrain inaccessible, ou très éloigné, mais sur une droite Δ déterminée par deux points E, F visibles de différents points du terrain qui avoisine le point O. Effectuons les jalonnements qu'indique la figure et déterminons notamment les points P, Q où la droite qui va, de l'œil de l'observateur, au point mobile R, coupe les alignements BD, AC.

Une propriété connue prouve que CODK est une ponctuelle harmonique; la ponctuelle QOPR, elle aussi, est donc harmo-

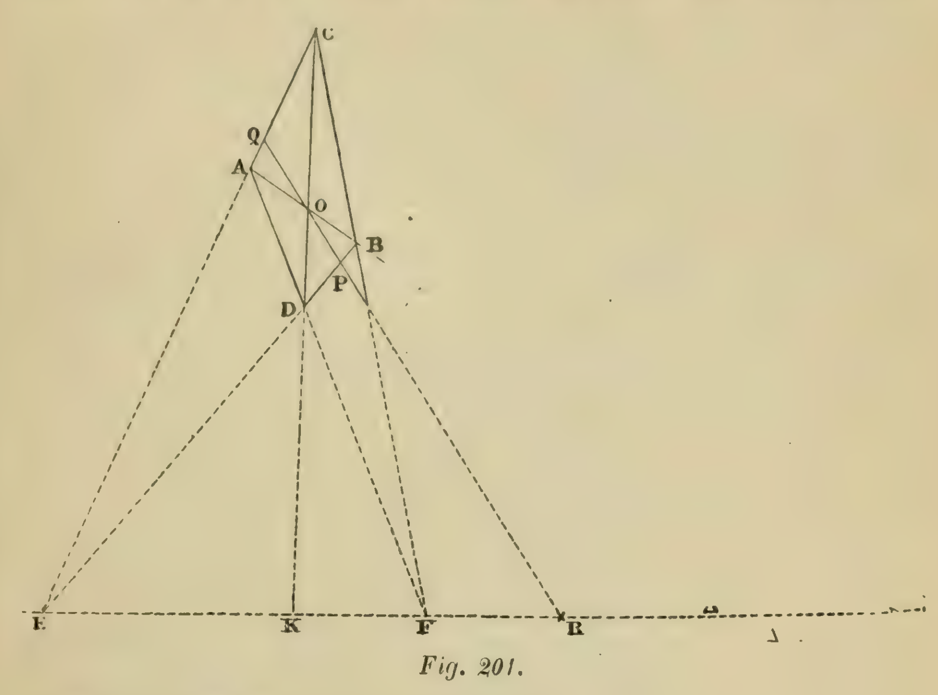


Fig. 201.

nique. En conséquence, nous avons :

$$\frac{2}{RO} = \frac{1}{OP} - \frac{1}{OQ}.$$

On pourra, par l'application de la table des inverses, calculer rapidement la distance RO, connaissant les distances OP et OQ.

Dans la pratique, on doit opérer avec deux cordeaux, divisés en décimètres, de zéro à cent. L'origine de ces cordeaux étant en O; les longueurs OP, OQ sont relevées par une simple lecture faite par les aides placés aux points P, Q; un calculateur, muni de la table des inverses, fait la lecture des nombres $\frac{1}{OP}$, $\frac{1}{OQ}$; une simple soustraction et une nouvelle lecture donne la valeur du nombre x,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{OP} - \frac{1}{OQ}.$$

La distance inconnue est le double de la longueur x, ainsi calculée.

Le principe de cette solution est emprunté au livre de Servois (*loc. cit.*, p. 62). Nous avons seulement modifié celle-ci de manière à l'adapter à la pratique de la table des inverses; et, telle que nous la présentons ici, elle nous paraît susceptible de certaines applications. Elle peut notamment permettre d'apprécier, sans calcul, et par la seule lecture des nombres OP et OQ, si le point mobile R se rapproche, ou non, de O.

53. Le problème de la poursuite. — Nous allons enfin supposer que les deux points, dont la distance est inconnue, sont mobiles, et animés d'un mouvement uniforme.

Sans vouloir déterminer la valeur absolue de la distance des deux points mobiles, on peut demander si cette distance augmente ou diminue. Nous nous occuperons d'abord de ce problème; qui se résout très simplement et sans aucun calcul.

Soit Δ la droite sur laquelle nous supposons un mobile H poursuivi par un autre mobile A. L'observateur, chargé d'étudier les variations de cette poursuite, se place en K, à une certaine distance de Δ, sur une perpendiculaire à Δ. De ce point K, avec la fausse équerre, il relève l'angle α sous lequel on aperçoit H et A ; cela fait, il laisse un jalon planté en K. Puis, se déplaçant en même temps que H de façon à rester toujours, avec ce point mobile, sur une perpendiculaire à Δ, il vient occuper, sur la droite H′K′, un point I, tellement choisi qu'il aperçoive encore les deux points mobiles A′, H′, sous l'angle α, précédemment observé. De ce point I, visant H′, puis le jalon laissé en K, il relève un angle φ qu'on pourrait appeler l'*angle de poursuite;* cet angle, pour les raisons que nous allons donner, permet d'apprécier si la distance des deux mobiles augmente, diminue ou reste constante.

Fig. 202.

Nous ferons d'abord observer que l'opérateur, dans le mouvement qu'il exécute pour voir constamment les points

mobiles sous le même angle α, décrit une droite; en supposant, bien entendu, que les mobiles considérés sont, comme nous l'avons dit, animés, l'un et l'autre, d'une vitesse constante.

Les triangles semblables AHK, A'H'I donnent :

$$t = \frac{HK}{HA} = \frac{H'I}{H'A'} = \frac{RK}{HA - H'A'},$$

t désignant une constante donnée, puisque α est supposé invariable.

On a donc

$$t = \frac{RK}{HA' + AA' - (HH' + HA')},$$

ou

$$t = \frac{RK}{AA' - HH'}.$$

Soit θ le rapport des vitesses des deux mobiles, on a :

$$\theta = \frac{AA'}{HH'}.$$

Par suite,

$$t(\theta - 1) = \frac{RK}{HH'} = \frac{RK}{RI}. \qquad (1)$$

L'angle H'IK $= \varphi$, que nous appelons *angle de poursuite* est donc constant; et le lieu décrit par le point I est une droite.

La formule (1) prouve que si φ est obtus, le mobile poursuivant se rapproche de l'autre; au contraire, si φ est aigu, la distance des deux mobiles augmente; enfin, la distance reste constante si φ est un angle droit. L'exactitude de ces résultats est évidente, et, pour vérifier ceux-ci, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à la formule (1); mais il était bon d'établir cette égalité pour montrer que, dans la solution présente, l'observateur devait se déplacer sur une droite déterminée.

Lorsque la poursuite s'effectue par des mouvements non uniformes, en relevant l'angle de poursuite, pour des intervalles déterminés, équidistants si l'on veut, on obtiendra une certaine ligne brisée correspondante et, par suite, une courbe que l'on peut tracer en réunissant, par un trait continu, les sommets de cette ligne. La *courbe de poursuite*, comme on pourrait l'appeler, indiquera les variations qui ont été éprouvées par

les distances des deux mobiles, aux divers moments de la poursuite.

2° Il est, certainement, plus difficile d'évaluer, à un instant donné, la distance absolue des deux points mobiles; voici pourtant une solution de cette question, assez simple, relativement (*).

Supposons que l'opérateur après avoir relevé l'angle α, au point K, se transporte, avec la même vitesse que H, parallèlement à AH, de K en K'. Arrivé au point K', il observe les points mobiles A', H', dans leur nouvelle position; soit β l'angle relevé en K'.

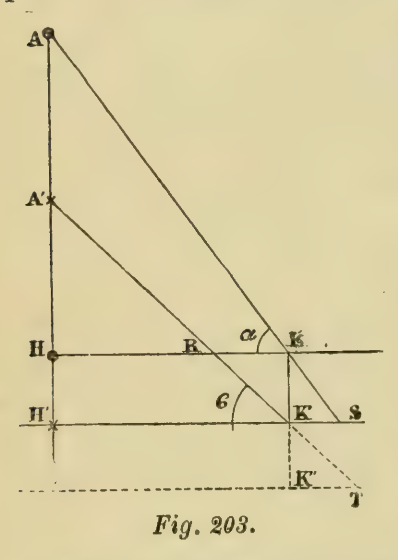


Fig. 203.

On voit facilement que la distance des points mobiles augmente, diminue, ou reste constante, suivant que l'on a $\beta > \alpha$, $\beta < \alpha$, ou $\beta = \alpha$; et cette remarque permet de résoudre encore le problème de la poursuite, quand on veut simplement apprécier si le mobile A gagne, ou perd, du terrain, sur le mobile H qu'il poursuit.

Mais proposons-nous d'évaluer, exactement, le rapport des vitesses des deux mobiles; de cette connaissance, nous déduirons la vitesse de A, connaissant celle de H; et, par suite, la variation qu'a subie la distance des deux mobiles, aux deux instants observés.

Nous avons

$$AA' = AH - A'H = AH - A'H' + HH',$$

ou
$$AA' = KK'.\frac{HK}{K'S} - KK'.\frac{H'K'}{RK} + HH';$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad \frac{AA'}{HH'} = 1 + HK\left(\frac{1}{K'S} - \frac{1}{RK}\right).$$

(*) On peut, considérer la solution présente comme purement théorique. Néanmoins, certains cas pourraient se présenter, pour lesquels son application deviendrait utile.

Le point S peut être déterminé par un aide qui, partant de K avec une vitesse convenable, se déplace dans la direction KA; K'S est donc une longueur que l'on peut relever avec le ruban divisé.

Quant à la longueur RK elle n'est pas connue. car on ne doit pas admettre, dans le cas présent, que l'on puisse revenir en arrière de la position H'K'. Il faut alors supposer qu'un second aide parte de K', dans la direction déterminée A'K'. Au bout d'un temps égal à celui qui a séparé les deux observations faites en K et en K', le second aide occupe une position T, et, le mouvement étant uniforme, on a $K''T = RK$.

La formule (1), dans laquelle, pour simplifier le calcul, on supposera $HK = 100^m$, permet de calculer le rapport $\frac{AA'}{HH'}$. On pourra, avantageusement, pour ce calcul, faire usage, de la table des inverses. Malgré ces diverses remarques, on peut prétendre que la solution précédente est plutôt théorique ; mais il ne paraît pas facile d'en imaginer une autre plus pratique; le problème en question offre nécessairement, au point de vue des exigences matérielles qu'il comporte, une certaine difficulté. *(A suivre.)*

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1887

Mathématiques élémentaires.

La portion de plan comprise dans un angle droit XOY étant partagée en un nombre infini de carrés égaux, par des parallèles à OY et par des parallèles à OX, on convient de fixer la position de l'un quelconque de ces carrés, dans cet angle, soit par deux nombres entiers x et y appelés les *coordonnées* de ce carré, soit par un nombre entier z appelé le *numéro* du même carré.

Les coordonnées x et y d'un carré sont déterminées comme il suit. On groupe les carrés par bandes parallèles à OY et par bandes parallèles à OX. On désigne par x le rang d'une bande parallèle à OY comptée en prenant pour première bande celle qui est bordée par OY, et en avançant dans le sens OX pour passer d'une bande à la suivante; on désigne par y le rang d'une bande parallèle à OX, comptée en prenant pour première bande celle qui est bordée par OX, et en avançant dans le sens OY, pour passer d'une bande à la suivante. Les deux nombres entiers x et y, ainsi définis, sont les coordonnées du carré

commun à la bande de rang x parallèle à OY et à la bande de rang y parallèle à OX.

Le numéro z d'un carré est déterminé comme il suit. On groupe les carrés par files obliques disposées comme l'indiquent, sur la figure ci-dessus, les droites en traits interrompus. La première file contient un carré, la seconde deux, la troisième trois...; la file oblique, de rang k, contient k carrés. On donne le numéro 1 au carré de la première file, les numéros 2, 3, aux carrés de la seconde, les numéros 4, 5, 6, aux carrés de la troisième, etc., en avançant sur chaque file oblique, de OX vers OY, pour passer d'un carré au carré suivant.

On voit par exemple, sur la figure ci-contre, que le carré qui a pour *coordonnées* $x = 2$, $y = 5$, a pour *numéro* $z = 20$.

Par ces conventions, à un groupe de deux nombres entiers quelconques x et y, on fait correspondre un nombre entier z, et, réciproquement, à un nombre entier quelconque z, on fait correspondre un groupe de deux nombres entiers x et y.

Cela posé, on montrera que les coordonnées x et y de l'un quelconque des carrés d'une même file oblique, et le rang k de cette file, sont trois nombres entiers qui satisfont toujours à une même relation; puis on résoudra les questions suivantes :

1° Étant données les coordonnées x et y d'un carré, trouver le numéro z de ce carré. Appliquer en faisant $x = 27$, $y = 41$.

2° Étant donné le numéro z d'un carré, trouver les coordonnées x et y de ce carré. Appliquer en faisant $z = 248$.

3° Compter, parmi les n carrés dont les numéros sont les nombres 1, 2, 3..,n, combien il y en a pour lesquels la somme $x + y$ des coordonnées est un nombre pair, et combien pour lesquels le produit xy des coordonnées est un nombre pair. Appliquer dans le cas où $n = 157$, et dans le cas où $n = 180$.

4° Les lettres x et y désignant toujours les coordonnées d'un carré dont le numéro est z, et la lettre a représentant un nombre donné plus grand que 1, déterminer les valeurs qu'il faut donner au numéro z pour que l'expression

$$ax + (a + 2)y - 2z$$

ait la plus grande valeur possible. Appliquer dans les trois cas suivants : $a = 11$, $a = 12$, $a = 11,5$; et, dans chaque cas, donner la valeur maxima de l'expression. *(24 juin de 10 h. à 4 h. 1/2.)*

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

JUILLET 1887

POITIERS (1e série).

Mathématiques.

Les trois côtés d'un triangle étant :

$$a = \sqrt{2};$$
$$b = 2;$$
$$c = 2 + \sqrt{3}.$$

On demande : 1° de vérifier que la hauteur perpendiculaire au côté c a pour longueur l'unité ; 2° de calculer les trois angles A, B, C.

— Comment obtient-on l'expression du volume d'une pyramide ?

POITIERS (2e série).

Mathématiques.

— Une personne a souscrit trois billets ; le premier, de a francs, payable dans t jours ; le second, de a' francs, payable dans t' jours ; le troisième, de a'' francs, payable dans t'' jours. Elle désire remplacer ces trois billets par un autre de A francs. Quelle sera l'échéance de ce billet, le taux de l'escompte étant r pour un jour et un franc ? (Discuter.)

— Exposer rapidement la théorie des phases de la Lune.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

SESSION D'AVRIL 1887

PARIS

1. — Étant donnée une sphère de rayon R, la partager par un plan en deux zones telles, que les deux sommes obtenues en ajoutant, à l'aire de chacune de ces deux zones, l'aire de la section de la sphère par le plan, soient dans un rapport donné K. Montrer que le problème aura toujours une solution et une seule.

Réponses :

1° $K > 1$ $\qquad x = R\,\dfrac{2\sqrt{K^2 - K + 1} - (K + 1)}{K - 1}$,

2° $K < 1$ $\qquad x = R\,\dfrac{2\sqrt{K^2 - K + 1} - (K + 1)}{1 - K}$.

— Par quatre points, non situés dans un même plan, on peut toujours faire passer une sphère ; et l'on n'en peut faire passer qu'une.

2. — Mener dans une sphère de rayon donné R trois plans parallèles entre eux, de manière que les surfaces des quatre zones ainsi obtenues, ANA', AA'BB', BB'CC', CKC' soient entre elles comme les termes d'une progression géométrique de raison donnée q.

Réponses : *Hauteur des zones :*

$$x = \frac{2R}{1 + q + q^2 + q^3}$$

$$y = \frac{2Rq}{1 + q + q^2 + q^3}$$

$$z = \frac{2Rq^2}{1 + q + q^2 + q^3}$$

$$t = \frac{2Rq^3}{1 + q + q^2 + q^3}$$

— Extraire la racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire, à $\frac{1}{n}$ près, n désignant un nombre entier.

3. — Couper une sphère, de rayon R, par un plan de telle sorte que le rapport des volumes des deux segments détachés par le plan soit égal à m fois le rapport des aires des calottes sphériques correspondantes.

Réponse : $$\begin{cases} m > 1, & x = R\dfrac{m - 3 + \sqrt{9m^2 - 14m + 9}}{2(m-1)}. \\ m < 1, & x = R\dfrac{m - 3 - \sqrt{9m^2 - 14m + 9}}{2(m-1)} \end{cases}$$

Quelle est la valeur de tang. $\frac{\pi}{4}$? En déduire celle de tang. $\frac{\pi}{8}$.

Réponse: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

4. — Calculer $\sin\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$ connaissant $\sin a$. Quel signe faudra-t-il prendre, devant les radicaux, quand l'arc a sera égal à 2473°?

Réponse : $$\begin{cases} \sin\dfrac{a}{2} = \dfrac{\pm\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}}{2} \\ \cos\dfrac{a}{2} = \dfrac{\pm\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}}{2} \\ \sin\dfrac{2473^\circ}{2} = \dfrac{-\sqrt{1+\sin 2473^\circ} + \sqrt{1-\sin 2473^\circ}}{2} \\ \sin\dfrac{2473^\circ}{2} = \dfrac{-\sqrt{1+\sin 2473^\circ} - \sqrt{1-\sin 2473^\circ}}{2} \end{cases}$$

Prouver que les forces appliquées à un corps solide peuvent toujours être réduit à deux, dont l'une est appliquée en un point arbitrairement choisi.

5. — Quelle est la somme des termes d'une progression géométrique? Etant donnée une sphère de rayon R, à quelle distance x du centre distance faut-il mener un plan DE parallèle à un plan P passant par le centre de la sphère pour que le volume du segment DFE, ainsi obtenu, valent à celui du cylindre droit DD'E'E ayant pour base la section tenue, et, pour hauteur, x.

Réponse : $x = \dfrac{R(\sqrt{3} - 1)}{2}$

BIBLIOGRAPHIE

La *Table de logarithmes* que M. Reboul vient de publier est aussi élégante qu'originale. Elle tient tout entière entre deux pages et contient dans ce court espace les indications nécessaires pour se servir des tables et même les règles du calcul des logarithmes. Sur une page se trouvent les logarithmes de tous les nombres de 1 à 10,000, sur l'autre

page se trouvent les *antilogarithmes*, c'est-à-dire les nombres correspondants à un logarithme donné. Les logarithmes sont à quatre décimales, mais il nous semble qu'on ne peut pas compter d'une manière absolue sur la quatrième décimale: ainsi, si l'on cherche le logarithme de 1011, on trouve par la seconde ligne 3,0048 et au contraire par la onzième ligne 3,0047. Mais, dans la plupart des cas, cette approximation est bien suffisante et le travail de M. Reboul ne peut qu'aider à répandre l'usage des logarithmes. Les deux feuilles sont collées sur un élégant carton qui se ferme de manière à pouvoir contenir des papiers : un cordon noir fixé dans toute la longueur est même tout prêt à recevoir une feuille blanche ou mieux de papier buvard. Nous croyons qu'ainsi garni il constituerait un élégant objet de travail que tous les écoliers des hautes classes seraient heureux de posséder.

L. Lévy.

Chez Warnier, éditeur, 25, rue de la Victoire et 48, rue Laffitte.

QUESTION 202

Solution par A. Boutin, professeur au collège de Vire.

---

(1) *Etant donné un contour polygonal convexe* ABCDE... *dont les côtés successifs forment une progression géométrique décroissante indéfinie et dont les côtés successifs font entre eux un angle constant :*

1° On regarde les côtés du contour comme représentant des forces tirant dans le sens indiqué par l'ordre alphabétique, et l'on demande de trouver la résultante de toutes ces forces;

2° Aux sommets successifs A, B, C, D... *du contour, on place des poids formant une progression géométrique décroissante, et l'on demande le centre de gravité de ce système de poids;*

3° On regarde les côtés du contour comme des lignes pesantes, et l'on demande de trouver le centre de gravité de ce contour.

(2) *Sur un arc de cercle donné, on prend* n *points équidistants, sur lesquels on place des poids croissant en progression géométrique : trouver le centre de gravité de ce système de poids.*

(3) *Sur un mètre cube homogène, on place un decimètre cube de la même matière, de manière que les centres soient sur une même perpendiculaire à la face commune; sur celui-ci, on place, de la même manière, un centimètre cube; et ainsi de suite. Position du centre de gravité du corps ainsi formé.* (Dellac.)

1. — Considérons deux axes rectangulaires Ax, Ay, dont l'un Ax est dirigé suivant AB. Soit l la longueur de AB, q la raison de la progression, $(q < 1)$. α l'angle de BC avec Ax. CD, DE... feront avec Ax les angles respectifs 2α, 3α...

Projetons toutes les forces, d'abord sur l'axe des x, puis sur l'axe des y, et soient X, Y, les sommes algébriques de ces projections :

On a :

(1) $X = l(1 + q\cos\alpha + q^2\cos 2\alpha + q^3\cos 3\alpha + \ldots.)$

(2) $Y = l(q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + q^3\sin 3\alpha + \ldots.)$

M. Dellac, a donné (*J. M. E.*, année 1877, p. 44) les sommes des séries entre parenthèses; d'ailleurs nous les sommerons plus loin. On a donc en se reportant à ce résultat :

$$X = \frac{l(1 - q\cos\alpha)}{1 - 2q\cos\alpha + q^2} \qquad Y = \frac{lq\sin\alpha}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}.$$

La résultante cherchée est

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{l}{\sqrt{1 - 2q\cos\alpha + q^2}}.$$

En se reportant à la Note citée (Problème du Myosotis), on voit que R est représentée par la droite AO, en grandeur. L'angle de R avec Ax, est donné par la formule :

$$\cos\varphi = \frac{1 - q\cos\alpha}{\sqrt{1 - 2q\cos\alpha + q^2}} = \cos\lambda.$$

Donc AO représente également la direction de R.

Pour achever de déterminer la position de R, cherchons la distance r de l'origine à R. Le théorème des moments donne :

$$Rr = l^2\begin{bmatrix} q\sin\alpha + q^2(\sin 2\alpha + q\sin\alpha) \\ + q^3(\sin 3\alpha + q\sin 2\alpha + q^2\sin\alpha) \\ + q^4(\sin 4\alpha + q\sin 3\alpha + q^2\sin 2\alpha + q^3\sin\alpha) + \ldots.. \end{bmatrix}$$

$$\text{ou} \quad Rr = l^2\begin{bmatrix} q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + q^3\sin 3\alpha + \ldots \\ + q^2(q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + q^3\sin 3\alpha + \ldots) \\ + q^4(q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + q^3\sin 3\alpha + \ldots) \\ + \ldots \end{bmatrix}$$

$$= l^2(q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + q^3\sin 3\alpha + \ldots)(1 + q^2 + q^4 + \ldots)$$

Ainsi : $$Rr = l^2\frac{q\sin\alpha}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}\cdot\frac{1}{1 - q^2}.$$

Remplaçant R par sa valeur, on a

$$r = \frac{lq \sin \alpha}{(1-q^2)\sqrt{1 - 2q\cos\alpha + q^2}}.$$

2° Soient : p le poids A, q_1 la raison de la progression des poids, x_1, y_1 les coordonnées du centre de gravité cherché. On a, en prenant les moments par rapport à Ay, Ax :

$$px_1(1 + q_1 + q_1^2 + \ldots) = \begin{cases} pq_1 l + pq_1^2(l + lq\cos\alpha) \\ + pq_1^3(l + lq\cos\alpha + lq^2\cos 2\alpha) \\ + pq_1^4(l + lq\cos\alpha + lq^2\cos 2\alpha + lq^3\cos 3\alpha) \\ + \ldots \end{cases}$$

$$\frac{px_1}{1-q_1} = pl(q_1 + q_1^2 + q_1^3 + \ldots) + plq\cos\alpha(q_1^2 + q_1^3 + \ldots)$$

$$+ plq^2\cos 2\alpha(q_1^3 + q_1^4 + q_1^5 + \ldots) + \ldots$$

$$= \frac{plq_1}{1-q_1} + \frac{plq\cos\alpha . q_1^2}{1-q_1} + \frac{plq^2\cos 2\alpha . q_1^3}{1-q_1} + \ldots$$

$$x_1 = lq_1(1 + qq_1\cos\alpha + q^2q_1^2\cos 2\alpha + q^3q_1^3\cos 3\alpha + \ldots)$$

$$x_1 = \frac{lq_1(1 - qq_1\cos\alpha)}{1 - 2qq_1\cos\alpha + q^2q_1^2}.$$

Un calcul semblable donne :

$$y_1 = lq_1(qq_1\sin\alpha + q^2q_1^2\sin 2\alpha + q^3q_1^3\sin 3\alpha + \ldots)$$

$$y_1 = \frac{lqq_1^2\sin\alpha}{1 - 2qq_1\cos\alpha + q^2q_1^2}.$$

3° Les poids des côtés du contour sont proportionnels aux longueurs de ces côtés et appliqués en leurs milieux. Le théorème des moments appliqué par rapport à Ay, puis par rapport à Ax, donne, pour les coordonnées (x_2, y_2) du centre de gravité du contour :

$$lx_2(1 + q + q^2 + \ldots) = \begin{cases} l.\frac{l}{2} + lq(l + \frac{lq}{2}\cos\alpha) \\ + lq^2(l + lq\cos\alpha + \frac{lq^2}{2}\cos 2\alpha) \\ + lq^3(l + lq\cos\alpha + lq^2\cos 2\alpha + \frac{lq^3}{2}\cos 3\alpha) \\ + \ldots \end{cases}$$

$$\frac{x_2}{1-q} = \frac{l}{2}(1 + q^2\cos\alpha + q^4\cos 2\alpha + q^6\cos 3\alpha + \ldots)$$

$$+ lq(1 + q + q^2 + \ldots) + lq^2\cos\alpha(q + q^2 + q^3 + \ldots)$$

$$+lq^3 \cos 2\alpha(q^2 + q^3 + \ldots) + \ldots$$

$$= \frac{l}{2} \cdot \frac{1 - q^2 \cos\alpha}{1 - 2q^2 \cos\alpha + q^4} + lq \cdot \frac{1}{1-q} + lq^2 \cos\alpha \frac{q}{1-q}$$

$$+ lq^3 \cos 2\alpha \frac{q^2}{1-q} + \ldots$$

$$= \frac{l}{2} \cdot \frac{1 - q^2 \cos\alpha}{1 - 2q^2 \cos\alpha + q^4} + \frac{lq}{1-q}(1 + q^2 \cos\alpha + q^4 \cos 2\alpha + \ldots)$$

$$= \frac{l}{2} \cdot \frac{1 - q^2 \cos\alpha}{1 - 2q^2 \cos\alpha + q^4} + \frac{lq}{1-q} \cdot \frac{1 - q^2 \cos\alpha}{1 - 2q^2 \cos\alpha + q^4},$$

$$x_2 = \frac{l}{2} \cdot \frac{1 - q^2 \cos\alpha}{1 - 2q^2 \cos\alpha + q^4}(1 + q) \cdot$$

Un calcul analogue au précédent donne :

$$y_2 = \frac{l}{2} \cdot \frac{q^2 \sin\alpha}{1 - 2q^2 \cos\alpha + q^4}(1 + q).$$

2. — Soient r le rayon de cercle, $(n-1)\alpha$ l'angle au centre de l'arc considéré, divisé en $n - 1$ parties égales. Soit l'unité le premier poids, q, q^2, ... les poids suivants. Considérons deux axes rectangulaires passant par le centre, l'axe des x étant dirigé suivant le rayon qui passe par le premier poids ; soient x, y les cordonnées du centre de gravité cherché. Le théorème des moments donne, tout de suite : (*)

$$x(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = r\left[\begin{array}{c} 1 + q\cos\alpha + q^2 \cos 2\alpha + \ldots \\ + q^{n-1} \cos (n-1)\alpha \end{array}\right],$$

$$y(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = r\left[\begin{array}{c} q\sin\alpha + q^2 \sin 2\alpha + \ldots \\ + q^{n-1} \sin (n-1)\alpha \end{array}\right];$$

ou $$\frac{x(q^n - 1)}{q-1} = r(1 + \mathrm{A}), \qquad \frac{y(q^n - 1)}{q - 1} = r\mathrm{B}.$$

On doit sommer les suites finies :

$$\mathrm{A} = q\cos\alpha + q^2 \cos 2\alpha + q^3 \cos 3\alpha + \ldots + q^{n-1} \cos (n-1)\alpha \quad (4)$$

$$\mathrm{B} = q\sin\alpha + q^2 \sin 2\alpha + q^3 \sin 3\alpha + \ldots + q^{n-1} \sin (n-1)\alpha \quad (5)$$

(*) M. Dellac observe, dans une solution qu'il nous communique, que si l'on suppose $q = 1$. le contour polygonal n'est plus convergent ; il est inscrit à un cercle. On obtient ainsi le centre de gravité d'une suite infinie de points pesants. — Si on en retranche une autre suite infinie commençant au point $(n+1)^{ième}$, suite, dont on trouve de même le centre de gravité, on obtient le centre de gravité des n premiers points pesants.

Nous ne croyons pas qu'on le puisse sans faire appel à la formule de Moivre. Cette formule consiste dans l'identité :

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + i\sin m\alpha.$$

Ceci posé, ajoutons les suites (4) et (5) membre à membre, après avoir multiplié la seconde par i. On a :

$$A + Bi = q(\cos\alpha + i\sin\alpha) + q^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \dots$$
$$+ q^{n-1}[\cos(n-1)\alpha + i\sin(n-1)\alpha];$$

ou, d'après la formule de Moivre :

$$A + Bi = q(\cos\alpha + i\sin\alpha) + q^2(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 + \dots$$
$$+ q^{n-1}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{n-1},$$

le second membre est une progression géométrique :

$$A + Bi = \frac{q^n(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - q(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{q(\cos\alpha + i\sin\alpha) - 1}.$$

Employant de nouveau la formule de Moivre, et ordonnant par rapport à i, on a

$$A + Bi = \frac{(q^n\cos n\alpha - q\cos\alpha) + i(q^n\sin n\alpha - q\cos\alpha)}{q\cos\alpha - 1 + iq\sin\alpha}.$$

Séparant, dans le second membre, les parties réelles et les parties imaginaires, au moyen de l'identité :

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'i}{a'^2 + b'^2},$$

on trouve

$$A + Bi = \frac{q^{n+1}\cos(n-1)\alpha - q^n\cos n\alpha - q^2 + q\cos\alpha}{q^2 - 2q\cos\alpha + 1}$$
$$+ i\frac{q^{n+1}\sin(n-1)\alpha - q^n\sin n\alpha + q\sin\alpha}{q^2 - 2q\cos\alpha + 1}$$

on a donc :

$$A = \frac{q^{n+1}\cos(n-1)\alpha - q^n\cos n\alpha - q^2 + q\cos\alpha}{q^2 - 2q\cos\alpha + 1}, \quad (6)$$

$$B = \frac{q^{n+1}\sin(n-1)\alpha - q^n\sin n\alpha + q\sin\alpha}{q^2 - 2q\cos\alpha + 1}; \quad (7)$$

d'où

$$x = \frac{q - 1}{q^n - 1} \cdot \frac{r\,q^{n+1}\cos(n-1)\alpha - q^n\cos n\alpha - q\cos\alpha + 1}{q^2 - 2q\cos\alpha + 1}$$

$$y = \frac{r(q - 1)}{q^n - 1} \cdot \frac{q^{n+1}\sin(n-1)\alpha - q^n\sin n\alpha + q\sin\alpha}{q^2 - 2q\cos\alpha + 1}$$

Remarque. — Les formules (6) et (7), si l'on y suppose $q < 1$

et n infini, donnent les suites qui figurent dans (1) et (2); savoir :

$$\frac{x}{l} - 1 = A, \qquad \frac{y}{l} = B.$$

3. — Soit x la distance du centre de gravité cherché à la base inférieure du mètre cube. Appliquant le théorème des moments par rapport au plan de cette base, on a (*) :

$$x\left(1+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\ldots\right)=1.\frac{1}{2}+\frac{1}{10^3}\left(1+\frac{1}{2.10}\right)+\frac{1}{10^6}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{2.10^2}\right)$$

$$+\frac{1}{10^9}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{2.10^3}\right)+\ldots.$$

$$\frac{x.1000}{999}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^8}+\ldots\right)+1\left(\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^9}+\right)$$

$$+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^9}+\frac{1}{10^{12}}+\ldots\right)+\frac{1}{10^2}\left(\frac{1}{10^9}+\frac{1}{10^{12}}+\ldots\right)$$

$$=\frac{10000}{2.9999}+\frac{1}{10^3}.\frac{1000}{999}+\frac{1}{10^7}.\frac{1000}{999}+\frac{1}{10^{11}}.\frac{1000}{999}+\ldots$$

$$=\frac{10000}{2.9999}+\frac{1}{999}\left(1+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^8}+\frac{1}{10^{12}}+\ldots\right)$$

$$=\frac{10000}{2.9999}+\frac{1}{999}.\frac{10000}{9999}.$$

$$x=\frac{5005}{9999}=0^{m},500550055055\ldots$$

Nota. — La troisième partie, avec certaines généralisations intéressantes a été également traitée par M. Moulet, professeur au collège de Manosque.

QUESTION 212

Solution, par Ignacio Beyens, capitaine du Génie à Cadix.

Démontrer qu'un triangle ABC *a ses angles aigus ou qu'il possède un angle obtus, suivant que la somme des carrés de ses*

(*) Le calcul est plus simple en prenant d'abord les moments par rapport au plan horizontal passant par le sommet du corps. *(Note de M. Dellac).*

trois côtés est plus grande ou plus petite que le double du carré du diamètre du cercle circonscrit; et réciproquement.

(G. L.)

Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC (*); joignons le sommet B au centre O. Le rayon OB coupe la circonférence au point B′. Supposons d'abord que ABC ait ses trois angles aigus; R désignant la longueur du rayon, nous avons :

$$AB^2 + AB'^2 = (2R)^2,$$

$$BC^2 + CB'^2 = (2R)^2;$$

d'où $$AB^2 + BC^2 + AB'^2 + CB'^2 = 2.(2R)^2. \qquad (1)$$

Mais l'angle AB′C étant obtus, on a

$$AB'^2 + CB'^2 < AC^2$$

et, par suite, $$AB^2 + BC^2 + AC^2 > 2.(2R)^2.$$

Si, au contraire, l'angle B est obtus; alors on a

$$AB'^2 + CB'^2 > AB^2$$

et $$AB^2 + BC^2 + AC^2 < 2.(2R)^2.$$

Dans le cas particulier où l'angle B est droit, on sait que

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = 2.(2R)^2.$$

Les réciproques sont évidentes.

Nota. — Solutions analogues par MM. A. Boutin, professeur au collège de Courdemanche; D. Cotoni, au lycée d'Alger; Henri Martin, lycée Condorcet; E. Quintard, à Arbois.

QUESTIONS PROPOSÉES

268. — Dans un polygone régulier de n cotés inscrit dans un cercle de rayon R, si on désigne par a le côté du polygone et par δ_1, δ_2, δ_3.....δ_{n-3} les diagonales menées d'un sommet à tous les autres, on a la relation :

$$\delta_2^1 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots + \delta_{n-3}^2 = 2(nR^2 - a^2).$$

(E. Vigarié.)

269. — Si des points de Brocard, Ω, Ω′, on abaisse sur les côtés du triangle de référence ABC, les perpendiculaires

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

$\Omega\alpha$, $\Omega\beta$, $\Omega\gamma$; $\Omega'\alpha'$, $\Omega'\beta'$, $\Omega'\gamma'$, les deux triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ sont équivalents et ont même angle de Brocard que le triangle ABC.

(*E. Vigarié.*)

270. — On considère un cercle Δ et deux diamètres rectangulaires Ox, Oy; une tangente mobile rencontre Ox en A et Oy en B; on mène par A une parallèle à Oy, par B une parallèle à Ox: soit M le point ainsi obtenu.

Démontrer que si, sur la droite menée par O, symétrique de Ox par rapport à OM, on prend $\pm$ OI = OM le lieu de I est un système de deux droites parallèles à Ox. (*G. L.*)

271. — On considère un cercle O et un diamètre fixe AB, dans ce cercle. Soit M un point mobile sur la circonférence O. Sur AM et BM, comme diamètres, on décrit des circonférences Δ, Δ'; et, par M, on mène une parallèle à AB; cette droite coupe Δ en C, Δ' en D. Si l'on trace les tangentes à Δ et Δ', en ces points C, et D, elles se coupent en un certain point I. Le lieu de I est une ellipse. (*G. L.*)

272. — Soit un triangle ABC. Sur BC on prend un point mobile M et l'on trace, par ce point, des parallèles aux côtés AB, AC : soient P, Q les points de rencontre de ces parallèles avec ces côtés. On prend $CP' = kCP$, $BQ' = kBQ$, k désignant une constante donnée : les parallèles menées par P', Q', aux côtés AB, AC, se coupent en I; trouver le lieu décrit par ce point. (*G. L.*)

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23710-7.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

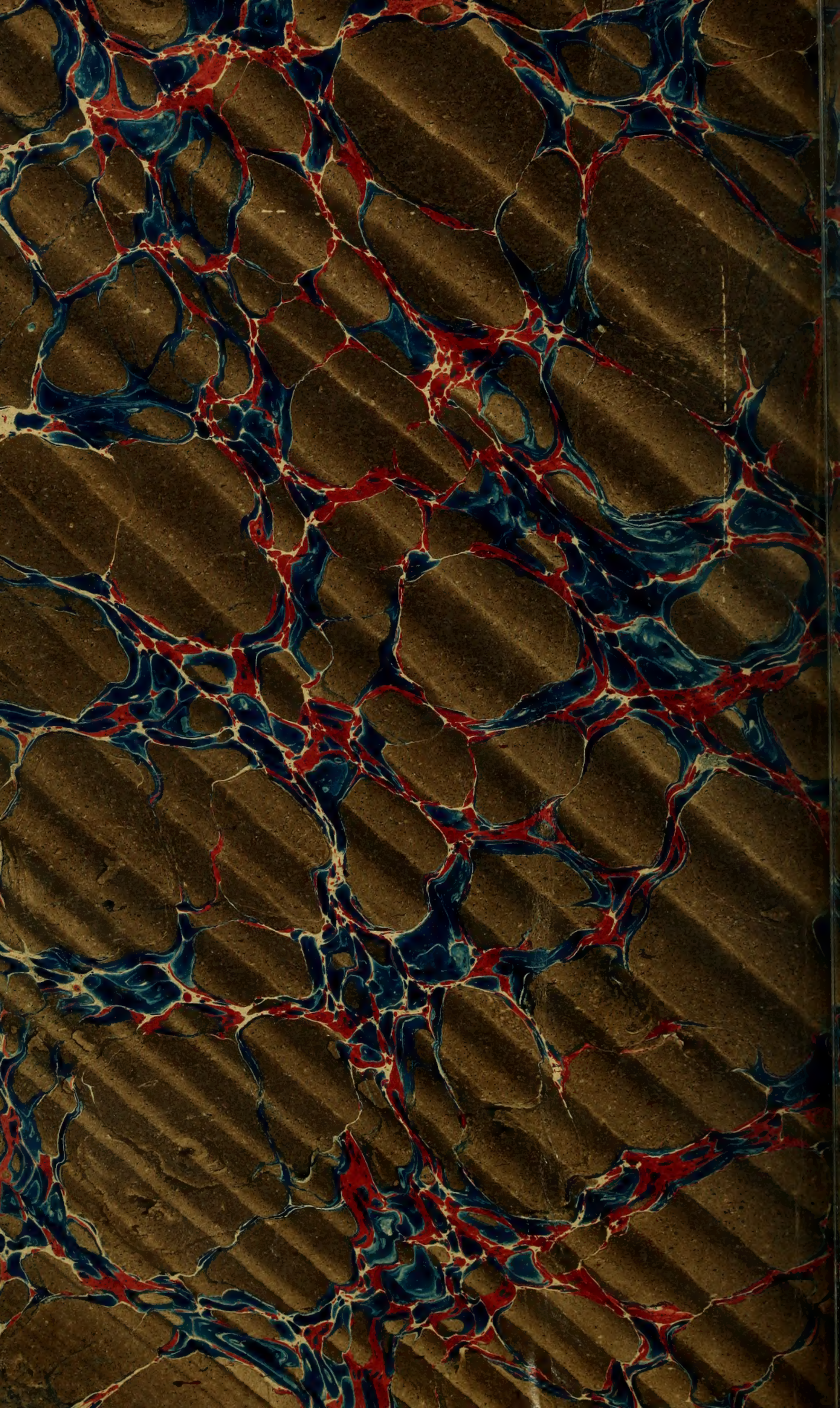
Mélanges & Correspondance.

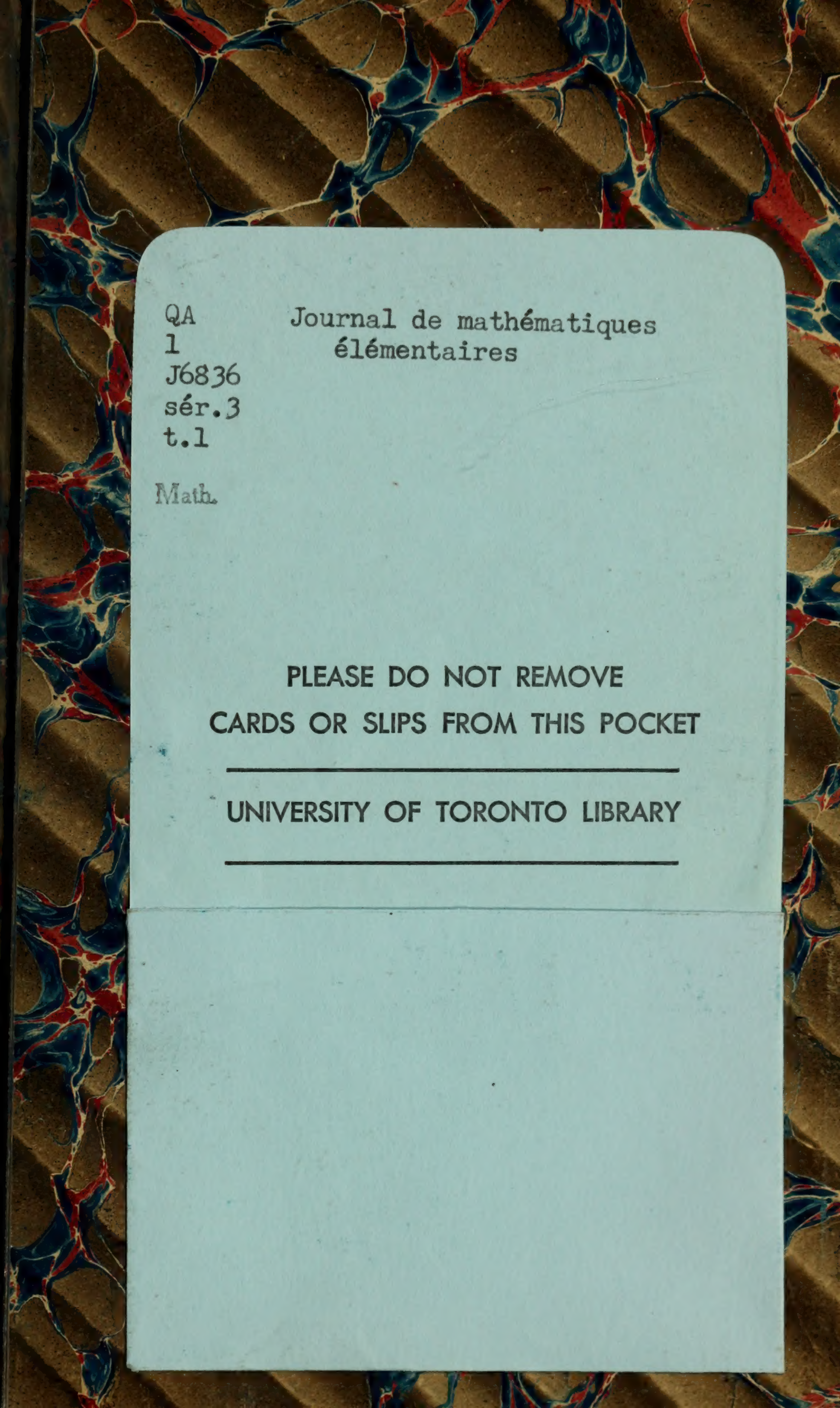
Concours divers.

Bibliographie.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMP. CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMP. CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23710-7.





QA
1
J6836
sér.3
t.1
Journal de mathématiques
élémentaires
Math.
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

